Машински факултет
УНИВЕРЗИТЕТА У БЕОГРАДУ

БИОМЕХАНИКА ТКИВА И ОРГАНА

ОСНОВЕ ТЕОРИЈЕ ЛИНЕАРНЕ ВИСКОЕЛАСТИЧНОСТИ

проф. М П. Лазаревић, Машински факултет, Универзитет у Београду, Србија

- Типови материјала који показују карактеристике и елестичних и вискозних материјала називају се **вискоеластични материјали.**
- Вискоеластичност:
  - Понашање материјала зависи од тренутка посматрања
  - Имају перманентну деформацију (не враћају се у почетан обик након уклањања оптерећења)
- Понашање вискоеластичног материјала се често одређује коришћењем:
  - Тестова пузања
  - Тестова релаксације
  - Хистерезиса

Основни појмови вискоеластичности

- Вискоеластични материјали: показују и еластична и вискозна својства

- Еластичност је обично резултат издужења веза дуж кристалографских равни (у чврстим телима), док је вискозност последица дифузије атома или молекула унутар аморфних материјала

- Материјали чија напрезања зависе од времена или брзине деформисања

Вискоеластични материјали

- За вискоеластичне материјале карактеристичне су три појаве:

• релаксација напона,(relaxation)

•пузање (creep) и

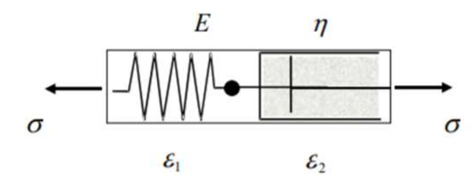
• хистерезис (hysteresis)

Основни модели за вискоеластичне материјале

- **Максвелов модел** –

погодан за моделирање релаксације напона.

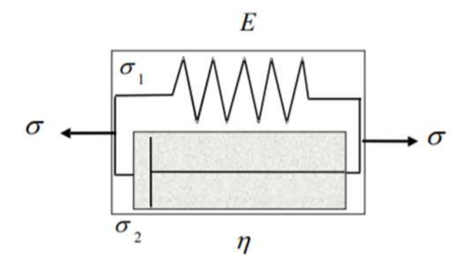
Серијска веза опруге и вискозног пригушивача



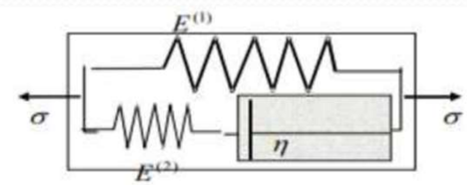
- **Келви-Војтов модел** –

погодан за моделирање пузања материјала.

Паралелна веза еластичне опруге и вискозног пригушивача

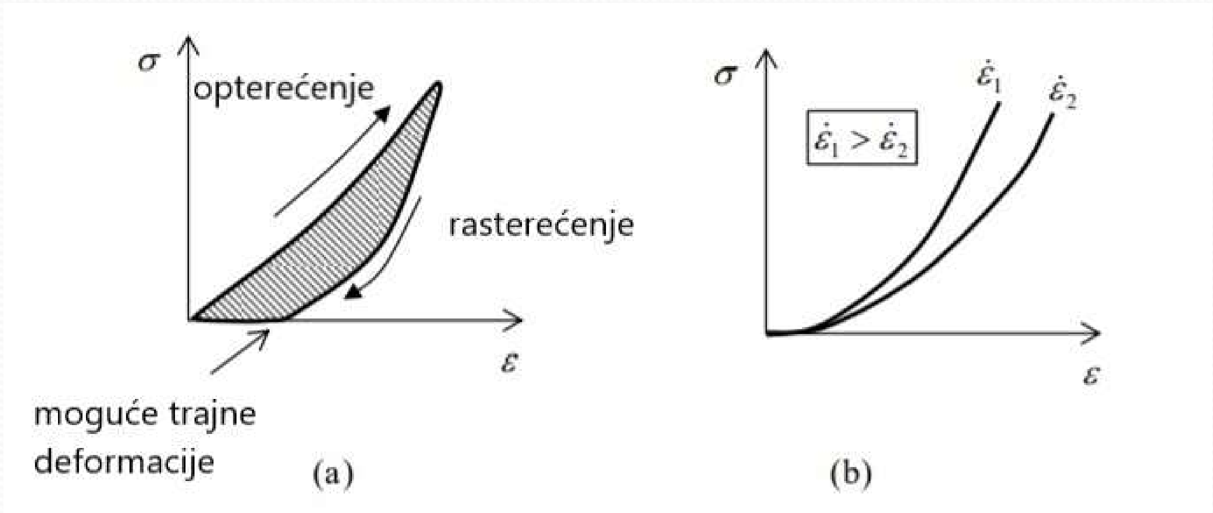


- **Зенеров модел** – модел линеарног чврстог тела- погодан за моделирање истовремено релаксације напона и пузања.



Вискоеластичност

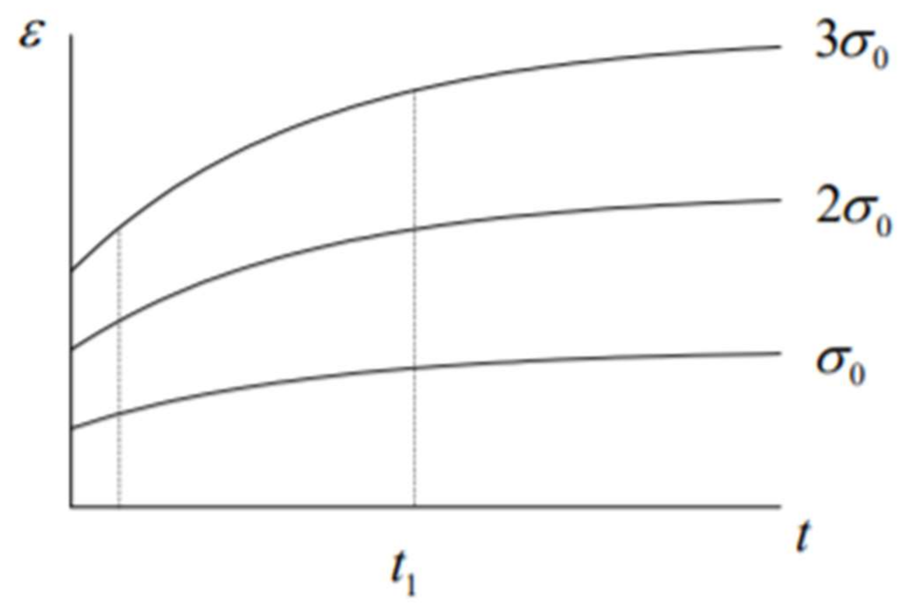
- Постојање историјата напрезања односно деформисања (тзв. материјали са „меморијом“)
- Вискоеластични материјали и тест оптерећења



Крива зависности напрезање-деформација у циклусу пуњења и истовара (могућа трајна деформација), б) две различите брзине истезања

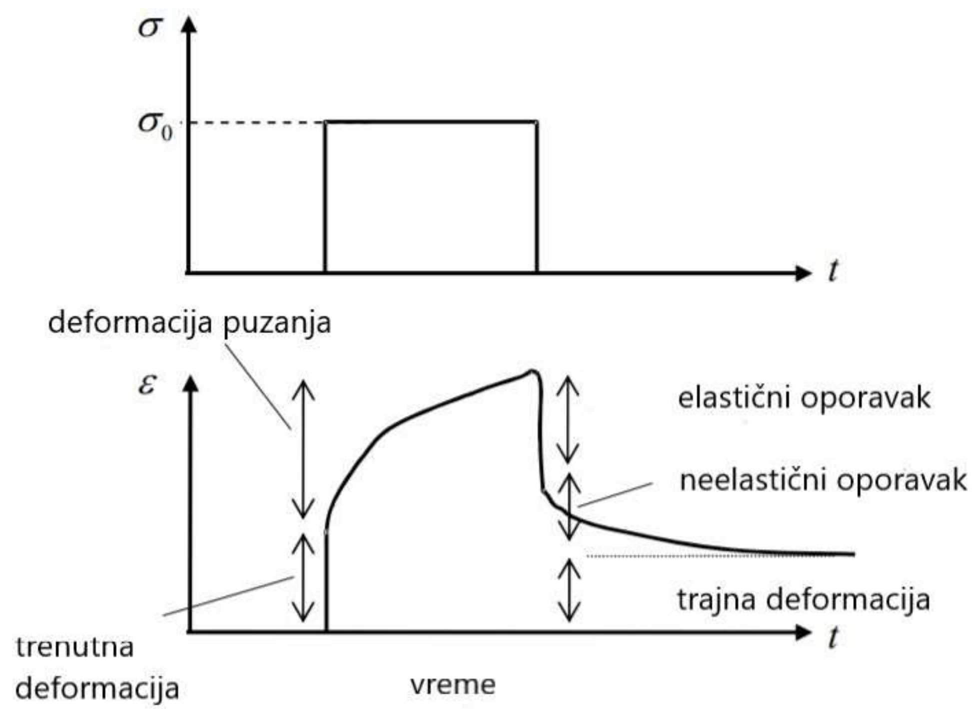
Линеарна вискоеластичност-пример пузања

- График зависности деформације од времена, под утицајем различитих оптерећења



Тест пузања и опоравка

Тест пузања подразумева одређивање деформисања (издужења) материјала при константном напону

