Проф. др. Михаило Лазаревић

Основни појмови вискоеластичности

Два типа идеалних материјала које инжењери често користе да би описали материјална својства чврстих тела и течности су еластична чврста тела и вискозни флуиди, респективно. Еластична чврста тела имају одређени облик. Овакав облик се може променити деловањем спољних сила и преласком у ново равнотежно стање. Након уклањања ових сила, еластично чврсто тело се одмах враћа у првобитни облик. Рад који изврше спољне силе током деформације је акумулиран у еластичном чврстом телу као потенцијална енергија (мере деформације). Нема губитка ни добитка енергије током овог процеса. Вискозни флуид, са друге стране, нема одређен облик и тече иреверзибилно под дејством спољних (смичућих) сила. А време тока, долази до расипања енергије због вискозног трења у флуиду. Реални материјали имају особине које су између еластичних чврстих тела и вискозних флуида, тј. имају вискоеластичне особине, које зависе од температуре и експериментално изабране временске скале (тј. брзине деформације). Најједноставнији облик вискоеластичног понашања је *линеарно вискоеластично понашање.*

Линеарна вискоеластичност

Линеарни флуиди, познати као Њутнови флуиди, су они чији је напон смицања линеарна функција градијента брзине деформације. За изотропан нестишљив Њутнов флуид напон смицања (вискозни) дат је као

$$T_{ij} = \beta\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right) \qquad (i \neq j = 1,2,3)\,, \tag{6.1}$$

где је v_i брзина, а β вискозност. Узимајући у обзир да је брзина дефинисана као извод померања по времену, $v_i \equiv \frac{\partial u_i}{\partial t} = \dot{u}_i$, $T_{ij} = 2\beta \dot{e}_{ij}$ $(i \neq j = 1,2,3)$ и да је линеарна мера деформације дефинисана као $e_{ij} \equiv \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i}\right)$, следи да је

$$\dot{e}_{ij} \equiv \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \dot{u}_i}{\partial X_j} + \frac{\partial \dot{u}_j}{\partial X_i}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \dot{v}_i}{\partial X_j} + \frac{\partial \dot{v}_j}{\partial X_i}\right) \qquad (i \neq j = 1,2,3) \tag{6.2}$$

Види се да се диференцирање у једначини (6.1) врши по тренутним координатама x_i, док се у једначини (6.2) врши у односу на референтне координате X_i. Када су померања и градијенти померања веома мали, они су апроксимативно једнаки и онда може да се пише да је

$$T_{ij} = 2\beta \dot{e}_{ij} \qquad (i \neq j = 1,2,3)\,. \tag{6.3}$$

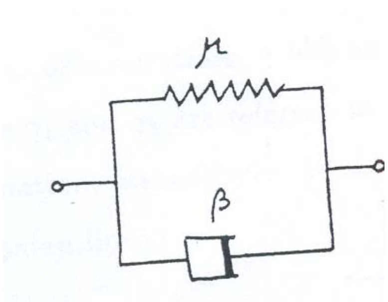
Хук-ов закон описује еластично понашање линеарног еластичног чврстог тела. За просто смицање важи

$$T_{ij} = 2\mu e_{ij} \qquad (i \neq j = 1,2,3)\,. \tag{6.4}$$

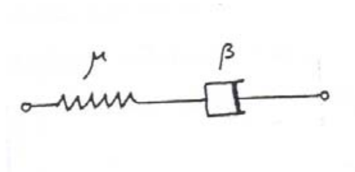
Најједноставнија формулација вискоеластичног понашања претпоставља да се напон вискозног смицања и напон еластичног смицања сабирају, тј. према једначинама (6.3) и (6.4) је

$$T_{ij} = 2\mu e_{ij} + 2\beta \dot{e}_{ij} \qquad (i \neq j = 1,2,3). \tag{6.5}$$

Ово је конститутивна једначина линеарног вискоеластичног понашања. Представља обичну линеарну диференцијалну једначину првог реда (у односу на време). Последица тога је да су ефекти линеарне *вискоеластичности адитивни, тј. сваки инкрементални напон даје независни допринос*. Међутим, битан је тренутак у коме се десила промена. Ово је познато као *Болцман-ов принцип суперпозиције*. Важно је запазити да да би се овај принцип одржао, неопходно је да мере деформације буду мале.



