Универзитет у Београду

Машински факултет

Биомеханика ткива и органа

Решени задаци - Други део

Београд, 2019.

Задатак 1 Посматрани материјал има вискоеластично понашање које се може представити Максвеловим моделом, са коефицијентом еластичности опруге $\mu = 50\,\mathrm{MPa}$ и вискозношћу пригушивача $\beta = 600\,\mathrm{MPas}$. Колико је време релаксације? Уколико се материјал у почетном тренутку затегне тако да деформација буде једнака $\nu = 0,2$, колика ће бити вредност напона након $6\,\mathrm{s}$? Колико времена је потребно да напон опадне на 10% почетне вредности?

Решење:

Време релаксације је:

$$\tau = \frac{\beta}{\mu} = \frac{600}{50} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\tau = 12\,\mathrm{s}}$$

С обзиром на то да је конститутивна једначина Максвеловог модела:

$$\dot{T} + \frac{\mu}{\beta}T = \mu\dot{\nu}$$

када је деформација константна важи:

$$\dot{T} + \frac{\mu}{\beta}T = 0$$

Решење ове диференцијалне једначине је:

$$\lambda + \frac{\mu}{\beta} = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = -\frac{\mu}{\beta}$$

$$T = C\mathrm{e}^{-\frac{\mu}{\beta}t}$$

Узимајући у обзир почетни услов:

$$T(0) = T_0 = C$$

Узимајући у обзир добијену вредност времена релаксације, добија се:

$$T = T_0\mathrm{e}^{-\frac{t}{12}}$$

Пошто се у почетном тренутку деформише само опруга:

$$T_0 = \mu\nu_0 = 50 \cdot 0,2 = 10\,\mathrm{MPa}$$

Дакле:

$$T = 10\mathrm{e}^{-\frac{t}{12}}$$

Након 6 секунди, вредност напона ће бити:

$$T(6) = 10\mathrm{e}^{-\frac{6}{12}}$$

$$\boxed{T(6) = 6,07\,\mathrm{MPa}}$$

Време које је потребно да би напон опао на 10% почетне вредности је:

$$0,1 \cdot 10 = 10\mathrm{e}^{-\frac{t}{12}}$$

$$\boxed{t = 27,63\,\mathrm{s}}$$

Задатак 2 Приликом мерења релаксације напона, епрувета материјала дужине 10 cm је у почетном тренутку затегнута тако да напон достигне вредност $T = 200\,\mathrm{MPa}$. Након 2 минута, напон је опао до вредности од 160 MPa. Претпоставити да се понашање материјала може описати Максвеловим моделом. Колико је време релаксације? Уколико је напон у почетном тренутку достигнут при екстензији од 16 mm, израчунати вискозност пригушивача, као и вредност модула релаксације након 3 минута.

Решење:

С обзиром на то да је вредност деформације константна, важи (као и у Задатку 4):

$$T = T_0\mathrm{e}^{-\frac{\mu}{\beta}t} = T_0\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}$$

Сада се може израчунати време релаксације:

$$160 = 200\mathrm{e}^{-\frac{120}{\tau}}$$

$$\boxed{\tau = 538\,\mathrm{s}}$$

Деформација износи:

$$\nu = \frac{16}{100} = 0,16$$

С обзиром на то да је деформација константна, као и да у почетном тренутку у потпуности потиче од опруге (због кашњења деформације пригушивача), важи:

$$T_0 = \mu\nu_0 \quad \Rightarrow \quad \mu = \frac{T_0}{\nu_0} = \frac{200}{0,16} = 1250\,\mathrm{MPa}$$

Пошто је познато време релаксације, може се израшунати вискозност пригушивача:

$$\beta = \mu\tau = 1250 \cdot 538$$

$$\boxed{\beta = 672500\,\mathrm{MPas}}$$

Модуо релаксације након три минута је:

$$E^*(180) = \frac{T(180)}{\nu_0} = \frac{T_0 \mathrm{e}^{-\frac{180}{\tau}}}{\nu_0}$$

$$E^*(180) = \frac{200\mathrm{e}^{-\frac{180}{538}}}{0,16}$$

$$\boxed{E^*(180) = 894,4\,\mathrm{MPa}}$$

Задатак 3 Деформација при пузању Келвин-Војтовог модела вискоеластичног понашања материјала је дефинисана на следећи начин:

$$\nu(t) = \frac{T_0}{\mu}\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

где је T_0 - константни напон којим је материјал оптерећен, μ - модуо еластичности опруге, а $\tau = \frac{\beta}{\mu}$ - време ретардације, где је β вискозност пригушивача. У току експеримента, материјал модула еластичности $\mu = 600\,\mathrm{MPa}$ првобитно је оптерећен напоном T_0. Пола сата касније, вредност деформације је била $0,111$, а још сат времена касније се повећала на $0,264$. Колика ће бити вредност деформације три сата након почетка деловања оптерећења? Колико времена је потребно да деформација достигне вредност $0,001$?

Решење:

С обзиром на то да у току пола сата протекне 1800 секунди, а након сат и по времена три пута више:

$$0,111 = \frac{T_0}{600}\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{1800}{\tau}}\right)$$

$$0,264 = \frac{T_0}{600}\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{5400}{\tau}}\right)$$

Добијен је систем од две алгебарске једначине са две непознате величине чијим се решавањем добија време ретардације:

$$\frac{0,111}{0,264} = \frac{\frac{T_0}{600}\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{1800}{\tau}}\right)}{\frac{T_0}{600}\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{5400}{\tau}}\right)}$$

$$0,42 = \frac{1 - \mathrm{e}^{-\frac{1800}{\tau}}}{1 - \mathrm{e}^{-\frac{5400}{\tau}}}$$

$$\tau \approx 7128\,\mathrm{s}$$

Помоћу овог резултата може се добити вредност константног напона:

$$0,111 = \frac{T_0}{600}\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{1800}{7128}}\right)$$

$$T_0 = 297,2\,\mathrm{MPa}$$

Деформација након три сата (10800 секунди) је:

$$\nu(10800) = \frac{297,2}{600}\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{10800}{7128}}\right)$$

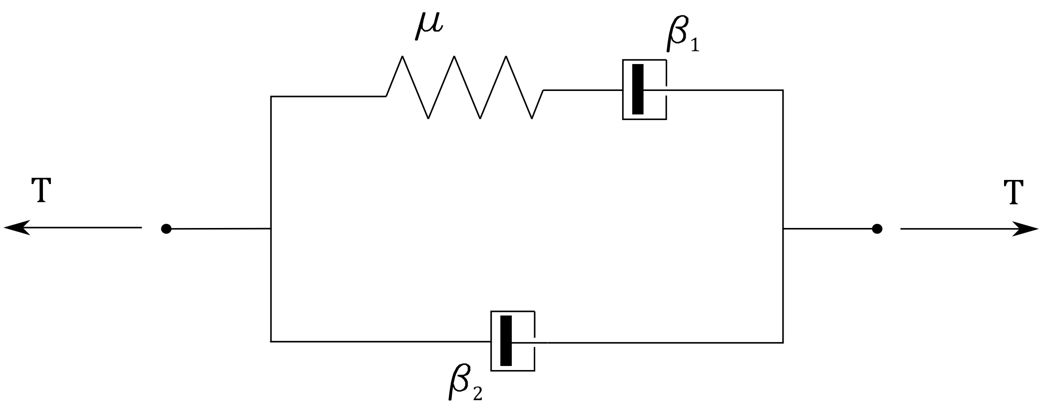
$$\nu(10800) \approx 0,39$$

Потребно време да би деформација достигла вредност $0,001$ је:

$$0,001 = \frac{297,2}{600}\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{t}{7128}}\right)$$