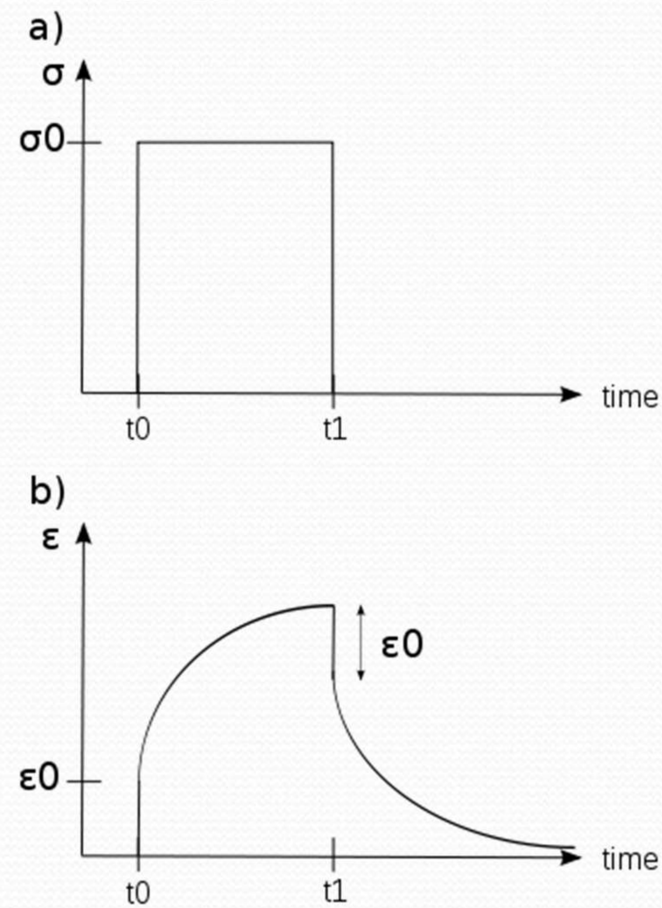


Одговор деформације на тест пузања и опоравка

Пузање

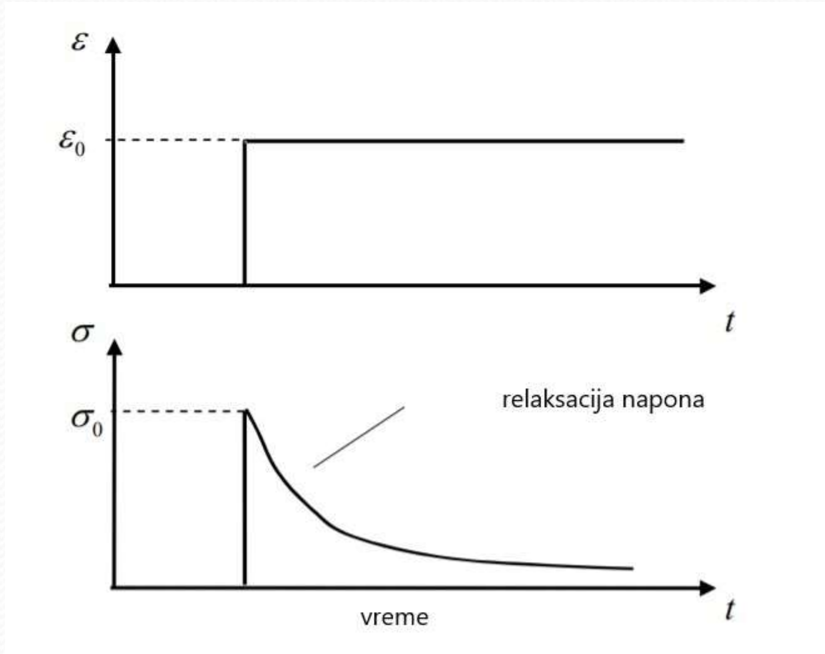
-Пузање је тежња чврстих деформиматеријала ка спором кретању под дејством напрезања (оптерећења). Јавља се као резултат дугог излагања материјала високим нивоима оптерећења, а која су испод нивоа границе течења материјала

- „Пузање представља континуирану промену деформације која се одвија при датом (константном) напону, оптерећењу“



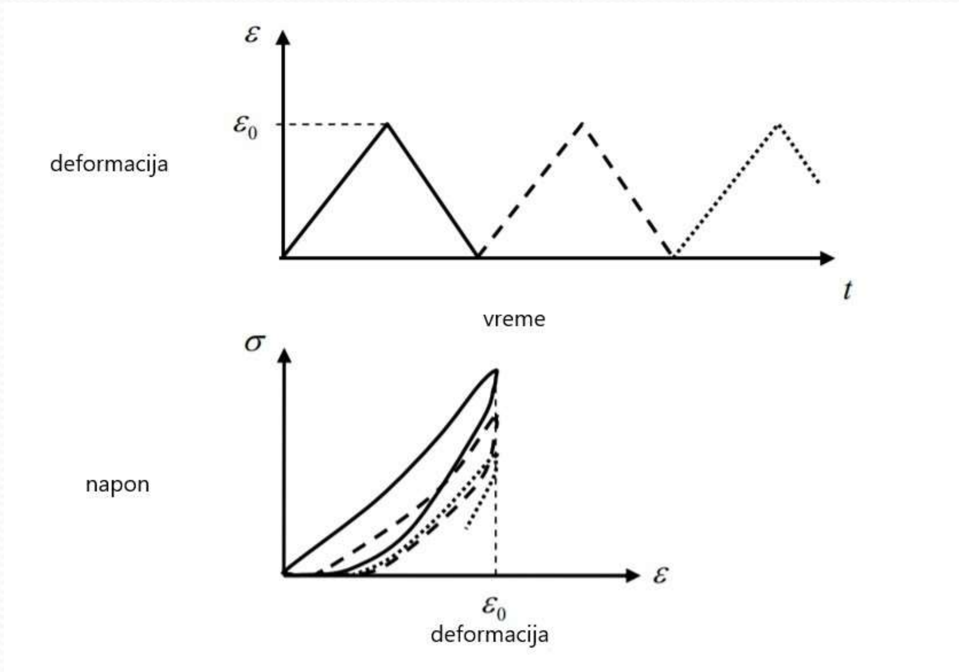
слика : Дијаграм пузања

Тест релаксације напона



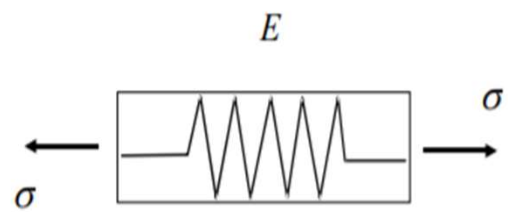
Пример релаксације напона

Циклично оптерећење

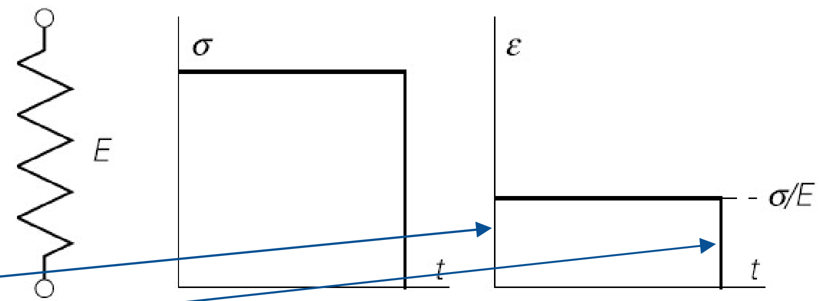


Одговор напона на периодично деформисање јавља се хистерезисно понашање

• Линеарна еластична опруга

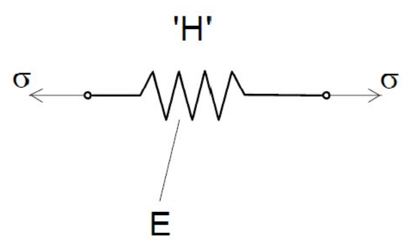


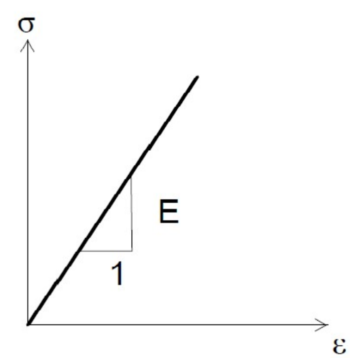
• У временском домену



Response of an ideal spring.