Слика 6.1 Келвин-Војтов модел



Слика 6.2 Максвел-ов модел

Пошто једначина (6.5) описује појединачни модел деформације (просто смицање), може се посматрати као једнодимензионалани проблем. У овом случају је погодно увести угао смицања $\gamma = 2e_{ij}$ у једначину (6.5). Одатле, напон смицања је

$$T = \mu\gamma + \beta\dot{\gamma}\,. \tag{6.6}$$

Концептуално, једначина (6.6) може се добити из одговарајућег параметарског модела, познатог као *Келвин-Војтов модел*. Овај модел садржи паралелно повезану еластичну опругу крутости μ и Њутнов вискозни клип у коме се јавља коефицијент отпора вискозности β (слика 6.1). На бази модела добија се:

$$T = T_{opr} + T_{aps} = \mu\gamma + \beta\dot{\gamma} \tag{6.6a}$$

тј. израз (6.6). Ако се као улазна величина узме $T = T_O H(t)$, где је $H(t)$ Хевисајдова јединична функција добија се линеарна диференцијална једначина првог реда по γ, чијим решавањем се добија

$$\gamma(t) = \frac{T_O H(t)}{\mu}\left(1 - e^{-t/\tau'}\right), \quad \tau' = \beta/\mu \tag{6.6б}$$

Алтернативни приступ је онај који претпоставља да су сви тренутни еластични и вискозни напони једнаки и да је брзина деформације једнака збиру брзина еластичне деформације вискозног тока.

$$\dot{\gamma} = \frac{\dot{T}}{\mu} + \frac{T}{\beta}. \tag{6.7}$$

Концептуално, једначина (6.7) може се добити из одговарајућег параметарског модела познатог као *Maxwелл-ов модел*.,сл..6.2 Овај модел садржи серијски повезану еластичну опругу крутости μ и Њутнов вискозни клип у коме се јавља коефицијент отпора вискозности β.Наиме, из модела се уочава да је

$$\begin{aligned} \gamma &= \gamma_{opr} + \gamma_{aps} = \frac{T}{\mu} + \gamma_{aps} \,/\left(d/dt\right) \Rightarrow \\ \dot{\gamma} &= \frac{\dot{T}}{\mu} + \dot{\gamma}_{aps} = \frac{\dot{T}}{\mu} + \frac{T}{\beta} \end{aligned} \tag{6.7a}$$

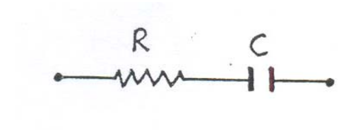
Ако се за улазну величину узме $\gamma = \gamma_O H(t)$ заменом у (6.7а) добија се линеарна диф. једначина по T чијим решавањем се добија:

$$T(t) = \mu\gamma_O e^{-t/\tau}, \; \tau = \beta/\mu \tag{6.7б}$$

Келвин-Којтов модел и Максвелов модел представљају два основна концептуална модела линеарне вискоеластичности.

Електричне аналогије

Келвин-Војтов модел и Maxwелл-ов модел имају одговарајуће аналогије у електротехници. Узимајући у обзир електрично коло састављено од кондензатора капацитета C и отпорника отпора R, са задатим напоном U (слика 6.3). У равнотежи, напон је једнак збиру пада потенцијала кроз отпорника $U_R = Ri$ и пада потенцијала кроз кондензатора $U_C = q/C$, где су i, q јачина струје у колу и наелектрисање кондензатора, респективно. Позивајући се на $i = \dot{q}$ следи да је

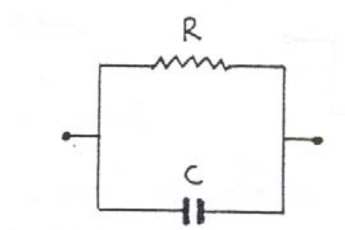


Слика 6.3 Електрични аналогон Келвин-Војтовог модела;

$$U = \frac{1}{C} q + R\dot{q} . \qquad (6.8)$$

Једначина (6.8) је математички идентична са конститутивном једначином Келвин-Воигхт-овог модела, једначина (6.6)