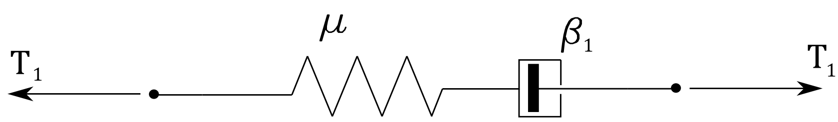
$$t \approx 14,4\,\mathrm{s}$$

Задатак 4 Наћи конститутивну једначину вискоеластичног модела чврстог тела приказаног на Слици 1. Након тога, одредити попустљивост при пузању $J(t)$, као и модуо релаксације напона $\sigma(t)$. Познато је да је крутост опруге μ, а коефицијенти отпора (вискозности) β_1 и β_2.



Слика 1

Решење:



Слика 2

Део модела приказан на Сл. 2 може се описати Максвеловим вискоеластичним моделом, тј. укупна деформација може се разложити на следећи начин:

$$\nu = \nu_{opr} + \nu_v$$

Тј. у комплексном домену:

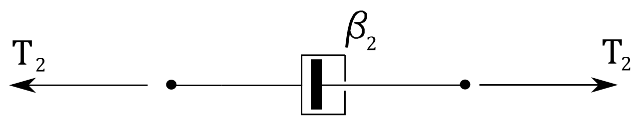
$$\nu(s) = \nu_{opr}(s) + \nu_v(s) \tag{1}$$

Према Максвеловом моделу, еластични и вискозни напон морају бити једнаки:

$$T_1 = \mu\nu_{opr} = \beta_1\dot{\nu}_v$$

Лапласовом траснформацијом добија се:

$$T_1(s) = \mu\nu_{opr}(s) = \beta_1 \cdot s\nu_v(s) \tag{2}$$



Слика 3

Вискозни напон који одговара делу модела приказаном на Сл. 3 је:

$$T_2 = \beta_2 \cdot \dot{\nu}$$

$$T_2(s) = \beta_2 \cdot s\nu(s) \tag{3}$$

Према Келвин-Војтовом моделу, укупни напон једнак је збиру појдиних:

$$T = T_1 + T_2$$

$$T(s) = T_1(s) + T_2(s)$$

Конститутивна једначина до које је потребно доћи, представља везу између T и ν:

$$T(s) = T_1(s) + T_2(s) = \mu\nu_{opr}(s) + \beta_2 s\nu(s)$$

Из једначине (1) следи:

$$\nu_{opr}(s) = \nu(s) - \nu_v(s)$$

Дакле:

$$T(s) = \mu[\nu(s) - \nu_v(s)] + \beta_2 s\nu(s)$$

Потребно је изразити деформацију клипа у функцији укупне деформације. Из једначина (1) и (2) следи:

$$\nu = \nu_{opr} + \nu_v = \frac{\beta_1 s\nu_v(s)}{\mu} + \nu_v(s) = \left(1 + \frac{\beta_1}{\mu}s\right)\nu_v(s)$$

$$\nu_v(s) = \frac{\nu(s)}{1 + \frac{\beta_1}{\mu}s}$$

Коначно:

$$T(s) = \mu\left(\nu(s) - \frac{\nu(s)}{1 + \frac{\beta_1}{\mu}s}\right) + \beta_2 s\nu(s)$$

Погодно је добијени израз трансформисати, како би инверзна Лапласова трансформација била олакшана:

$$T(s) = \nu(s)\left(\mu - \frac{\mu}{1 + \frac{\beta_1}{\mu}s} + \beta_2 s\right) \bigg/ \cdot \left(1 + \frac{\beta_1}{\mu}s\right)$$

$$\left(1 + \frac{\beta_1}{\mu}s\right)T(s) = \nu(s)\left[\mu\left(1 + \frac{\beta_1}{\mu}s\right) - \mu + \left(1 + \frac{\beta_1}{\mu}s\right)\beta_2 s\right]$$

$$\left(1 + \frac{\beta_1}{\mu}s\right)T(s) = \nu(s)\left[\beta_1 s + \left(1 + \frac{\beta_1}{\mu}s\right)\beta_2 s\right]$$

$$\left(1 + \frac{\beta_1}{\mu}s\right)T(s) = s\nu(s)\left[\beta_1 + \left(1 + \frac{\beta_1}{\mu}s\right)\beta_2\right] \bigg/ \cdot \frac{\mu}{\beta_1}$$

$$\left(\frac{\mu}{\beta_1} + s\right)T(s) = s\nu(s)\left[\mu + \beta_2\left(\frac{\mu}{\beta_1} + s\right)\right] = s\nu(s)\left(\mu + \beta_2\frac{\mu}{\beta_1} + \beta_2 s\right)$$

$$\left(\frac{\mu}{\beta_1} + s\right)T(s) = s\beta_2\nu(s)\left(\frac{\mu}{\beta_1} + \frac{\mu}{\beta_2} + s\right)$$

Уводе се следеће ознаке:

$$\tau_1 = \frac{\beta_1}{\mu}$$

$$\tau_2 = \frac{\beta_2}{\mu}$$

Дакле:

$$\left(\frac{1}{\tau_1} + s\right) T(s) = s\beta_2\nu(s)\left(\frac{1}{\tau_1} + \frac{1}{\tau_2} + s\right)$$

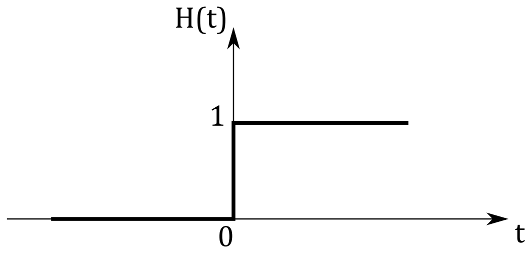
Ова једначина представља конститутивну једначину у комплексном домену. У временском домену добија се линеарна диференцијална једначина другог реда:

$$\boxed{\dot{T} + \frac{T}{\tau_1} = \beta_2\dot{\nu}\left(\frac{1}{\tau_1} + \frac{1}{\tau_2}\right) + \beta_2\ddot{\nu}}$$

Попустљивост при пузању (creep compliance)

$$J(t) = \frac{\nu(t)}{T}, \quad T = \text{const.}$$

Нека је $T = T_0H(t)$, где је $H(t)$ Хевисајдова функција:



Слика 4: Хевисајдова функција

Лапласовом трансформацијом добија се:

$$T(s) = \frac{T_0}{s}$$

Када се употреби добијена конститутивна једначина:

$$\left(s + \frac{1}{\tau_1}\right)\frac{T_0}{s} = \beta_2 s\nu(s)\left(\frac{\tau_1 + \tau_2}{\tau_1\tau_2} + s\right) \Big/ \cdot s$$