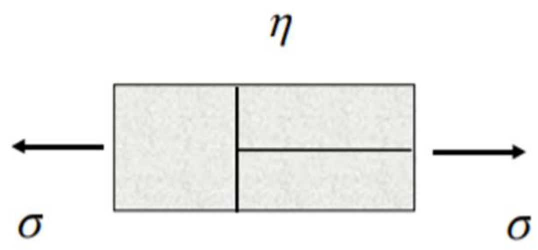
- Крутост опруге је овде означена са Е
- Еластична опруга као
- пример модела еластичног понашања
- <u>Тренутно деформисање и релаксација</u>





$$\sigma = E\varepsilon$$

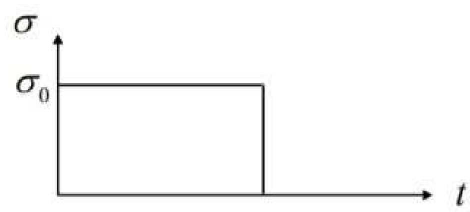
- **Линеарно вискозни пригушивач**

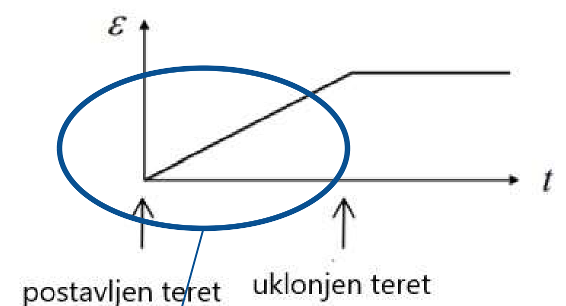


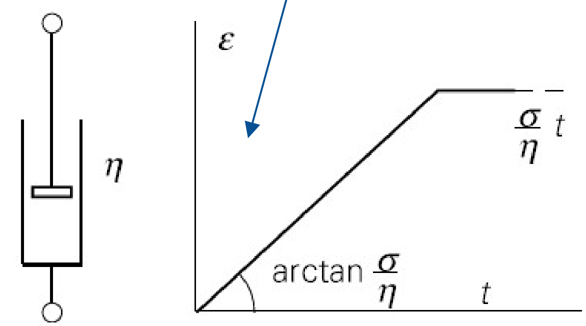
- **Одговор пригушивача на тест пузања и опоравка**
- **У временском домену**

$$d\varepsilon/dt = \dot{\varepsilon} ;$$

$$\boxed{\sigma = \eta \cdot \dot{\varepsilon}}$$

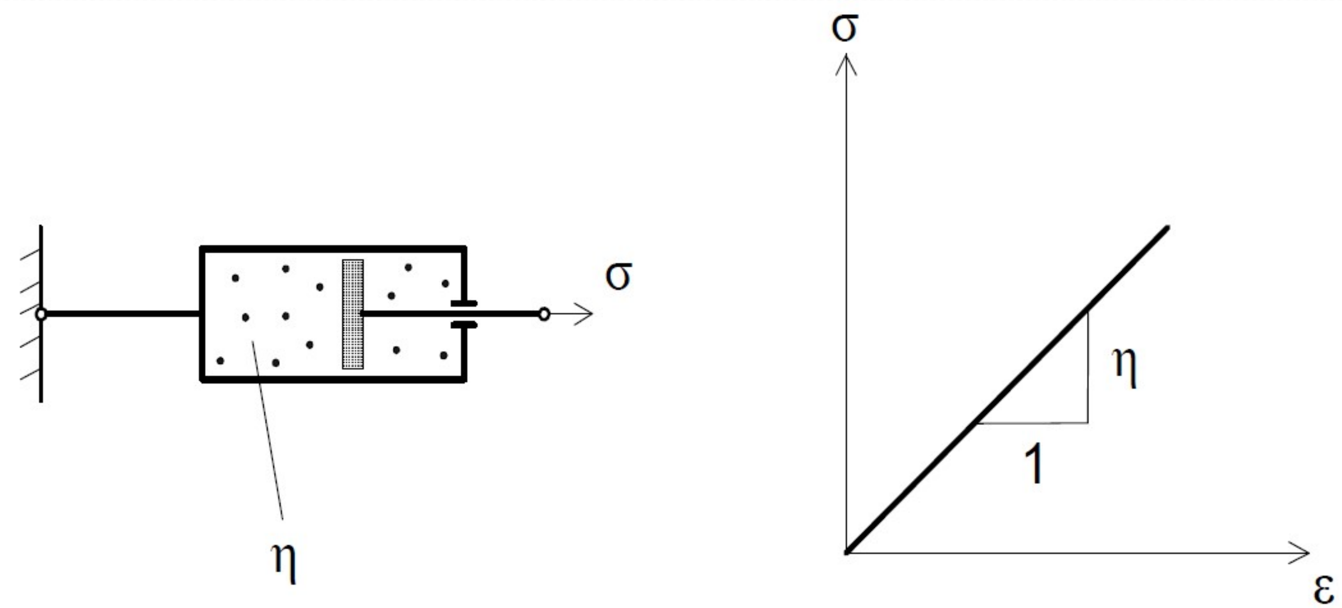






Response of an ideal liquid.

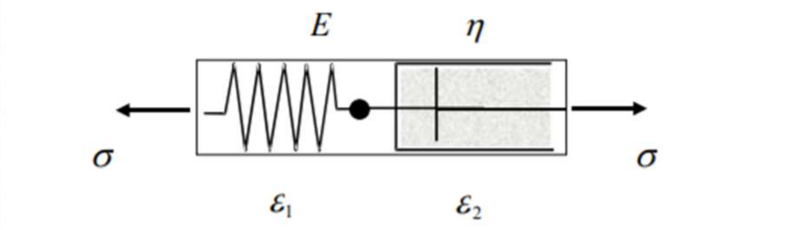
Вискозно понашање



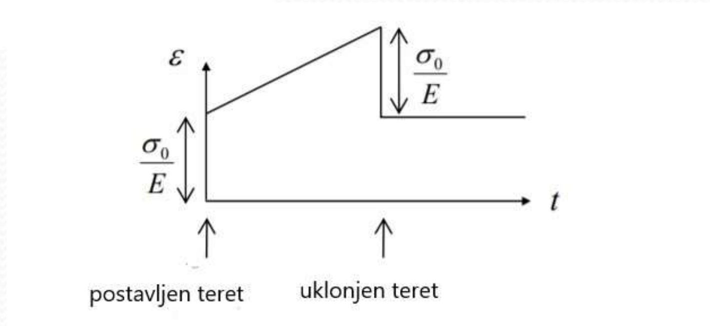
Slika : ***Viskozni prigušivač kao model viskoznog ponašanja***

- Максвелов модел

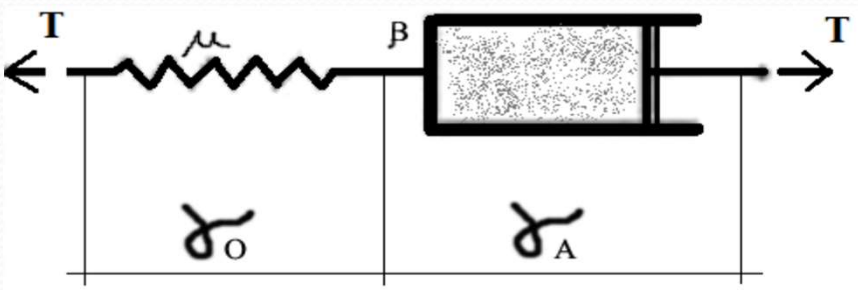
- Погодан за моделирање релаксације напона



- Тест пузања и опоравка



Максвелов модел



садржи серијски повезану еластичну опругу крутости μ и Њутновски вискозни пригушивач у коме се јавља коефицијент вискозног отпора β.

Укупна деформација γ једнака је збиру деформација опруге и пригушивача

$$\sigma \to T$$
$$\varepsilon \to \gamma$$
$$E \to \mu$$
$$\eta \to \beta$$

$$\gamma = \gamma_O + \gamma_A \quad / \frac{d}{dt}$$

$$\dot{\gamma} = \dot{\gamma_O} + \dot{\gamma_A} = \frac{\dot{T}}{\mu} + \frac{T}{\beta}$$

$$\Rightarrow \boxed{\dot{\gamma} = \frac{\dot{T}}{\mu} + \frac{T}{\beta}} \quad (*)$$

У литератури се могу начи различите ознаке величина (овде се користе даље ознаке које су у сагласности са ознакама које су коришћене у Хандоутима (*)

Хевисајдова (јединична) одскочна функција и Диракова делта функција

- Хевисајдова функција је прекидна функција која има вредност нула за негативне вредности аргумента и јединицу за позитивне вредности аргумента :

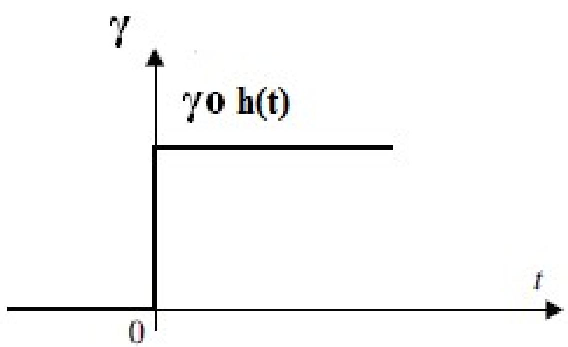
$$H(t-a)=\begin{cases}0, & t<a\\ 1/2, & t=a\\ 1, & t>a\end{cases}$$

- Диракова делта функција је најприближније речено функција на реалној правој чија је вредност свугде нула, осим у координатном почетку где је њена вредност бесконачна,

$$\delta(t-a)=\begin{cases}\infty, & t=a\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases},$$

- и дефисана да задовољава идентитет да је њен интеграл у интервалу од -∞ до +∞ једнак 1,