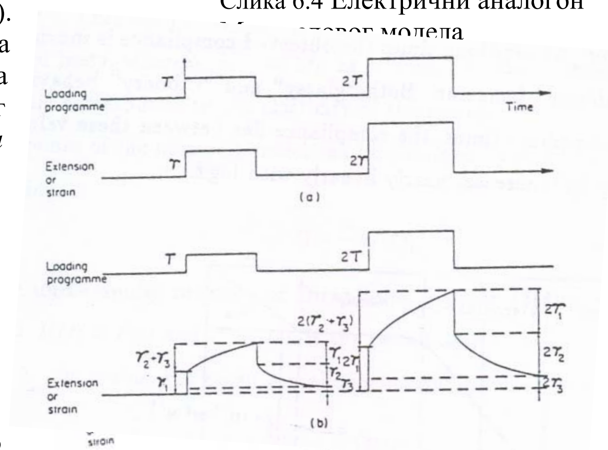
Сада се посматра коло где су кондензатор и отпорник повезани паралелно. Тада је укупна јачина струје једнака суми струје у грани отпорника и струје у грани кондензатора. Пошто су обе гране под истим напоном U, струја у грани отпорника је U/R, а струја у грани кондензатора је $C\dot{U}$. Према томе,



Слика 6.4 Електрични аналогон Махвеловог модела

$$\dot{q} = C\dot{U} + \frac{U}{R} . \qquad (6.9)$$

Једначина (6.9) је математички индентична конститутивној једначини за Maxwел-ов модел, једначина (6.7). Поређењем једначина (6.6) и (6.7) са једначинама (6.8) и (6.9) може се видети да постоји следећа аналогија између механичког модела и електричног модела: *механичка паралелана веза у односу на електричну паралелну везу, T вс.* U*,* γ *вс.* q*,* $\dot{\gamma}$ *вс.* i*,* μ *вс.* $1/C$ *и* β *вс.* R.



Слика 6.5 a) Деформација еластичних чврстих тела b) Деформација линеарних вискоеластичних чврстих тела

Пузање

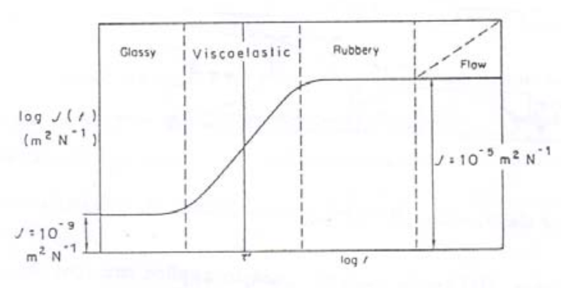
Посматра се еластично чврсто тело на два нивоа (смичућег) напона, T и $2T$. Мера деформације памти историју напона оптерећења и у тачној је пропорционалности са вредностима оптерећења која делују (слика 6.5). Посматра се вискоеластично чврсто тело са истом историјом оптерећења. Уопштено, укупно вискоеластична мера деформације γ представљаће суму 3 појединачна дела γ_1, γ_2 и γ_3 (слика 6.5). Мере деформације γ_1 и γ_2 односе се на *непосредне* еластичне деформације и *закасненe* еластичне деформације, респективно. Мера деформације γ_3 је део деформације која је иста као и деформација Њутнових течности.

Дефинише се *попустљивост при пузању* $J(m)$ као однос мере деформације и *константног напона* који делује

$J(t) = \gamma / T$.

Пошто је мера деформације пропорционална напону који делује, следи да попустљивост при пузању зависи само од времена, а не од величине напона који делује. Другим речима, дати вискоеластични материјал има јединичну попустљивост при пузању у односу на карактеристично време. Узимајући у обзир да је $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3$, из дефиниције попустљивости при пузању следи да је

$$J(t) \equiv \frac{\gamma}{T} = J_1(t) + J_2(t) + J_3(t), \qquad (6.10)$$



Слика 6.6 J(t) попустљивост при пузању у функцији времена t; $\tau^{'}$ представља временску ретардацију