Да би се смањила гломазност израза, погодно је увести следећу смену:

$$\tau_e^{-1} = \frac{\tau_1 + \tau_2}{\tau_1 \tau_2}$$

$$\left(s + \frac{1}{\tau_1}\right) T_0 = \beta_2 s^2 \nu(s) \left(s + \tau_e^{-1}\right)$$

$$\nu(s) = \frac{\left(s + \frac{1}{\tau_1}\right) T_0}{\beta_2 s^2 \left(s + \tau_e^{-1}\right)}$$

$$J(s) = \frac{s + \frac{1}{\tau_1}}{\beta_2 s^2 \left(s + \tau_e^{-1}\right)}$$

Добијени полином могуће је упростити, ради вршења инверзне Лапласове трансформације:

$$\frac{s + \frac{1}{\tau_1}}{s^2 \left(s + \frac{1}{\tau_e}\right)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s + \frac{1}{\tau_e}} = \frac{As^2 + A\frac{s}{\tau_e} + Bs + \frac{B}{\tau_e} + Cs^2}{s^2 \left(s + \frac{1}{\tau_e}\right)}$$

$$(A + C)s^2 + \left(\frac{A}{\tau_e} + B\right) s + \frac{B}{\tau_e} = s + \frac{1}{\tau_1}$$

$$\frac{B}{\tau_e} = \frac{1}{\tau_1} \quad \Rightarrow \quad B = \frac{\tau_e}{\tau_1}$$

$$\frac{A}{\tau_e} + B = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{A}{\tau_e} = 1 - B = 1 - \frac{\tau_e}{\tau_1} \quad \Rightarrow \quad A = \tau_e \left(1 - \frac{\tau_e}{\tau_1}\right)$$

$$A + C = 0 \quad \Rightarrow \quad C = -A = \tau_e \left(\frac{\tau_e}{\tau_1} - 1\right)$$

$$J(s) = \frac{1}{\beta_2} \left(\frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s + \frac{1}{\tau_e}}\right)$$

Инверзном Лапласовом трансформацијом добија се:

$$J(t) = \frac{1}{\beta_2} \left(A + Bt + C\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau_e}}\right) H(t)$$

$$J(t) = \frac{1}{\beta_2} \left(\tau_e \left(1 - \frac{\tau_e}{\tau_1}\right) + \frac{\tau_e}{\tau_1} t + \tau_e \left(\frac{\tau_e}{\tau_1} - 1\right) \mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau_e}}\right) H(t)$$

$$\boxed{J(t) = \frac{\tau_e}{\beta_2 \tau_1} t + \frac{\tau_e}{\beta_2} \left(1 - \frac{\tau_e}{\tau_1}\right) \cdot \left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau_e}}\right)}$$

Модуо релаксације (relaxation modulus)

$$E^*(t) = \frac{T(t)}{\nu}, \quad \nu = \text{const.}$$

Тj. у комплексном домену:

$$E^*(s) = \frac{T(s)}{\nu_0}$$

Сада је $\nu = \nu_0 H(t)$, дакле:

$$\nu(s) = \frac{\nu_0}{s}$$

Из конститутивне једначине следи:

$$\left(s + \frac{1}{\tau_1}\right) T(s) = \beta_2 s \frac{\nu_0}{s} \left(\frac{1}{\tau_e} + s\right)$$

$$\left(s + \frac{1}{\tau_1}\right) T(s) = \beta_2 \nu_0 \left(\frac{1}{\tau_e} + s\right) / : \nu_0$$

$$\left(s + \frac{1}{\tau_1}\right) E^*(s) = \beta_2 \left(\frac{1}{\tau_e} + s\right)$$

$$E^*(s) = \beta_2 \frac{s + \frac{1}{\tau_e}}{s + \frac{1}{\tau_1}}$$

Пошто је:

$$\frac{1}{\tau_e} = \frac{1}{\tau_1} + \frac{1}{\tau_2}$$

Следи:

$$E^*(s) = \beta_2 \frac{s + \frac{1}{\tau_1} + \frac{1}{\tau_2}}{s + \frac{1}{\tau_1}}$$

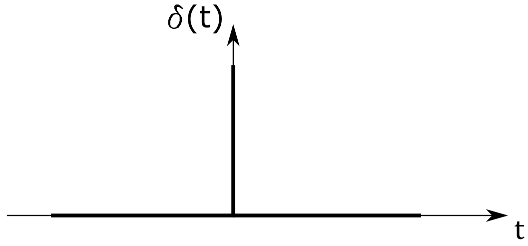
$$E^*(s) = \beta_2 \left(1 + \frac{\frac{1}{\tau_2}}{s + \frac{1}{\tau_1}}\right)$$

Инверзном Лапласовом трансформацијом добија се:

$$\boxed{E^*(t) = \beta_2 \delta(t) + \frac{\beta_2}{\tau_2} \mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau_1}} H(t)}$$

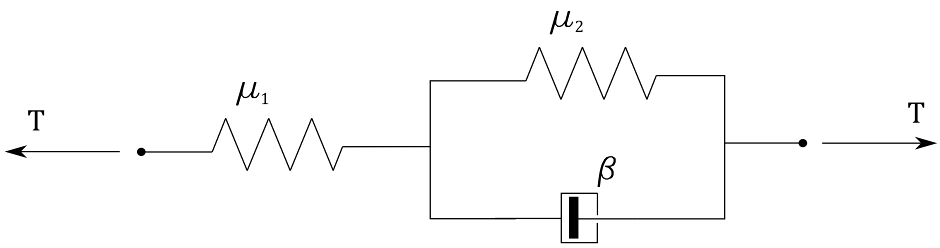
где је $\delta(t)$ Диракова (делта) функција, које представља први извод Хевисајдове функције:

$$\delta(t) = \frac{\mathrm{d}H(t)}{\mathrm{d}t}$$



Слика 5

Задатак 5 Одредити конститутивну једначину модела приказаног на Сл. 6, а затим одредити функцију деформисања у случају када је напон константан. Колико ће бити време ретардације ако оптерећење у почетку изазива деформацију $\nu_0 = 0,002$, док је након $1000\,\mathrm{s}$ деформација $\nu_1 = 0,004$, а после веома много времена $\nu_2 = 0,006$?