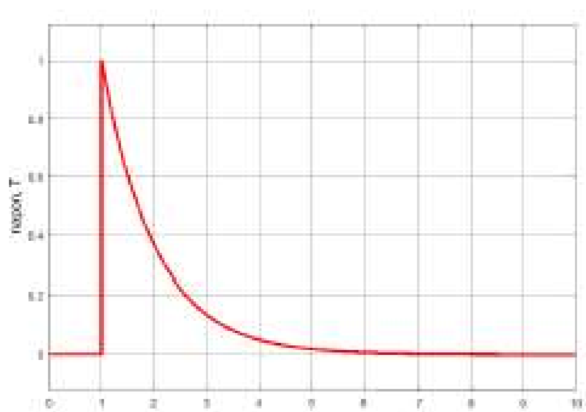
$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t-a)dt=1$$



$$\left.\begin{aligned} \gamma &= \gamma_0 h(t) \\ \dot{\gamma} &= \gamma_0 \delta(t) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \dot{\gamma} = \frac{\dot{T}}{\mu} + \frac{T}{\beta}$$

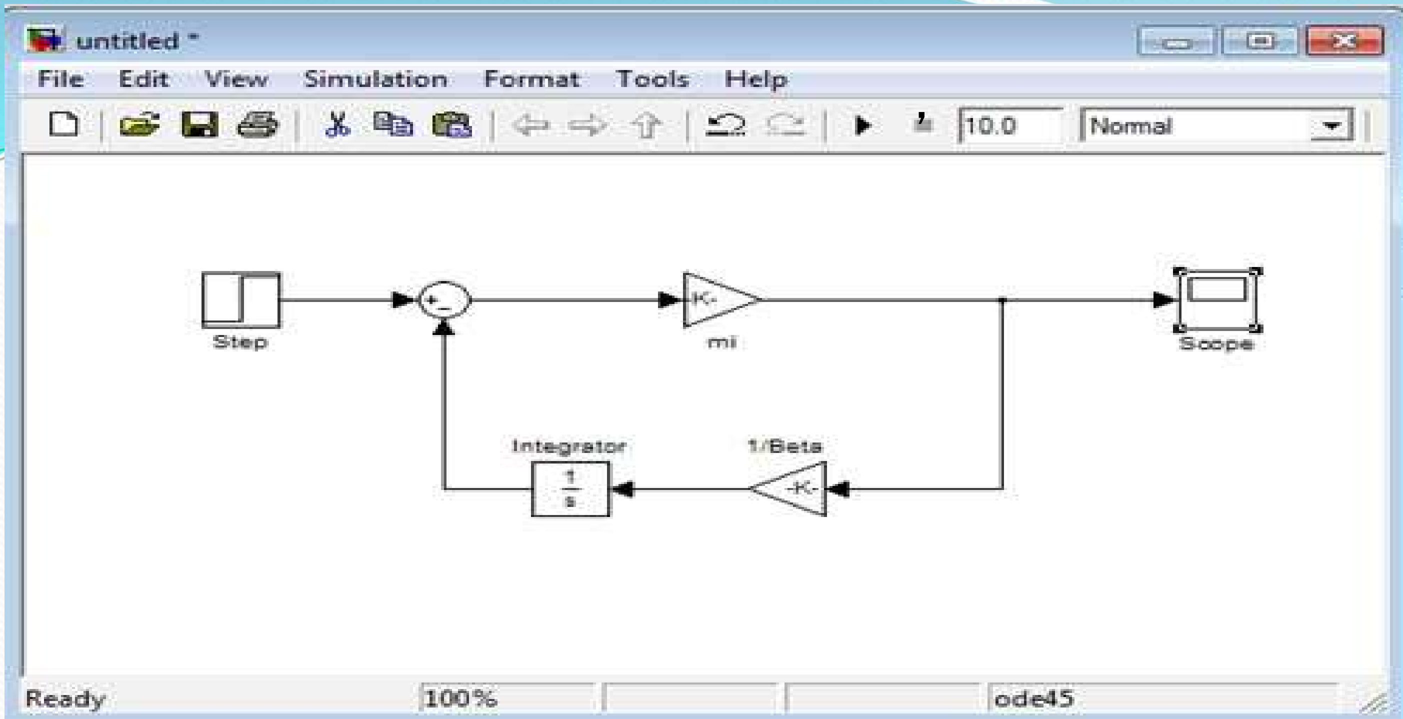
добија се линеарна диф. једначина по T чијим решавањем се добија:

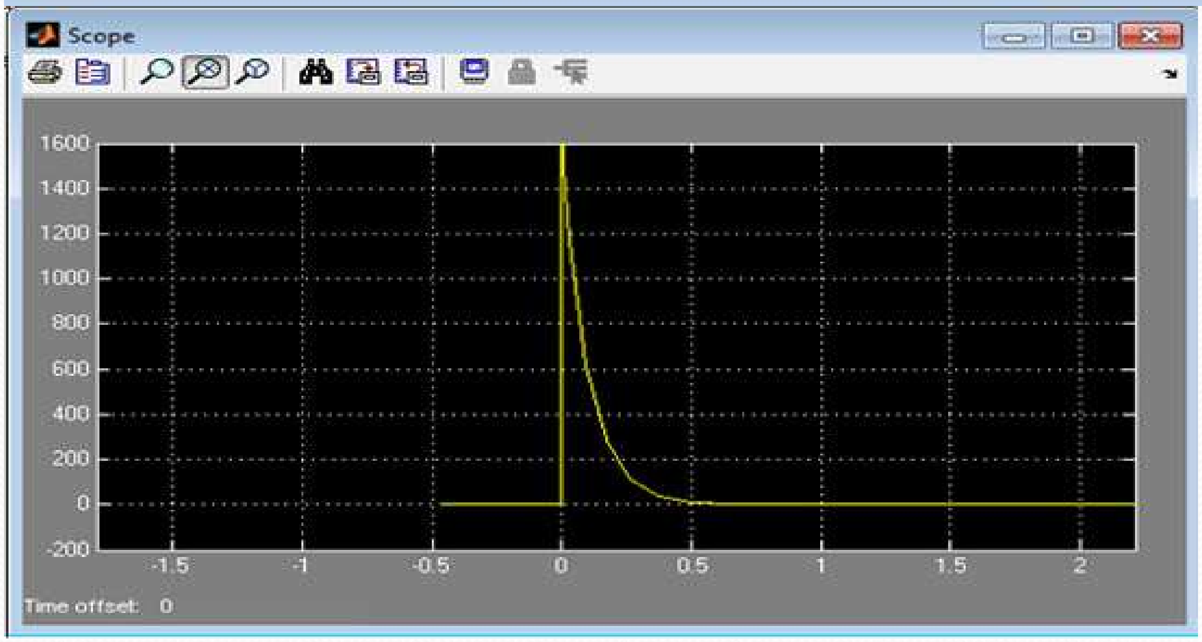
$$\boxed{T(t) = \mu \gamma_0 e^{-t/\tau}, \ \tau = \beta / \mu}$$



Слика 12: Релаксација напона Максвеловог модела

где је са τ означено време релаксације





$$\dot{\gamma} = \frac{\dot{T}}{\mu} + \frac{T}{\beta} \;\; / \int$$

$$T = \mu\left(\gamma_O - \frac{1}{\beta}\int T dt\right)$$

За линеарне вискоеластичне материјале уводе се функције које карактеришу вискоеластична својства материјала а не зависе величине мере деформације/напрезања

На тај начин дефинишу се се ***модули релаксације напона*** $G(t)$ као однос напона Т и *константне мере деформације* γ

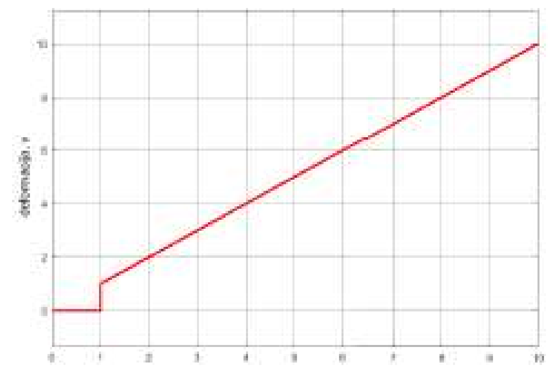
$$\boxed{G_M(t) = T(t)/\gamma(t) = \mu\gamma_0 e^{-t/\tau}/\gamma_0 = \mu e^{-t/\tau}}$$

Одговор пузања Maxwel-овог модела може се добити замењујући $T = ToH(t)$ у диф. једначину, (*). На тај начин добија се:

$$\dot{\gamma} = \frac{T_0}{\mu}\left[\delta(t) + \frac{1}{\tau}H(t)\right],$$

где је $\delta(t)$ Дирак-ова функција ($\delta(t) = 0$ ако је $t \neq 0$)

са особином да је $\dot{H}(t) = \delta(t)$



Слика 13: Пузање Максвеловог модела

са је означено време ретардације $\tau_r = \beta / \mu$

Интеграцијом претходне диф. једначине добија се

$$\boxed{\gamma(t) = \frac{T_0}{\mu}\left(1 + \frac{t}{\tau_r}\right)H(t)}$$

са слике се види линеарна зависност што не одговара реалном случају који има експоненцијалну зависност