где J_1, J_2 и J_3 одговарају γ_1, γ_2 и γ_3, респективно. Члан J_3 дефинише Њутновски ток. Раздвајајући попустљивост на чланове J_1 и J_2 може се укључити произвољно раздвајање, које изражава чињеницу да се у најкраћем доступном експерименталном времену може посматрати гранична попустљивост J_1. Претпоставља се да постоји реална разлика између тренутних и закаснелих одговора. Слика 6.6 показује промену попустљивости у току времена при константној температури на широкој временској скали за један *идеални аморфни полимер*. За краткотрајне експерименте, посматрана попустљивост је $J_g = 10^{-9} m^2 / N$ (полимер је веома тврд), тј. има „стакласто“ понашање. При веома дугим периодима посматрања попустљивост је много већа $J_g = 10^{-5} m^2 / N$, тј. „гумено“ понашање. И „стакласто“ и „гумено“ понашање су временски независни. У међувремену, попустљивост се налази између ових вредности и независна је у односу на време, тј. $\log J(t)$ расте скоро линеарно са $\log t$.

Оваква разматрање сугеришу да ће посматрано понашање бити зависно од временске скале експеримента у односу на неке основни параметар полимера. Овај параметар је познат као *временска константа* која је у случају пузања названа *ретардација времена* $\tau^{'}$. Треба запазити да је за гуму $\tau^{'}$ веома мало на собној температури, док је за стакласту пластику супротно. Такође, треба запазити да вискоеластични материјали могу имати више од једне временске ретардације. У ствари, прави полимери имају читав спектар временских ретардација.

У терминима Келвин-Воигхт-овог модела, пузање изгледа овако. За корак напона $T = T_0 H(t)$, где је $H(t)$ јединична-степ функција ($H(t) = 0$ ако је m < 0 и $H(t) = 1$ ако је m > 0), једначина (6.6) постаје

$$\dot{\gamma} + \frac{\gamma}{\tau^{'}} = \frac{T_0 H(t)}{\beta}, \qquad (6.11)$$

где је $\tau^{'} \equiv \beta / \mu$ временска ретардација за Келвин-Воигхт-ов модел.

Како је на онсову 6.6б и дефиниције попустљивости при пузању за Келвин-Воигхт-ов модел добија се

$$J(t) = \frac{1}{\mu}(1 - e^{-t/\tau^{'}}) H(t). \qquad (6.12)$$

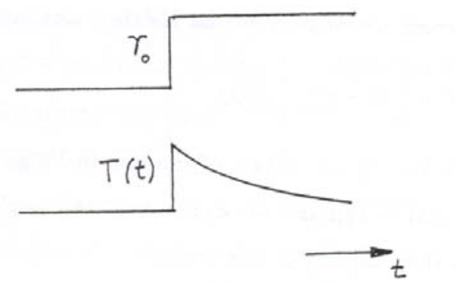
Према једначини (6.12) $J(0) = 0$, тј. „стакласто“ стање Келвин-Воигхт-овог модела одговара крутом телу, док $J(t) \to 1/\mu$ као

$t \to \infty$, тј. "гумено" стање Келвин-Воигхт-овог модела одговара еластичности опруге.
Одговор пузања Махwелл-овог модела може се добити замењујући $T = T_0 H(t)$ у једначину (6.7). Одатле је ,

$$\dot{\gamma} = \frac{T_0}{\mu}\left[\delta(t) + \frac{1}{\tau^{'}} H(t)\right], \tag{6.13}$$

где је $\delta(t)$ Дирак-ова функција ($\delta(t) = 0$ ако је $t \neq 0$) са особином да је $\dot{H}(t) = \delta(t)$ и $\tau^{'} = \beta / \mu$ временска ретардација. Показује се да је попустљивост при пузању за Махwелл-ов модел облика

$$J(t) = \frac{1}{\mu}\left(1 + \frac{t}{\tau^{'}}\right) H(t)\,. \tag{6.14}$$

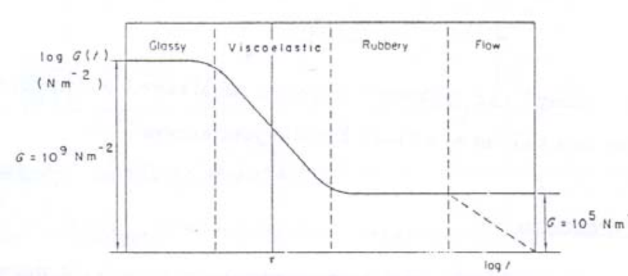


Слика 6.7 Релаксација напона

Релаксација напона
Супротност пузању је релаксација напона где је вискоеластични материјал подвргнут константној мери деформације γ и опадању напона T(t), што је показано на слици 6.7. Дефинишу се *модули релаксације напона* Γ(t) као однос напона и *константне мере деформације* који делују