Слика 6

<u>Решење:</u>

За овај модел важи:

$$\nu = \nu_1 + \nu_2$$

$$T = T_1 = T_2$$

А напони износе:

$$T_1 = \mu_1 \nu_1 \quad \Rightarrow \quad \nu_1 = \frac{T}{\mu_1}$$

$$T_2 = \mu_2 \nu_2 + \beta \dot{\nu_2} \quad \Rightarrow \quad \nu_2 = \frac{T}{\mu_2} - \frac{\beta}{\mu_2} \dot{\nu_2}$$

Дакле:

$$\nu = \frac{T}{\mu_1} + \frac{T}{\mu_2} - \frac{\beta}{\mu_2} \dot{\nu_2}$$

Следећим трансформацијама долази се до конститутивне једначине:

$$\dot{\nu}_2 = \dot{\nu} - \dot{\nu}_1 = \dot{\nu} - \frac{\dot{T}}{\mu_1}$$

$$\nu = \frac{T}{\mu_1} + \frac{T}{\mu_2} - \frac{\beta}{\mu_2}\left(\dot{\nu} - \frac{\dot{T}}{\mu_1}\right) \Big/ \cdot \frac{\mu_1 \mu_2}{\beta}$$

$$\boxed{\dot{T} + \frac{\mu_1 + \mu_2}{\beta} T = \mu_1 \dot{\nu} + \frac{\mu_1 \mu_2}{\beta} \nu}$$

Уколико је напон константан:

$$T = \text{const.} \quad \Rightarrow \quad \dot{T} = 0$$

$$\mu_1 \dot{\nu} + \frac{\mu_1 \mu_2}{\beta} \nu = \frac{\mu_1 + \mu_2}{\beta} T \Big/ \cdot \frac{1}{\mu_1}$$

$$\dot{\nu} + \frac{\mu_2}{\beta} \nu = \frac{\mu_1 + \mu_2}{\mu_1 \beta} T$$

Добијена је диференцијална једначина чијим решавањем можемо одредити функцију деформисања:

$$\lambda + \frac{\mu_2}{\beta} = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = -\frac{\mu_2}{\beta}$$

Те је хомогено решење:

$$\nu_h = C \mathrm{e}^{-\frac{\mu_2}{\beta} t}$$

А партикуларно решење се претпоставља као константа:

$$\nu_p = A$$

Следи:

$$\frac{\mu_2}{\beta} A = \frac{\mu_1 + \mu_2}{\mu_1 \beta} T \quad \Rightarrow \quad A = \frac{\mu_1 + \mu_2}{\mu_1 \mu_2} T$$

$$\nu = \nu_h + \nu_p = C \mathrm{e}^{-\frac{\mu_2}{\beta} t} + \frac{\mu_1 + \mu_2}{\mu_1 \mu_2} T$$

Константу C одређујемо из почетних услова. У почетном тренутку деформација потиче само од усамљене опруге, с обзиром на то да на другом делу модела долази до пригушења, те је:

$$\nu(0) = \frac{T}{\mu_1}$$

$$\frac{T}{\mu_1} = C\mathrm{e}^{-\frac{\mu_2}{\beta}0} + \frac{\mu_1+\mu_2}{\mu_1\mu_2}T$$

$$\frac{T}{\mu_1} = C + \frac{\mu_1+\mu_2}{\mu_1\mu_2}T$$

$$C = \frac{T}{\mu_1} - \frac{\mu_1+\mu_2}{\mu_1\mu_2}T$$

$$C = -\frac{\mu_1}{\mu_1\mu_2}T$$

Коначно, решење диференцијалне једначине је:

$$\nu = -\frac{\mu_1}{\mu_1\mu_2}T\mathrm{e}^{-\frac{\mu_2}{\beta}t} + \frac{\mu_1+\mu_2}{\mu_1\mu_2}T$$

Tj.

$$\boxed{\nu = \frac{T}{\mu_2}\left(1 + \frac{\mu_2}{\mu_1} - \mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}\right)}$$

где је $\tau = \frac{\beta}{\mu_2}$ време релаксације. Према задатим подацима важи:

$$\nu_0 = \nu(0) = 0,002 = \frac{T}{\mu_2}\left(1 + \frac{\mu_2}{\mu_1} - \mathrm{e}^{-\frac{0}{\tau}}\right) = \frac{T}{\mu_2}\left(1 + \frac{\mu_2}{\mu_1} - 1\right) = \frac{T}{\mu_1}$$

$$\nu(\infty) = 0,006 = \frac{T}{\mu_2}\left(1 + \frac{\mu_2}{\mu_1} - \mathrm{e}^{-\frac{\infty}{\tau}}\right) = \frac{T}{\mu_2}\left(1 + \frac{\mu_2}{\mu_1} - 0\right) = \frac{T}{\mu_2} + \frac{T}{\mu_1}$$

$$\frac{T}{\mu_2} = 0,006 - 0,002 = 0,004$$

$$\nu(1000) = 0,004 = \frac{T}{\mu_2}\left(1 + \frac{\mu_2}{\mu_1} - \mathrm{e}^{-\frac{1000}{\tau}}\right) = \frac{T}{\mu_2} + \frac{T}{\mu_1} - \frac{T}{\mu_2}\mathrm{e}^{-\frac{1000}{\tau}}$$

$$0,004 = 0,004 + 0,002 - 0,004\mathrm{e}^{-\frac{1000}{\tau}}$$

$$\mathrm{e}^{-\frac{1000}{\tau}} = \frac{0,002}{0,004} = 0,5$$

$$-\frac{1000}{\tau} = \ln(0,5)$$

$$\boxed{\tau \approx 1443\,\mathrm{s}}$$

Задатак 6 Посматра се греда оптерећена константном аксијалном силом. Греда је сачињена од полимера, чије понашање је описано Зенеровим вискоеластичним моделом. Функција релаксације при једноосном напрезању посматраног материјала добијена је експериментално:

$$E(t) = k_1 + k_2 \mathrm{e}^{-\frac{t}{T}}$$

где су: $k_1 = 1000$, $k_2 = 9000$ и време релаксације при једноосном напрезању $T = 1$. Узима се да се материјал понаша еластично при запреминској деформацији и да је коефицијент стишљивости $K = 100000$. Почетни и гранични услови су, према томе, дати на следећи начин:

- модуо еластичности $E(0) = k_1 + k_2 = 10000$
- Поасонов коефицијент $\nu(0) = \frac{3K - k_1 - k_2}{6K} = 0,4833$
- почетни модуо смицања $G(0) = \frac{3K(k_1+k_2)}{9K-(k_1+k_2)} = 3370,7865$
- крајњи модуо смицања $G(\infty) = \frac{3Kk_1}{9K-k_1} = 333,7041$

Потребно је одредити модуо релаксације при смицању $G^*(t)$.

Решење:

Важи следећа веза између модула релаксације:

$$G^* = \frac{3KE^*}{9K - E^*}$$

За материјал описан Зенеровим моделом важи:

$$E^*(t) = \left(\frac{1}{\eta} + \frac{\frac{\partial}{\partial t}(k_1 + k_2)}{k_1 k_2}\right)\left(\frac{1}{k_1 \eta} + \frac{\frac{\partial}{\partial t}}{k_1 k_2}\right)^{-1}$$

где је $\eta = k_2 T$. Дакле:

$$G^*(t) = \frac{3KE^*}{9K - E^*} H(t) = \left(3K \frac{\frac{1}{\eta} + \frac{\frac{\partial}{\partial t}(k_1+k_2)}{k_1 k_2}}{\frac{1}{k_1\eta} + \frac{\frac{\partial}{\partial t}}{k_1 k_2}}\right)\left(9K - \frac{\frac{1}{\eta} + \frac{\frac{\partial}{\partial t}(k_1+k_2)}{k_1 k_2}}{\frac{1}{k_1\eta} + \frac{\frac{\partial}{\partial t}}{k_1 k_2}}\right)^{-1} H(t)$$