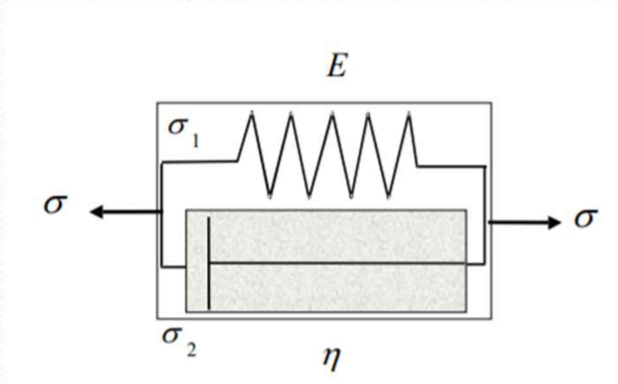
Дефинише се нова функција тзв. *попустљивост при пузању* $J(t)$ као однос мере деформације и *константног напона* који делује То., као

$$J(t) = \gamma(t) / T_0$$

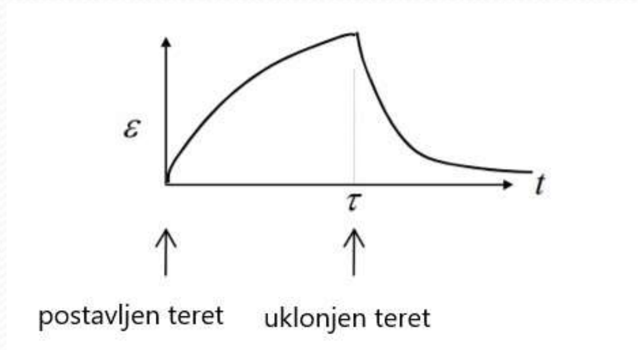
Пошто је мера деформације пропорционална напону који делује,следи да попустљивост при пузању зависи само од времена, а не од величине напона који делује. За случај Максвеловог модела функција попустљивости при пузању је сада облика:

$$\boxed{J(\mathrm{t}) = \gamma(t) / T_0 = \frac{1}{\mu}\left(1 + \frac{t}{\tau_r}\right) H(t)}$$

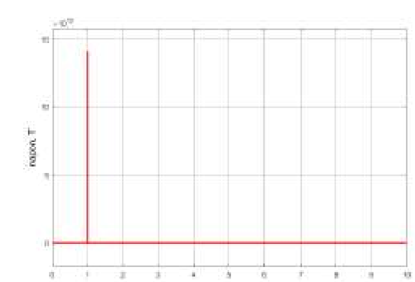
• Келвин-Војтов модел



- **Тест пузања и опоравка**



- **Релаксација напона**



Слика 15: Релаксација напона Келвин-Војтовог модела

Келвин-Војтов модел садржи паралелно повезану еластичну опругу крутости и Њутнов вискозни μ гушивач коме се јавља коефицијент отпора вискозности β Овде је деформација иста а напрезања (напони) се расподељују у одговарајуће елементе тј. укупни напон је облика који је дат следећом диф. једначином:

$$\boxed{T = T_{opr} + T_{pr} = \mu\gamma + \beta\dot{\gamma}}$$

Ако се као улазна величина узме $T = ToH(t)$, где је $H(t)$ Хевисајдова јединична функција добија се линеарна диференцијална једначина првог реда по, γ чијим решавањем се добија:

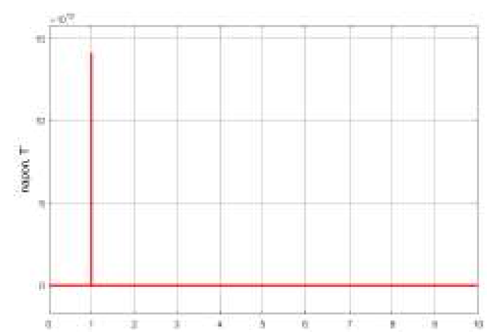
$$\mu\gamma + \beta\dot{\gamma} = T_o H(t)$$

$$\boxed{\gamma(t) = \frac{T_o H(t)}{\mu}\left(1 - e^{\frac{-t}{\tau_r}}\right), \quad \tau_r = \beta / \mu}$$

Слика 16: Пузање Келвин-Војтовог модела

Ако би се тражила релаксација напона за КВ модел онда је улазна величина $\gamma(t)=\gamma_o H(t)$ добија се линеарна диференцијална једначина првог реда по, $T(t)$ чијим решавањем се добија:

$$T(t)=\mu\gamma_o H(t)+\beta\gamma_o\delta(t)$$



Слика 15: Релаксација напона Келвин-Војтовог модела

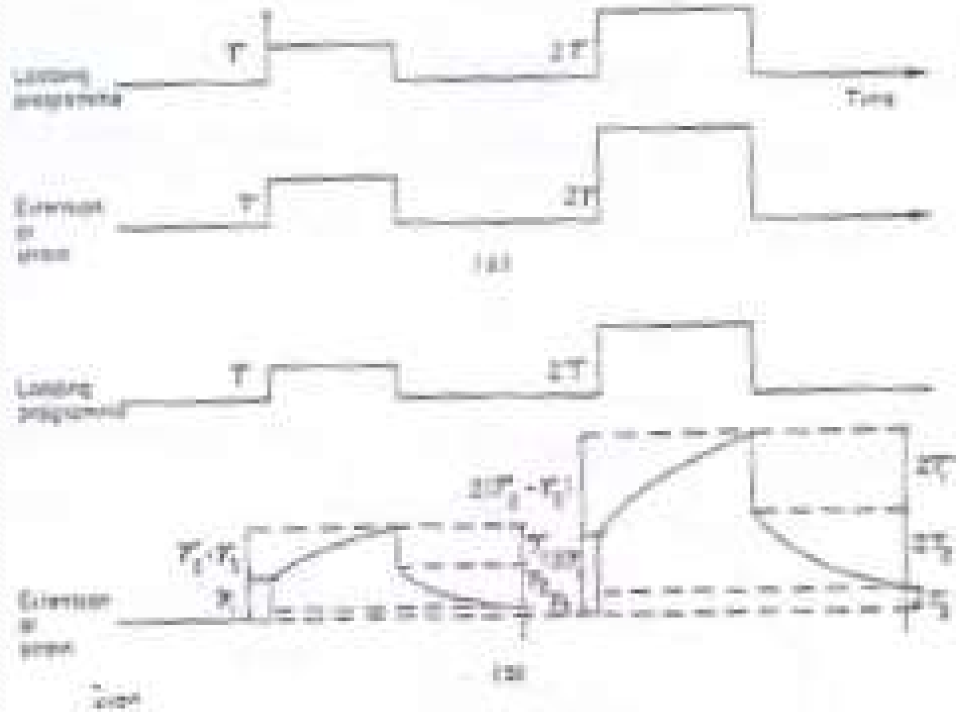
Одговарајући модул релаксације напона је за КВ модел облика:

$$G_{KV}(t) = T(t) / \gamma_o = \mu H(t) + \beta\delta(t)$$

Док је функција попустљивости при пузању дата са:

$$J_{KB}(\mathrm{t}) = \gamma(t) / T_o = \frac{1}{\mu}\left(1 - e^{\frac{-t}{\tau_r}}\right), \quad \tau_r = \beta / \mu$$

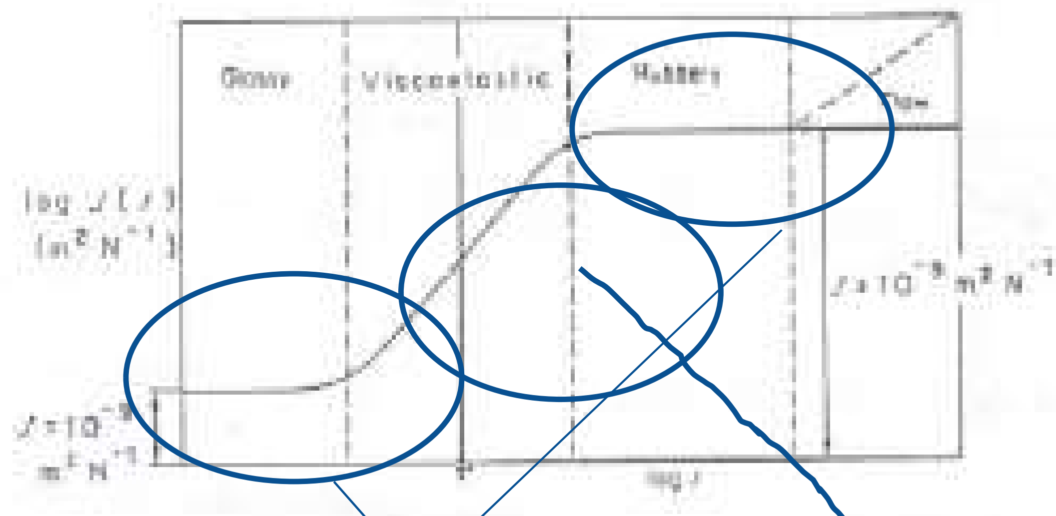
Пример - полимер



Слика 6.5 a) Деформација еластичних чврстих тела
b) Деформација линеарних вискоеластичних чврстих тела

Дефинише се *попустљивост при пузању* $J(m)$ као однос мере деформације и *константног напона* који делује

$J(t) = \gamma / T$.