$$G(t) = T / \gamma\,. \tag{6.15}$$

За линеарне вискоеластичне материјале Γ(t) не зависи од величине мере деформације. Ако се вискозни ток појави током релаксације напона онда напон опада до нуле током довољно дугог периода. Ако нема вискозног тока напон опада на равнотежну вредност различиту од нуле. Вредности модула релаксације у равнотежи познати су као релаксациони (равнотежни) модули G_τ. Почетна вредност модула релаксације односи се на стакласте модуле G_g.



Слика 6.8 Модули релаксације напона Γ(t) у функцији времена t. τ је време релаксације.

Шематски приказ модула релаксације напона у функцији времена, при константној температури, при широкој временској скали за идеалне аморфне полимере приказан је на слици 6.8. Исти региони понашања могу се идентификовати као: „стакласти“, „гумени“ и прелазни регион. Карактеристична временска скала τ позната је као *време релаксације*. Иако су величине истог реда, време релаксације и време ретардације, за исте материјале нису исти. Са слике 6.8 може се видети да је за кратко време испитивања $G_g = 10^9 N/m^2$. За дуго време је $G_\tau = 10^5 N/m^2$. И G_g и G_τ не зависе од времена и користећи дефиниције $G(t)$ и $J(t)$ следи да је $G_g = 1/J_g$ и $G_\tau = 1/J_\tau$. У међувремену модули релаксације су између ових вредности и не зависе од времена, тј. $\log G(t)$ опада линеарно са $\log t$.
За Келвин -Војтов модел релаксација напона је за $\gamma = \gamma_O H(t)$ добија:

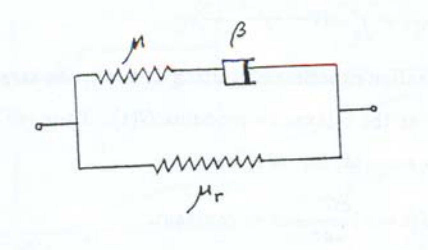
$$T = \mu\gamma_O H(t) + \beta\gamma_O \delta(t) \quad \text{тј.} \tag{6.16}$$

$$G(t) = \mu H(t) + \beta\delta(t)$$

За Максвелов модел полазећи од (6.7б) добија се

$G(t) = \mu e^{-t/\tau}$, $\tau = \beta / \mu$ (6.17)

Модел стандардног линеарног чврстог тела



Слика 6.8 Модел стандардног линеарног чврстог тела

Најједноставнији модел који узима у обзир истовремено и пузање и релаксацију напона јесте модел стандардног линеарног чврстог тела, сл. 6.8. У основи то је Максвелов модел у паралели са другом опругом крутости μ_r, тако да μ, β, μ_r сада дају две временске константе. Нека су у Максвеловом моделу деформације γ_1 и γ_2 које одговарају вискозном абсорберу и опрузи респективно, тј. $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$. С друге стране напон смицања у Максвеловом моделу је

$$T_m = \beta\dot{\gamma}_1 = \mu\gamma_2 \tag{6.18}$$

односно опрузи μ_r, је

$$T_r = \mu_r \gamma \, . \tag{6.19}$$

Важи за паралену спрегу да је:

$$T = T_r + T_m = \mu_r\gamma + \mu\gamma_2 = (\mu_r + \mu)\gamma - \mu\dot{\gamma}_1 \tag{6.20}$$

Ако се формира израз облика:

$$T + \frac{\beta}{\mu}\dot{T} = \ldots = \mu_r\gamma + \beta\left(1 + \frac{\mu_r}{\mu}\right)\dot{\gamma} \tag{6.21}$$

добија се после узимања у обзир претходних релација израз на десној страни, где се после увођења временских константи τ_γ, τ_τ

$$\tau_\gamma = \frac{\beta}{\mu}, \; \tau_\tau = \frac{\beta}{\mu_r}\left(1 + \frac{\mu_r}{\mu}\right) \tag{6.22}$$