Последњи израз може се упростити:

$$G^*(t) = \frac{3K\left(\frac{1}{\eta} + \frac{\frac{\partial}{\partial t}(k_1+k_2)}{k_1 k_2}\right)}{9K\left(\frac{1}{k_1\eta} + \frac{\frac{\partial}{\partial t}}{k_1 k_2}\right) - \left(\frac{1}{\eta} + \frac{\frac{\partial}{\partial t}(k_1+k_2)}{k_1 k_2}\right)} H(t)$$

$$G^{*}(t)=\frac{3K\left(k_1k_2+\eta\left(k_1+k_2\right)\frac{\partial}{\partial t}\right)}{9K\left(k_2+\eta\frac{\partial}{\partial t}\right)-\left(k_1k_2+\eta\left(k_1+k_2\right)\frac{\partial}{\partial t}\right)}H(t)$$

$$G^{*}(t)=\frac{3Kk_1k_2+3K\eta\left(k_1+k_2\right)\frac{\partial}{\partial t}}{9Kk_2-k_1k_2+\eta\left(9K-k_1-k_2\right)\frac{\partial}{\partial t}}H(t)$$

Уколико се изврши Лапласова трансформација:

$$G^{*}(s)=\frac{3Kk_1k_2+3K\eta\left(k_1+k_2\right)s}{9Kk_2-k_1k_2+\eta\left(9K-k_1-k_2\right)s}\frac{1}{s}$$

и уведу смене коефицијентата:

$$A=9Kk_2-k_1k_2$$

$$B=\eta\left(9K-k_1-k_2\right)$$

$$C=3Kk_1k_2$$

$$D=3K\eta\left(k_1+k_2\right)$$

Дакле:

$$G^{*}(s)=\frac{C+Ds}{A+Bs}\frac{1}{s}=\frac{C}{s\left(A+Bs\right)}+\frac{D}{A+Bs}$$

Да би било могуће извршити инверзну Лапласову трансформацију, потребно је први разломак написати у једноставнијем облику:

$$\frac{C}{s\left(A+Bs\right)}=\frac{P}{s}+\frac{Q}{A+Bs}$$

$$P(A+Bs)+Qs=C$$

$$PA+(PB+Q)s=C\quad\Rightarrow\quad P=\frac{C}{A},\quad Q=-\frac{BC}{A}$$

Сада је:

$$G^{*}(s)=\frac{\frac{C}{A}}{s}-\frac{\frac{BC}{A}}{A+Bs}+\frac{D}{A+Bs}=\frac{\frac{C}{A}}{s}+\frac{D-\frac{BC}{A}}{A+Bs}$$

$$G^{*}(s)=\frac{\frac{C}{A}}{s}+\frac{\frac{D}{B}-\frac{C}{A}}{s+\frac{A}{B}}$$

Инверзном Лапласовом трансформацијом долази се до израза:

$$G^{*}(t)=\frac{C}{A}H(t)+\left(\frac{D}{B}-\frac{C}{A}\right)\mathrm{e}^{-\frac{A}{B}t}$$

Када се замене вредности коефицијената, следи:

$$G^*(t) = \frac{3Kk_1}{9K - k_1} + \frac{27K^2k_2}{(9K - k_1 - k_2)(9K - k_1)}\mathrm{e}^{-\frac{(9K-k_1)t}{(9K-k_1-k_2)T}}$$

где је време релаксације при смицању реципрочна вредност коефицијента који се јавља у експоненту:

$$T_G = \frac{9K - k_1 - k_2}{9K - k_1}T = 0,9899$$

Задатак 7 Одредити функцију релаксације при смицању за вискоеластични модел чврстог тела, уколико је позната одговарајућа функција пузања:

$$J_G(t) = \frac{1}{2G_1} + \frac{1}{2G_2}\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{t}{\theta}}\right), \quad \theta = \frac{\eta}{G_2}$$

Решење:

Веза између функције релаксације и функције пузања при смицању је:

$$2G^*(s) = \frac{1}{s^2 J_G(s)}$$

Лапласова трансформација дате функције пузања је:

$$J_G(s) = \left(\frac{1}{2G_1} + \frac{1}{2G_2}\right)\frac{1}{s} - \frac{1}{2G_2}\left(\frac{1}{\frac{1}{\theta} + s}\right)$$

Дакле:

$$2G^*(s) = \frac{1}{s^2\left[\left(\frac{1}{2G_1} + \frac{1}{2G_2}\right)\frac{1}{s} - \frac{1}{2G_2}\left(\frac{1}{\frac{1}{\theta}+s}\right)\right]}$$

$$2G^*(s) = \frac{1}{s\left(\frac{1}{2G_1} + \frac{1}{2G_2} - \frac{s}{2G_2}\frac{\theta}{1+s\theta}\right)}$$

$$2G^*(s) = \frac{1 + s\theta}{s\left(\frac{1}{2G_1} + \frac{1}{2G_2} + \frac{s\theta}{2G_1}\right)}$$

Добијени разломак може се представити као збир два разломка:

$$\frac{1 + s\theta}{s\left(\frac{1}{2G_1} + \frac{1}{2G_2} + \frac{s\theta}{2G_1}\right)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{\frac{1}{2G_1} + \frac{1}{2G_2} + \frac{s\theta}{2G_1}}$$

$$1 + s\theta = A\left(\frac{1}{2G_1} + \frac{1}{2G_2} + \frac{s\theta}{2G_1}\right) + sB$$

Одакле следи:

$$A\left(\frac{1}{2G_1} + \frac{1}{2G_2}\right) = 1 \quad \Rightarrow \quad A = \frac{2G_1G_2}{G_1 + G_2}$$
$$B\left(\frac{\theta}{2G_1} + 1\right) = \theta \quad \Rightarrow \quad B = \frac{G_1\theta}{G_1 + G_2}$$

Дакле:

$$2G^*(s) = \frac{\frac{2G_1G_2}{G_1+G_2}}{s} + \frac{\frac{G_1\theta}{G_1+G_2}}{\frac{1}{2G_1} + \frac{1}{2G_2} + \frac{s\theta}{2G_1}}$$

Добијени израз може се написати у сређеном облику:

$$2G^*(s) = \frac{1}{s}\frac{2G_1G_2}{G_1 + G_2} + \frac{2G_1^2}{G_1 + G_2}\frac{1}{\frac{G_1+G_2}{G_2\theta} + s}$$

Сада се може извршити инверзна Лапласова трансформација:

$$2G^*(t) = \frac{2G_1G_2}{G_1 + G_2} + \frac{2G_1^2}{G_1 + G_2}\mathrm{e}^{-\frac{t}{\frac{G_2\theta}{G_1+G_2}}}$$

где је, узимајући у обзир да је $\eta = G_2\theta$, време релаксације при смицању:

$$T = \frac{\eta}{G_1 + G_2}$$

Задатак 8 Посматра се изотропни материјал чије је понашање при запреминској деформацији еластично, а при смицању вискоеластично. Попустљивост при пузању која одговара једноосном напрезању је задата на следећи начин:

$$J_E(t) = d_1 + d_2\mathrm{e}^{-\frac{t}{\theta}}$$

Потребно је одредити модуо релаксације при смицању.