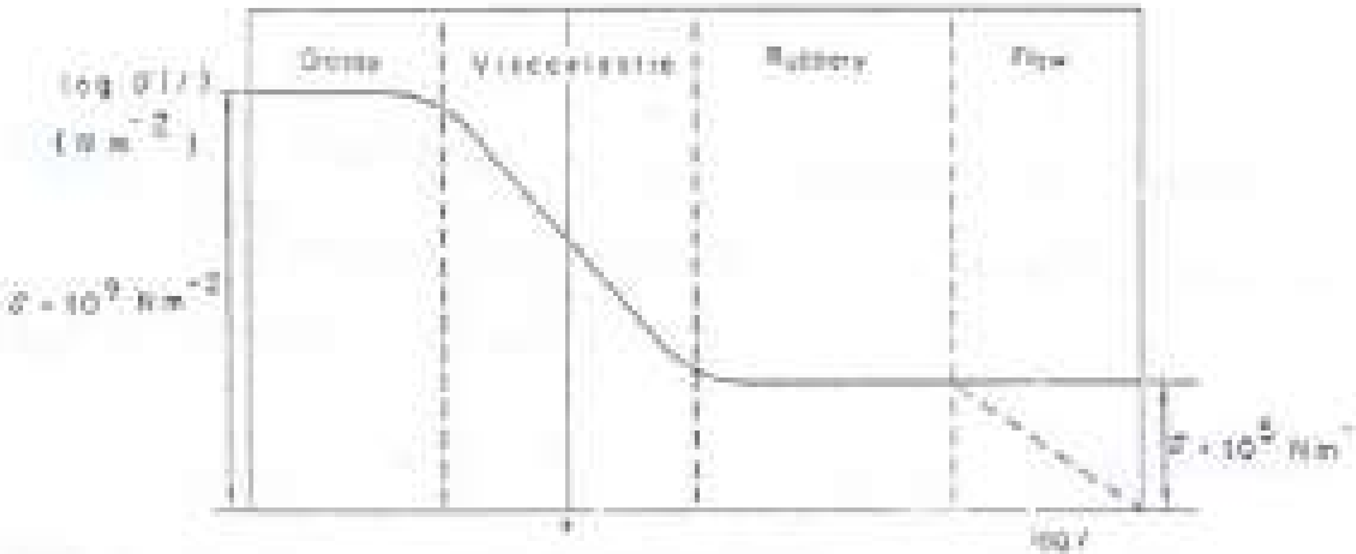


Слика 6.6 J(t) попустљивост при пузању
у функцији времена t; T представља временску ретардацију

$$J(t) \equiv \frac{\gamma}{T} = J_1(t) + J_2(t) + J_3(t)\,,$$

Могу се уочити главне три области „стакласта“ , вискоеластична и „гумена“ област

Модул релаксације напона G(t)



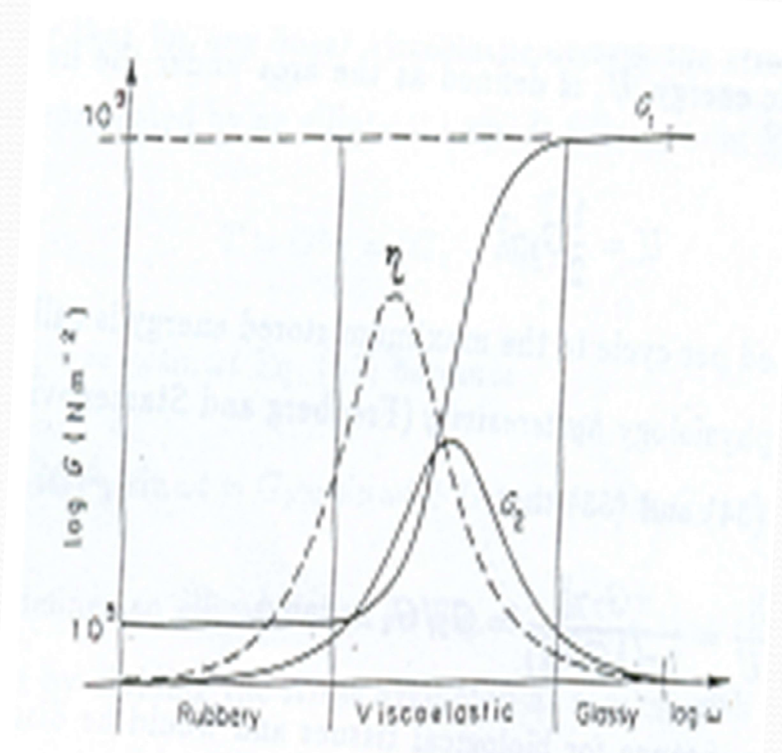
Слика 6.8 Модули релаксације напона $\Gamma(t)$ у функцији времена t. T је време релаксације.

$$G(t) = \Gamma / \gamma \, .$$

$$G_g = 1/J_g \text{ и } G_r = 1/J$$

Експериментално одређивање динамичких модула

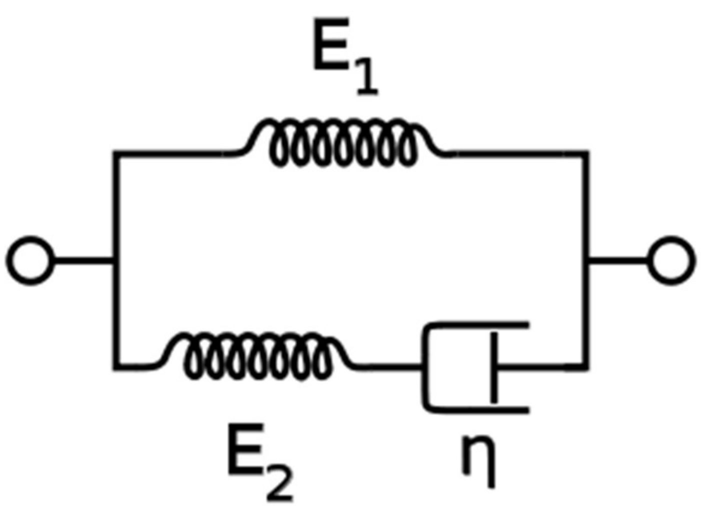
- На ниским фреквенцијама материјал се понаша „гумасто“ са
- $G_1 \approx 10^5$ N/m и не зависи од фреквенције и где је $G_2 \approx 0$.
- На виском фреквенцијама понашање је „стакласто“ и $G_1 \approx 10^9$ N/m^2 , независна од фреквенције и $G_2 \approx 0$.

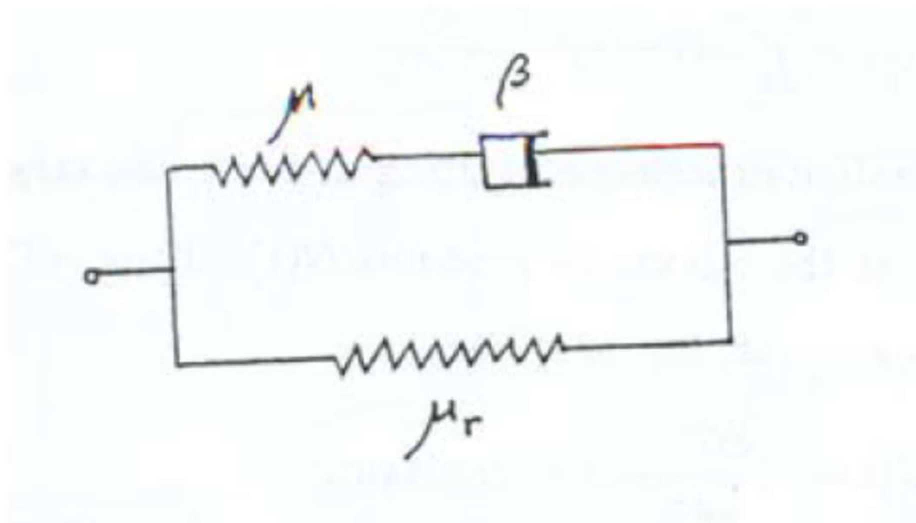


Слика 7.3

Модел стандардног линеарног чврстог тела (ЛЧТ)- Зенеров модел

Стандардни модел линеарног чврстог тела познат је и под називом **Зенеров модел.** С обзиром да Максвелов модел вискоеластичног понасања не описује реално пузање, а Келвин-Војтов модел не описује реално релаксацију напона, значај стандардног модела ЛЧТ је у томе што описује оба ова феномена карактеристична за понашање вискоеластичног материјала.





Конститутивна једначина ЛЧТ

У нашем случају за паралелну везу укупни напон је

$$T = T_r + T_M$$

где је T_r представља напон у грани који садржи само опругу, а T_m напон у грани који садржи Максвелов модел.

За редно везане компоненте 1 и 2 унутар Максвеловог модела важи:

$$\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$$

где је γ_1 деформација која одговара вискозном абсорберу, док је γ_2 деформација која одговара еластичној опрузи.