добија се *конститутивна једначина стандардног линеарног чврстог тела* облика:

$$T + \tau_\gamma \dot{T} = \mu_r\left(\gamma + \tau_\tau \dot{\gamma}\right) \tag{6.23}$$

Она представља линеарну диференцијалну једначину првог реда. У циљу одређивања $J(t)$ одговарајући улазни напон је сада облика $T_o H(t)$ и заменом у конститутивну једначину добија се:

$$T_0\left(H(t) + \tau_\tau \delta(t)\right) = \mu_r\left(\gamma + \tau_\tau\dot{\gamma}\right) \tag{6.24}$$

где је са $\delta(t)$ означена Диракова делта функција, ($dH(t)/dt = \delta(t)$). Решавањем по $\gamma(t)$ добија се да је $J(t)$

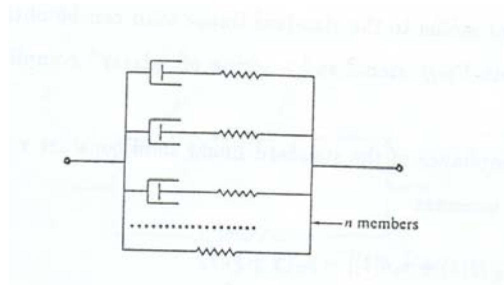
$$J(t) = \frac{1}{\mu_r}\left[1 - (1 - \frac{\tau_\gamma}{\tau_\tau})e^{-t/\tau_\tau}\right]H(t) \tag{6.25}$$

На сличан начин у циљу одређивања $G(t)$ уводи се јединична деформација $\gamma_0 H(t)$ у конститутивнау једначину решавањем, произилази:

$$G(t)=\frac{1}{\mu_r}\left[1-(1-\frac{\tau_\tau}{\tau_\gamma})e^{-t/\tau_\gamma}\right]H(t) \qquad (6.26)$$

Спектар времена релаксације и спектар времена ретардације

Некада је потребно користити и сложеније моделе у крајњем случају серије које се састоје од основног Максвеловог или Келвин-Војтовог модела .Модел је познат као *генерализовани Максвелов модел,* са n Максвелових елемената у паралелу са опругом μ_r. Показује се да се напон релаксира у овом случају:



Слика 6.9 Генерализовани Максвелов модел

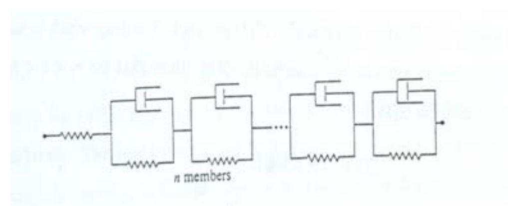
$$T(t)=\gamma_O\left(\mu_r+H(t)\sum_{i=1}^{n}\mu_i e^{-t/\tau_i}\right) \qquad (6.27)$$

где су μ_i,τ_i константе опруге и времена релаксације респективно i-тог Максвеловог елемента.За $n\to\infty$ претходна једначина постаје:

$$T(t)=G_r\gamma_o+\gamma_o\int_0^\infty f(\tau)e^{-t/\tau}d\tau \qquad (6.28)$$

где су $\mu_i\to f(\tau)d\tau$ замењени са одговарајућом функцијом тј *спектром времена релаксације.* Сменом $h(\tau)/\tau=f(\tau)$ могуће је функцију релаксације напона приказати као:

$$G(t)=G_r+\int_{-\infty}^{\infty}h(\tau)e^{-t/\tau}d(\ln\tau) \qquad (6.29)$$



Слика 6.10 Генерализовани Келвин-Војтов модел

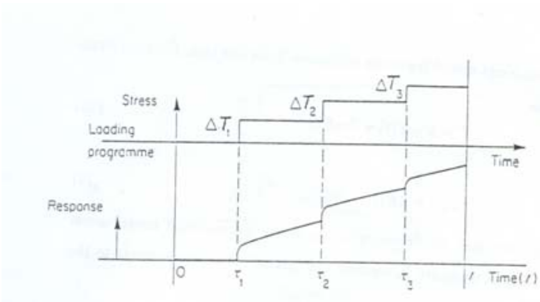
На сличан начин може се одредити и попустљивост на пузање за *генерализовани Келвин-Војтов модел* , сл. 6.10 тј.,

$$J(t)=J_g+\int_{-\infty}^{\infty}l(\tau)\left(1-e^{-t/\tau}\right)d(\ln\tau) \qquad (6.30)$$

где је са $l(\tau)$ *означен спектар релаксационих времена.*Ф-је $h(\tau),l(\tau)$ се могу одредити на бази експерименталних мерења $G(t),J(t)$ и применом Лапласове или Фуријеове трансформације истих.