Решење:

Модуо релаксације при смицању може се одредити уз помоћ везе:

$$G^* = \frac{3K^*E^*}{9K^* - E^*}$$

док се модуо релаксације при једноосном оптерећењу може одредити уз помоћ везе овог модула и попустљивости при пузању:

$$E^*(s) = \frac{1}{s^2 J_E(s)}$$

Лапласова трансформације попустљивости при пузању је:

$$J_E(s) = \frac{d_1}{s} + d_2 \left(\frac{1}{\frac{1}{\theta} + s} \right)$$

Дакле:

$$E^*(s) = \frac{1 + s\theta}{s \left[d_1 + (d_1 + d_2)\, s\theta \right]}$$

Сређивањем израза:

$$E^*(s) = \frac{A}{s} + \frac{B}{d_1 + (d_1 + d_2)\, s\theta}$$

$$A \left(d_1 + (d_1 + d_2)\, s\theta \right) + Bs = 1 + s\theta$$

$$\left[A \left(d_1 + d_2 \right) + B\theta \right] s + A d_1 = 1 + s\theta$$

$$A d_1 = 1 \quad \Rightarrow \quad A = \frac{1}{d_1}$$

$$A \left(d_1 + d_2 \right) + B = \theta \quad \Rightarrow \quad B = -\left(1 + \frac{d_2}{d_1} \right)$$

$$E^*(s) = \frac{\frac{1}{d_1}}{s} + \frac{-\left(1 + \frac{d_2}{d_1} \right)}{(d_1 + d_2)\, \theta \left(\frac{d_1}{(d_1 + d_2)\theta} + s \right)} = \frac{\frac{1}{d_1}}{s} + \frac{-\frac{1}{d_1 \theta}}{\frac{d_1}{(d_1 + d_2)\theta} + s}$$

И увођењем коефицијената:

$$k_1 = \frac{1}{d_1}, \quad k_2 = -\frac{1}{d_1 \theta}, \quad T = \frac{(d_1 + d_2)\, \theta}{d_1}$$

Добија се:

$$E^*(s) = \frac{k_1}{s} + k_2 \frac{1}{\frac{1}{T} + s}$$

С обзиром на то да је понашање при запреминској деформацији еластично:

$$K^*(s) = \frac{K}{s}$$

Што се може искористити за добијање модула релаксације при смицању:

$$G^*(s) = 3Kk_1 \frac{\frac{1}{T} + s}{s\left[\frac{9K-k_1}{T} + (9K - k_1 - k_2)\, s\right]} + 3Kk_2 \frac{1}{\frac{9K-k_1}{T} + (9K - k_1 - k_2)\, s}$$

С обзиром на то да је потребно наћи инверзну Лапласову трансформацију, потребно је добијени израз представити као збир рационалних функција:

$$G^*(s) = 3Kk_1 \left[\frac{A}{s} + \frac{B}{\frac{9K-k_1}{T} + (9K - k_1 - k_2)\, s}\right] + 3Kk_2 \frac{1}{\frac{9K-k_1}{T} + (9K - k_1 - k_2)\, s}$$

одакле се добијају:

$$A = \frac{1}{9K - k_1}$$

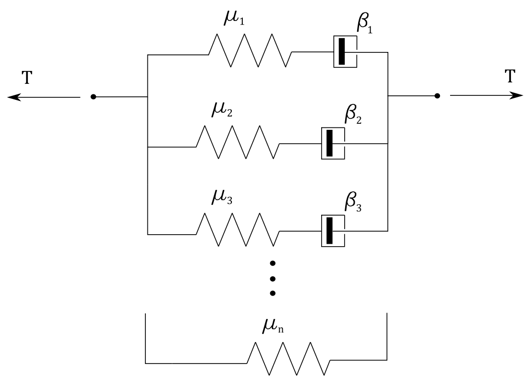
$$B = \frac{k_2}{9K - k_1}$$

Након Лапласове трансформације добија се модуо релаксације у временском домену:

$$G^*(t) = \frac{27K^2k_2}{(9K - k_1 - k_2)\,(9K - k_1)} \mathrm{e}^{-\frac{9K-k_1}{9K-k_1-k_2}\frac{t}{T}} + \frac{3Kk_1}{9K - k_1}$$

Задатак 9 У многим случајевима функција деформације није позната у аналитичком облику, или може бити превише компликована да би проблем напрезања био решен аналитички. У тим случајевима конститутивну једначину у диференцијалном облику можемо трансформисати уз помоћ нумеричких метода, као што је нпр. метода коначних разлика. Тиме се може доћи до нумеричког решења проблема. Када се разматра Максвелов уопштени модел, приказан на Сл. 7, може се закључити да је укупни напон једнак суми напона у свим гранама, док је напон у једној грани:

$$\dot{T}_i + \frac{1}{\tau_i} T_i = \mu_i \dot{\nu}_i, \quad \tau_i = \frac{\beta_i}{\mu_i}$$



Слика 7: Уопштени Максвелов модел

Када се примени метода коначних разлика:

$$\frac{T_i^t - T_i^{t-1}}{\Delta t} + \frac{1}{\tau_i} T_i^t = \mu_i \frac{\nu^t - \nu^{t-1}}{\Delta t}$$

Тренутни напон у једној грани је:

$$T_i^t = \frac{1}{1 + \frac{\Delta t}{\tau_i}} \left[\mu_i \left(\nu^t - \nu^{t-1} \right) + T_i^{t-1} \right]$$

А сума свих напона у посматраном тренутку је:

$$T^t = \mu_n \nu^t + \sum_i^{n-1} \frac{\mu_i \left(\nu^t - \nu^{t-1} \right) + T_i^{t-1}}{1 + \frac{\Delta t}{\tau_i}}$$

Чиме је добијена итеративна формула којом је могуће решити посматрани проблем са задатом тачношћу.

Додатак А

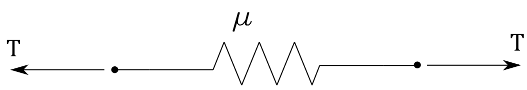
Вискоеластични материјали

Вискоеластичност је појам који сједињује два типа понашања материјала. Наиме, познати су нам материјали, као што је челик, чије понашање се у одређеним границама напрезања може сматрати еластичним. Код таквих материјала, целокупна енергија уложена при њиховом деформисању, искоришћена је при повратку у првобитни облик - нема дисипације енергије у том идеализованом случају. За разлику од оваквих материјала, код флуида се при кретању јавља дисипација енергије услед вискозности, тј. унутрашњег трења - део енергије се неповратно претвара у топлоту. Међутим, постоје многи материјали које карактерише сложено понашање у коме се могу уочити и еластична и вискозна својства. Такви материјали су вискоеластични и постоје разни модели којима се њихово понашање описује. Овде ће бити представљени:

- Максвелов модел
- Келвин-Војтов модел
- Зенеров модел (Стандардни вискоеластични модел чврстог тела)

Сваки од ових модела састоји се из опруга и пригушивача који адекватно представљају еластична и вискозна својства.

Напон у опрузи



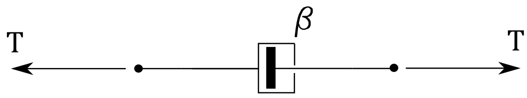
Слика 8: Опруга

Опруга се сматра еластичном, те конститутивни закон њеног понашања представља Хуков закон:

$$T_{opr} = \mu \cdot \nu$$

где је ν - мера деформације, а μ - коефицијент еластичности опруге.