- Такође за редно везане компоненте 1 и 2 у Максвеловом моделу, важи и :

$$T = T_1 = T_2$$

што би у нашем случају било:

$$T_M = \mu \cdot \gamma_2 = \beta \cdot \dot{\gamma}_1$$

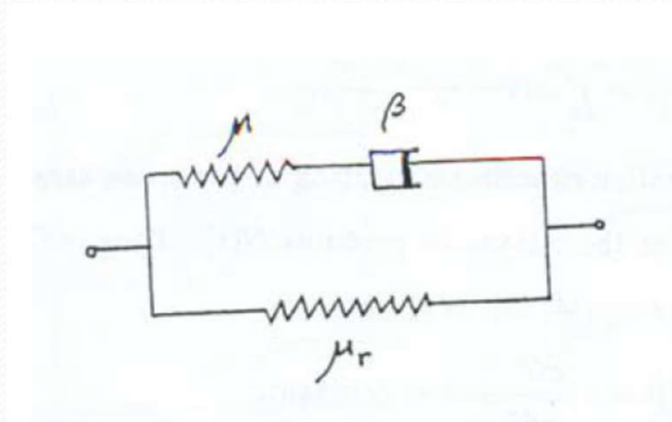
тј. елементи у Максвеловом моделу изложени су истом напрезању

$$T = T_r + T_M =$$

$$= \mu_r \cdot \gamma + \mu \cdot \gamma_2 =$$

$$= \mu_r \cdot \gamma + \mu \cdot (\gamma - \gamma_1) =$$

$$= \gamma \cdot (\mu_r + \mu) - \mu \cdot \gamma_1$$



- Затим, на основу претходно добијеног, формира се израз следећег облика:

$$T + \frac{\beta}{\mu} \cdot \dot{T} = \gamma \cdot (\mu_r + \mu) - \mu \cdot \gamma_1 + \frac{\beta}{\mu} \cdot \left[\dot{\gamma} \cdot (\mu_r + \mu) - \mu \cdot \dot{\gamma}_1 \right] =$$

$$= \gamma \cdot (\mu_r + \mu) - \mu \cdot \gamma_1 + \frac{\beta \cdot \dot{\gamma}}{\mu} \cdot (\mu_r + \mu) - \beta \cdot \dot{\gamma}_1 =$$

$$= \gamma \cdot (\mu_r + \mu) - \mu(\gamma_1 + \gamma_2) + \frac{\beta}{\mu} \cdot \dot{\gamma} \cdot (\mu_r + \mu) =$$

$$= \mu_r \cdot \gamma + \frac{\beta}{\mu} \cdot \dot{\gamma} \cdot (\mu_r + \mu)$$

- Дакле, добили смо конститутивну једначину ЛЧТ-која гласи:

$$\boxed{T + \frac{\beta}{\mu} \cdot \dot{T} = \mu_r \cdot \gamma + \frac{\beta}{\mu} \cdot (\mu_r + \mu) \cdot \dot{\gamma}}$$

Код модела ЛЧТ, услед појаве новог елемента – опруге уз задржавање елемената Максвеловог модела, имамо две временске константе: $\tau_\gamma \quad \tau_\tau$

$$\tau_\gamma = \frac{\beta}{\mu} \qquad \tau_\tau = \frac{\beta}{\mu_r} \cdot \left(1 + \frac{\mu_r}{\mu}\right)$$

$$\boxed{T + \tau_\gamma \cdot \dot{T} = \mu_r \left(\gamma + \tau_\tau \cdot \dot{\gamma}\right)}$$

Коначни овблик конститутивне једначине ЛЧТ

Одређивање деформације ако је познато напрезање $T = T_0 \cdot h(t)$

$$\dot{T} = \frac{d\left(T_0 \cdot h(t)\right)}{dt} = T_0 \cdot \delta(t)$$

$$T_0 \cdot h(t) + \tau_\gamma \cdot T_0 \cdot \delta(t) = \mu_r \cdot \left(\gamma + \tau_\tau \cdot \dot{\gamma}\right)$$

Решавање претходне диференцијалне једначине се спроводи у комплексном *s*-домену применом Лапласове трансформације ,tj.

$$T_0 \cdot \left(\frac{1}{s} + \tau_\gamma \cdot 1\right) = \mu_r \cdot \left(\gamma(s) + \tau_\tau \cdot s \cdot \gamma(s)\right) =$$

$$= \mu_r \cdot (1 + \tau_\tau \cdot s) \cdot \gamma(s)$$

$$\gamma(s) = \frac{T_0}{\mu_r} \cdot \frac{\tau_\gamma}{\tau_\tau} \cdot \frac{\left(\dfrac{1}{s \cdot \tau_\gamma} + 1\right)}{\left(\dfrac{1}{\tau_\tau} + s\right)} = \frac{T_0}{\mu_r} \cdot \frac{\tau_\gamma}{\tau_\tau} \cdot \frac{s + \dfrac{1}{\tau_\gamma}}{s + \dfrac{1}{\tau_\tau}} \cdot \frac{1}{s}$$

Сређивањем, и применом инверзне Лапласове трансформације добија се

$$\frac{s+\frac{1}{\tau_\gamma}}{s+\frac{1}{\tau_\tau}}=\frac{s}{s+\frac{1}{\tau_\tau}}+\frac{\frac{1}{\tau_\gamma}}{s+\frac{1}{\tau_\tau}}=1-\left(\frac{1}{\tau_\tau\cdot\left(s+\frac{1}{\tau_\tau}\right)}\right)+\frac{1}{\tau_\gamma\cdot\left(s+\frac{1}{\tau_\tau}\right)}$$

$$\gamma(s)=\frac{T_0}{\mu_r}\cdot\frac{\tau_\gamma}{\tau_\tau}\cdot\left(1-\frac{1}{\tau_\tau\cdot\left(s+\frac{1}{\tau_\tau}\right)}+\frac{1}{\tau_\gamma\cdot\left(s+\frac{1}{\tau_\tau}\right)}\right)\cdot\frac{1}{s}$$

$$\boxed{\gamma(t)=\frac{T_0}{\mu_r}\cdot\left(1-\left(1-\frac{\tau_\gamma}{\tau_\tau}\right)\cdot e^{-\frac{t}{\tau_\tau}}\right)\cdot h(t)}$$

Симулација

Деформација се може нацртати применом Simulink-а, где је

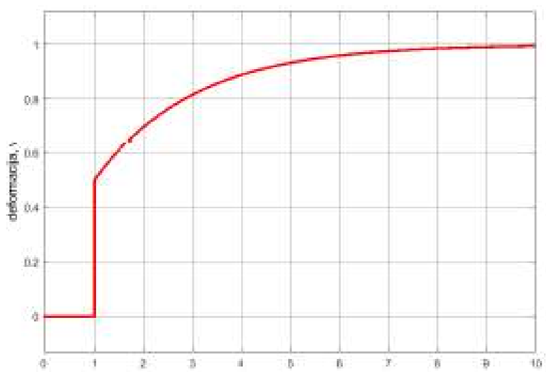
$$T + \tau_\gamma \cdot \dot{T} = \mu_r \cdot (\gamma + \tau_\tau \cdot \dot{\gamma})$$

$$\int T + \tau_\gamma \cdot T = \mu_r \cdot \left(\int \gamma + \tau_\tau \cdot \gamma \right)$$

$$\frac{1}{\tau_\tau} \cdot \int T + \frac{\tau_\gamma}{\tau_\tau} \cdot T = \frac{\mu_r}{\tau_\tau} \cdot \int \gamma + \mu_r \cdot \frac{\tau_\tau}{\tau_\tau} \cdot \gamma$$

$$\gamma = \frac{1}{\tau_\tau \mu_r} \int T + \frac{\tau_\gamma}{\tau_\tau \mu_r} \cdot T - \frac{1}{\tau_\tau} \int \gamma$$

$$\boxed{\gamma = \frac{1}{\tau_\tau \mu_r} \left(\int T + \tau_\gamma \cdot T \right) - \frac{1}{\tau_\tau} \int \gamma}$$



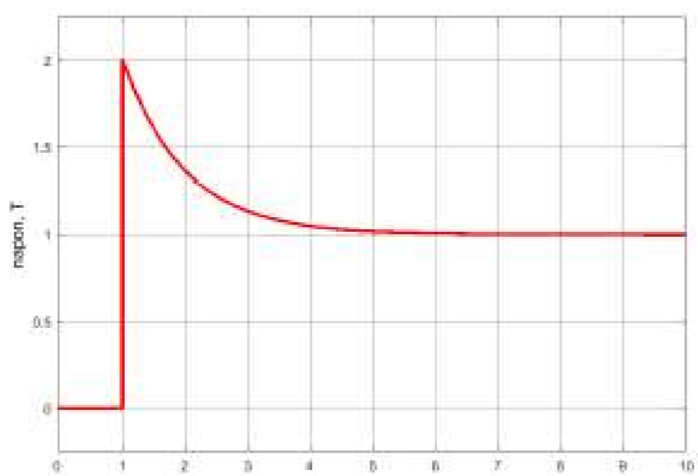
Слика 19: Пузање Зенеровог модела

Функција попустљивости J(t) је сада за Зенеров модел облика:

$$J(t) = \frac{1}{\mu_r} \left[1 - (1 - \frac{\tau_\gamma}{\tau_\tau}) e^{-t/\tau_\tau} \right] H(t)$$

На сличан начин у циљу одређивања $G(t)$ уводи се јединична деформација $\gamma(t)=\gamma_o H(t)$ у конститутивнау једначину решавањем, добија се модул релаксације напона sa Зенеров модел