Болцманов принцип суперпозиције, дефиниције модула релаксације и попустљивости при пузању

Болцамн је претпоставио: а) да је пузање фунцкија комплетне историје оптерећивања
б) да сваки корак оптерећења даје независни допринос укупној деформацији и да је укупна деформација се може добити сабирањем појединачних деформација, види сл.6.9



Слика 6.9 Болцанов принцип суперпозиције

$$\gamma(t)=\sum_{i=1}^{n} J(t-\tau_i)\Delta T_i \qquad (6.31)$$

за $n \to \infty$, $\Delta T \to dT$ тако да се добија

$$\gamma(t)=\int_{-\infty}^{t} J(t-\tau)\frac{dT}{d\tau}d\tau \qquad (6.32)$$

Ако је у тренутку $t_o=0$ $T=T_0$ добија се да је

$$\gamma(t)=J(t)T_0+\int_{0}^{t} J(t-\tau)\frac{dT}{d\tau}d\tau \qquad (6.33)$$

На сличан начин добија се да је и

$$T(t)=\int_{-\infty}^{t} G(t-\tau)\frac{d\gamma}{d\tau}d\tau \qquad (6.34)$$

тј. за $t_o=0$ $\gamma=\gamma_0$

$$T(t)=G(t)\gamma_0+\int_{0}^{t} G(t-\tau)\frac{d\gamma}{d\tau}d\tau \qquad (6.35)$$

Претходни интеграли су познати као Думахелови интеграли или наследни интеграли (hereditary)
Веза између G, J
На основу (6.32) за $T_o=0$ и $\gamma=const$ уочава се да је $dT/dt=dG/dt$ тј.

$$const=\int_{0}^{t} J(t-\tau)\frac{dG}{d\tau}d\tau \qquad (6.36)$$

даје везу између $G(t)\ i\ J(t)$.

Питања:

1. Дефинисати Келвин-Војтов модел,особине
2. Дефинисати Максвелов модел,особине.
3. Дефинисати стандардни линеарни модел чврстог тела,особине
4. Дати одговарајуће електричне аналогоне претходних модела.

5. Дефинисати попустљивост при пузању $J(t)$, на примеру полимера илустровати особености дате функције
6. Дефинисати релаксацију напона $G(t)$, на примеру полимера илустровати особености дате функције
7. Објаснити спектар времена релаксације и спектар времена ретардације
8. Дефинисати Болцманов принцип суперпозиције

Задатак 1

Показати да је попустљивост при пузању за Келвин-Воигхт-ов модел

$$J(t) = \frac{1}{\mu}(1 - e^{-t/\tau'})H(t).$$

Задатак 2

Показати да је попустљивост при пузању за Maxwелл-ов модел

$$J(t) = \frac{1}{\mu}\left(1 + \frac{t}{\tau'}\right)H(t).$$

Продискутовати који су „стаклени" и „гумени" одговори на Maxwелл-ово тело. Да ли се Maxwелл-ов модел понаша као чврсто тело или као течност? Објаснити одговор.

Задатак 3

Показати да је релаксација напона за Максвелов модел

$G(t) = \mu e^{-t/\tau}$, $\tau = \beta / \mu$

Задатак4 Показати да је $J(t)$ у случају линеарног стандардног модела чврстог тела:

$$J(t) = \frac{1}{\mu_r}\left[1 - (1 - \frac{\tau_\gamma}{\tau_\tau})e^{-t/\tau_\tau}\right]H(t)$$

Задатак5 Показати да је $G(t)$ у случају линеарног стандардног модела чврстог тела, облика

$$G(t) = \frac{1}{\mu_r}\left[1 - (1 - \frac{\tau_\tau}{\tau_\gamma})e^{-t/\tau_\gamma}\right]H(t)$$