Вискозни напон



Слика 9: Пригушивач

Напон који се јавља у пригушивачу пропорционалан је брзини деформације:

$$T_v = \beta \cdot \dot{\nu}$$

где је $\dot{\nu}$ - брзина деформације, а β - коефицијент вискозности.

Максвелов модел

Слика 10: Максвелов модел

Вискоеластична својства неких материјала могу се моделирати редном везом опруге и пригушивача, као што је приказано на Сл. 10. На овај начин опруга моделу даје еластична своства, а пригушивач вискозна. Једначина равнотеже указује на то да напон у опрузи и пригушивашу мора бити једнак:

$$T = T_{opr} = T_v$$

Док је укупна деформација једнака збиру појединих деформација:

$$\nu = \nu_{opr} + \nu_v$$

Пронађумо конститутивну једначину понашања материјала представљеног овим моделом, тј. везу између T и ν:

$$T = \mu \nu_{opr} = \beta \dot{\nu}_v$$

$$\dot{T} = \mu \dot{\nu_{opr}}$$

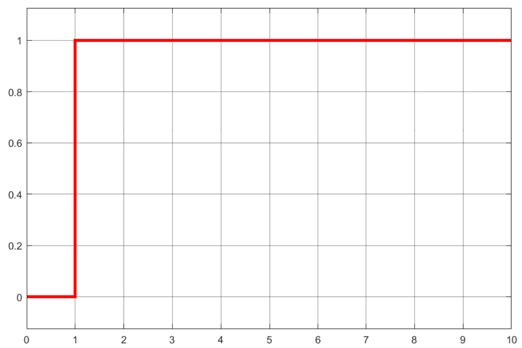
$$\dot{T} = \mu \left(\dot{\nu} - \dot{\nu}_v \right)$$

$$\dot{T} = \mu \left(\dot{\nu} - \frac{\mu}{\beta} \nu_{opr} \right)$$

$$\dot{T} = \mu\left(\dot{\nu} - \frac{\mu}{\beta}\frac{T}{\mu}\right)$$

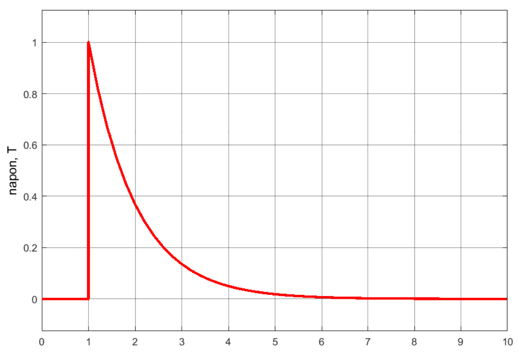
$$\boxed{\dot{T} + \frac{\mu}{\beta}T = \mu\dot{\nu}}$$

Уколико се материјалу зада деформација која одговара Хевисајдовој одскочној фукцији:



Слика 11: Функција побуде (Хевисајдова функција)

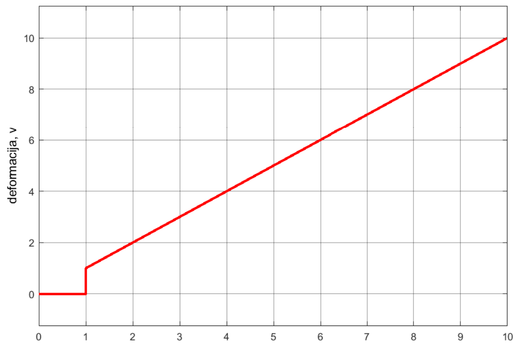
У складу са добијеном конститутивном једначином може се симулирати релаксација напона у току времена:



Слика 12: Релаксација напона Максвеловог модела

Може се закључити да у почетном тренутку на побуду реагује само опруга, након чега долази до потпуног пригушења, јер је веза између елемената модела редна.

Међутим, уколико се аналогно томе зада напон, може се симулирати пузање:

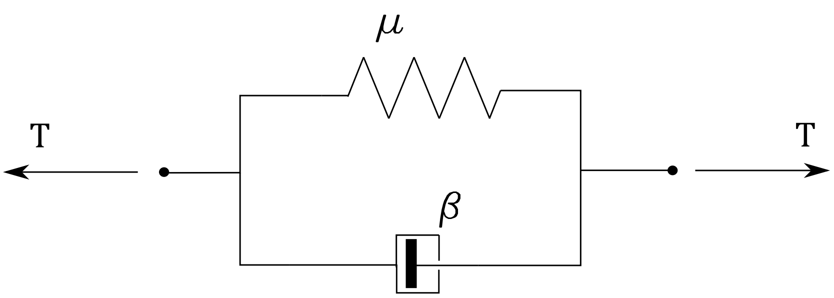


Слика 13: Пузање Максвеловог модела

Очигледно је да опруга доживљава тренутну деформацију, док се пригушивач деформише са закашњењем, али његово деформисање је континуално у току трајања оптерећења.

Симулације су урађене у програму Simulink. У Дадатку В приказане су блок шеме са одговарајућим конститутивним једначинама. Узете су јединичне вредности коефицијента еластичности и вискозности.

Келвин-Војтов модел



Слика 14: Келвин-Војтов модел

Понашање многих вискоеластичних материјала ближе је описано паралелном спрегом опруге и пригушивача, као што је приказано на Сл. 14. За разлику од Максвеловог модела, напони који се јављају у опрузи и пригушивачу нису једнаки. У овом случају једнаке су деформације:

$$\nu = \nu_{opr} = \nu_v$$

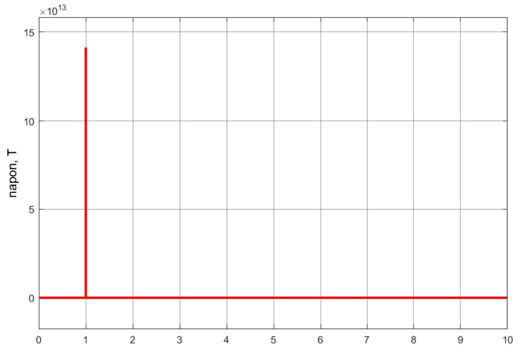
А укупни напон је једнак збиру напона који се јавља у опрузи и пригушивачу:

$$T = T_{opr} + T_v$$

Tj.