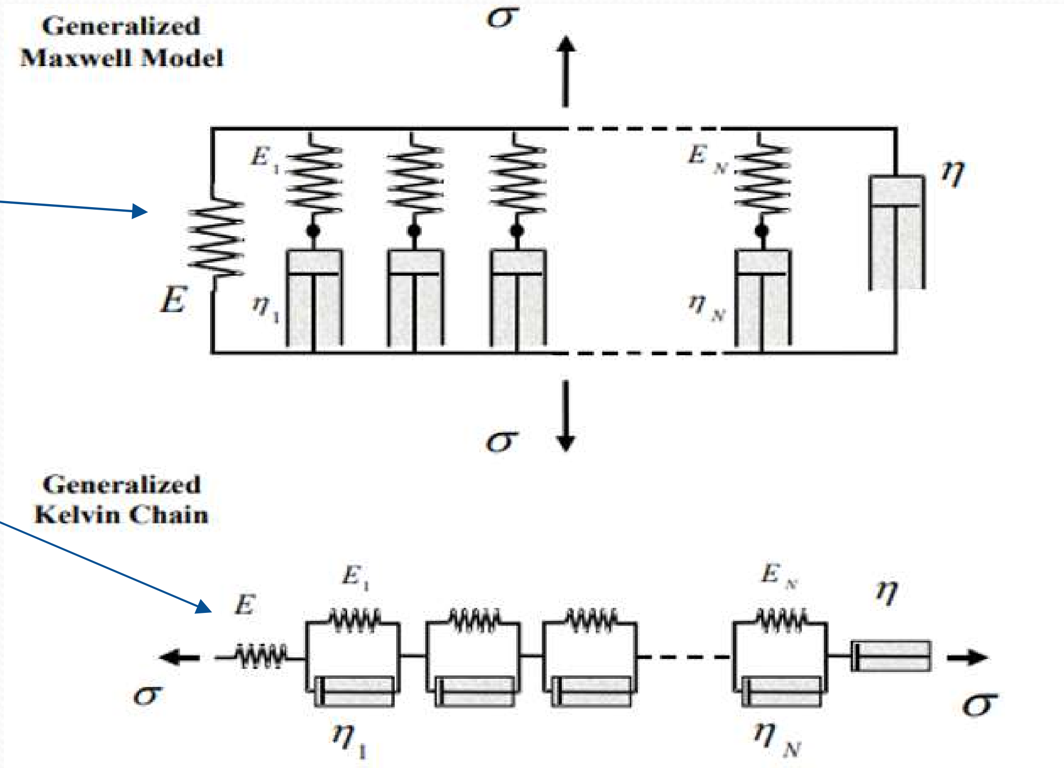
$$G(t)=\frac{1}{\mu_r}\left[1-(1-\frac{\tau_\tau}{\tau_\gamma})e^{-t/\tau_\gamma}\right]H(t)$$



Слика 18: Релаксација напона Зенеровог модела

Уопштени М и КВ модели

- Комплексни вискоеластични реолошки модел ће обично бити у облику **уопштеног Максвеловог модела или уопштеног Келвиновог ланца**



Спектар времена релаксације и спектар времена ретардације

$$T(t)=\gamma_O\left(\mu_r+H(t)\sum_{i=1}^{n}\mu_i e^{-t/\tau_i}\right)$$

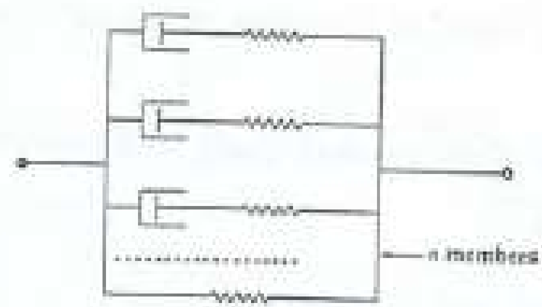
$$T(t)=G_r\gamma_o+\gamma_o\int_0^{\infty}f(\tau)e^{-t/\tau}d\tau$$

Сменом $h(\tau)/\tau=f(\tau)$ $\mu_i \rightarrow f(\tau)d\tau$ → *спектром времена релаксације.*

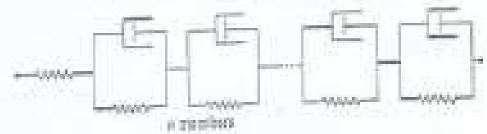
$$G(t)=G_r+\int_{-\infty}^{\infty}h(\tau)e^{-t/\tau}d(\ln\tau)$$

$$J(t)=J_g+\int_{-\infty}^{\infty}l(\tau)\left(1-e^{-t/\tau}\right)d(\ln\tau)$$

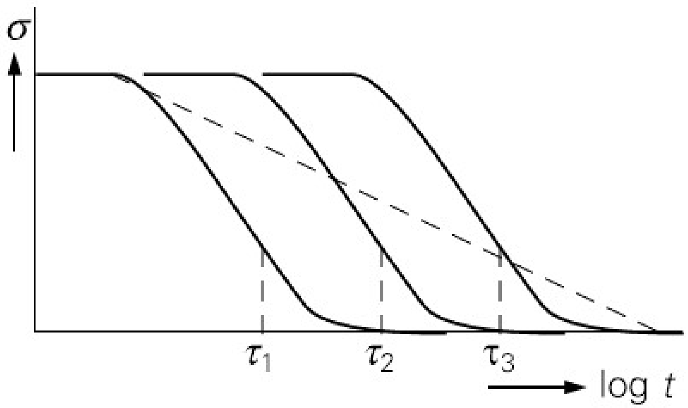
$l(\tau)$ *означен спектар релаксационих времена*

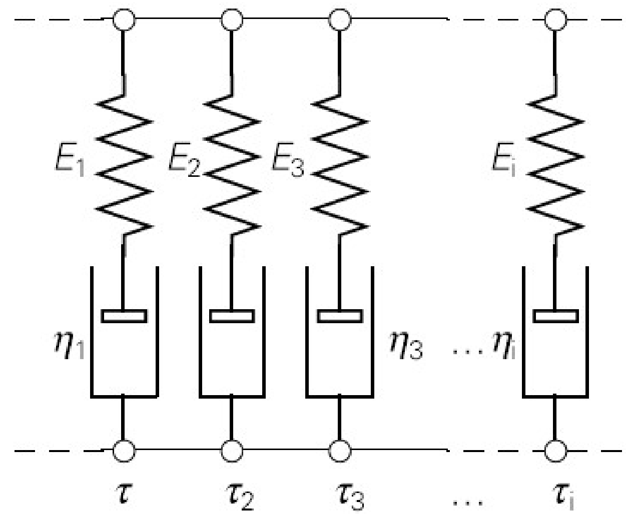


Слика 6.9 Генерализовани Максвелов модел



Слика 6.10 Генерализовани Келвин-Бојтов модел



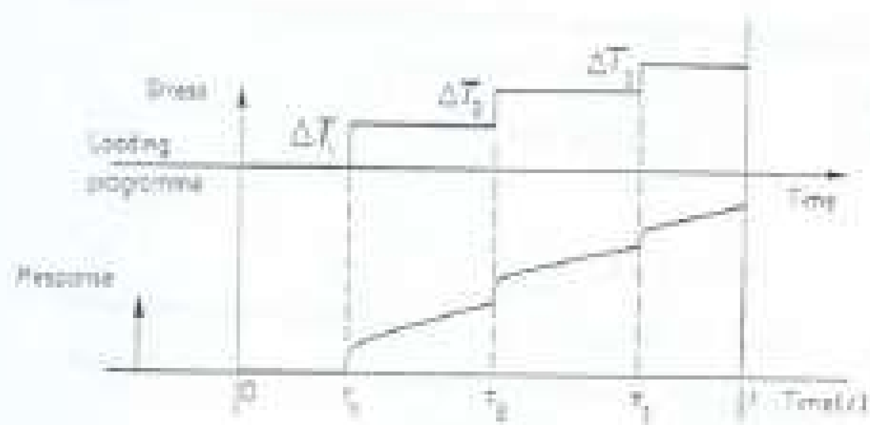


- Функције $h(\tau), l(\tau)$ се могу одредити на бази експерименталних мерења $G(t), J(t)$ и применом Лапласове или Фуријеове трансформације истих.

ОСНОВНИ ПОЈМОВИ ТЕОРИЈЕ ЕЛАСТИЧНОСТИ, БОЛЦМАНОВ ПРИНЦИП СУПЕРПОЗИЦИЈЕ

Болцмн је претпоставио: а) да је пузање фунцкија комплетне историје оптерећивања
б) да сваки корак оптерећења даје независни допринос укупној деформацији и да је укупна деформација се може добити сабирањем појединачних деформација,

a



Слика 6.9 Болцанов принцип суперпозиције

$$\gamma(t) = \sum_{i=1}^{n} J(t-\tau_i)\Delta T_i$$

за $n \to \infty$, $\Delta T \to dT$ тако да се добија

$$\gamma(t) = \int_{-\infty}^{t} J(t-\tau)\frac{dT}{d\tau}d\tau$$

Ако је у тренутку $t_0 = 0$ $T = T_0$ добија се да је

$$\gamma(t) = J(t)T_0 + \int_{0}^{t} J(t-\tau)\frac{dT}{d\tau}d\tau$$

Думахелови интеграли

На сличан начин добија се да је и

$$T(t) = \int_{-\infty}^{t} G(t-\tau)\frac{d\gamma}{d\tau}d\tau$$

тј. за $t_0 = 0$ $\gamma = \gamma_0$

$$T(t) = G(t)\gamma_0 + \int_{0}^{t} G(t-\tau)\frac{d\gamma}{d\tau}d\tau$$

На основу (6.32) за $T_0 = 0$ и $\gamma = const$ уочава се да је $dT / dt = dG / dt$ тј.

$$const = \int_{0} J(t-\tau)\frac{dG}{d\tau}d\tau$$

даје везу између $G(t)$ i $J(t)$.