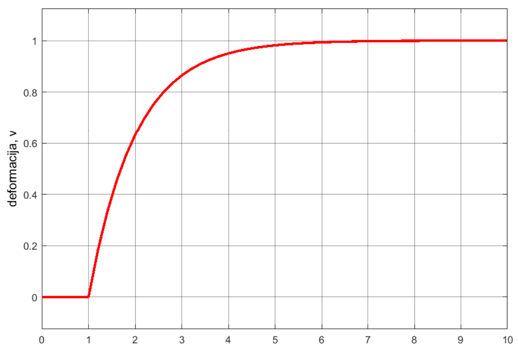
$$\boxed{T = \mu\nu + \beta\dot{\nu}}$$

Симулацијом оптерећења добијају се следећи одзиви:



Слика 15: Релаксација напона Келвин-Војтовог модела

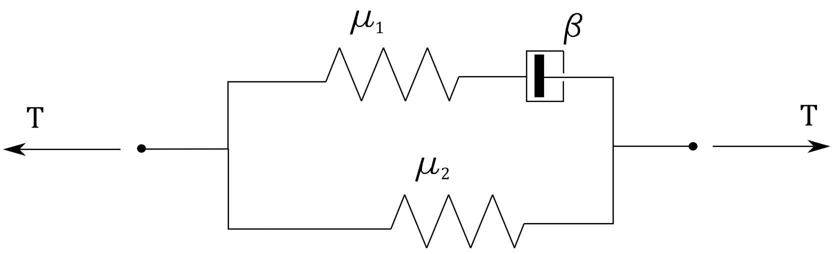
С обзиром на то да до пригушења долази са закашњењем, напон у опрузи иницијално теоретски расте до бесконачности, након чега долази до његове релаксације, међутим он не опада до нулте вредности, јер опруга у паралелној спрези остаје оптерећена за све време трајања деформације.



Слика 16: Пузање Келвин-Војтовог модела

С обзиром на паралелну спрегу елемената, долази до пригушења од почетка деловања оптерећења.

Зенеров модел (Стандардни вискоеластични модел чврстог тела)



Слика 17: Зенеров модел

Овај модел обједињује својства Максвеловог и Келвин-Војтовог модела, што се може приметити на Сл. 17. Наиме, већина полимера који имају вискоеластична свова имају такву структуру да при њиховом деформисању долази до повремених укрштања и "запетљавања" ланаца полимера. Уколико се замисли клипни пригушивач, паралелна спрега са опругом би моделу дала додатну крутост, која би ограничавала кретање клипа - деформација пригушивача не зависи само од његових вискозних особина.

$$\nu = \nu_{opr} + \nu_v$$

$$T = T_1 + T_2$$

$$\left.\begin{array}{c} T_1 = \mu_1 \nu_{opr} = \beta \dot{\nu}_v \\ T_2 = \mu_2 \nu \end{array}\right\} \quad T = \mu_1 \nu_{opr} + \mu_2 \nu$$

$$\dot{T} = \mu_1 \dot{\nu}_{opr} + \mu_2 \dot{\nu}$$

$$\nu_{opr} = \nu - \nu_v \quad \Rightarrow \quad \dot{\nu}_{opr} = \dot{\nu} - \dot{\nu}_v$$

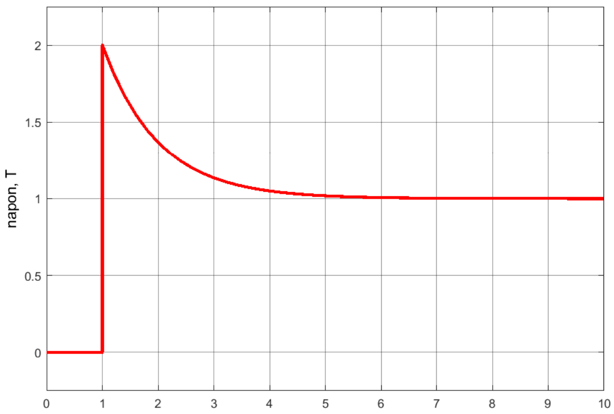
$$\dot{T} = \mu_1 \left(\dot{\nu} - \dot{\nu}_v\right) + \mu_2 \dot{\nu}$$

$$\dot{\nu}_v = \frac{\mu_1}{\beta} \nu_{opr}, \quad \nu_{opr} = \frac{T - \mu_2 \nu}{\mu_1} \quad \Rightarrow \quad \dot{\nu}_v = \frac{T}{\beta} - \frac{\mu_2}{\beta} \nu$$

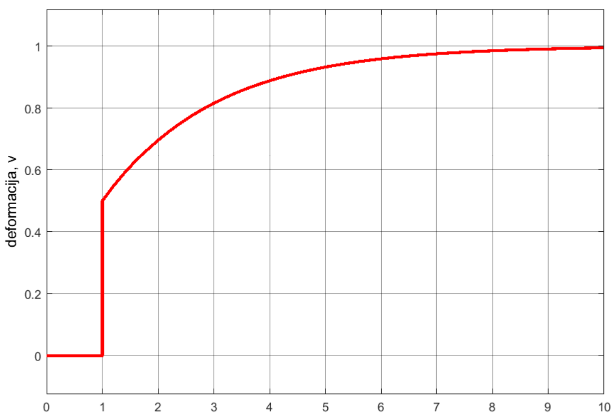
$$\dot{T} = \mu_1 \left(\dot{\nu} - \frac{T}{\beta} + \frac{\mu_2}{\beta} \nu\right) + \mu_2 \dot{\nu}$$

$$\boxed{\dot{T} + \frac{\mu_1}{\beta} T = \frac{\mu_1 \mu_2}{\beta} \nu + \left(\mu_1 + \mu_2\right) \dot{\nu}}$$

Симулацијом оптерећења добијају се одзиви приказани на Сл. 19 и 18. Због паралелне спреге са опругом, не долази до потпуне релаксације напона - појединачна опруга остаје напрегнута за све време трајања деформације. Такође, приликом задавања оптерећења, уочава се иницијална деформација опруга, након чега реагује и пригушивач што доводи до континуалног пузња.



Слика 18: Релаксација напона Зенеровог модела



Слика 19: Пузање Зенеровог модела

Уколико се уведе да је:

$$\tau_1 = \frac{\beta}{\mu_1}$$

Као и:

$$\frac{1}{\tau_2} = \frac{\beta}{\mu_2}\left(1 + \frac{\mu_2}{\mu_1}\right)$$

Конститутивна једначина овог модела гласи:

$$\tau_1 \dot{T} + T = \mu_2 \left(\nu + \frac{1}{\tau_2} \dot{\nu} \right)$$

где уведене величине представљају <u>време ретардације</u> тј. време релаксације. Што је време релаксације мање, процес релаксације се одвија брже. Међутим, теоретски, за потпуну релаксацију је потребно бесконачно много времена.

Уколико извршимо Лапласову трансформацију над добијеном једначином, можемо је анализирати у комплексном домену:

$$(s\tau_1 + 1)\, T(s) = \left(\mu_2 + \frac{s\mu_2}{\tau_2} \right) \nu(s)$$

$$T(s) = \frac{\mu_2 + \frac{s\mu_2}{\tau_2}}{s\tau_1 + 1} \nu(s) \tag{4}$$

где се може уочити веза између тензора напона и тензора деформације:

$$\varepsilon = \frac{\mu_2 + \frac{s\mu_2}{\tau_2}}{s\tau_1 + 1}$$

Једна важна карактеристика вискоеластичних материјала је релаксација напона до које долази уколико се материјалу зада константна деформација. Дакле, напон у току времена опада, иако не долази до смањења деформације. Уколико је константна деформација задата на следећи начин:

$$\nu(t) = \nu_0 H(t)$$

где $H(t)$ представља Хевисајдову одскочну функцију (Сл. 4) њена Лапласова трансформација је:

$$\nu(s) = \frac{\nu_0}{s}$$

Дакле, једначина (4) би у овом случају имала облик:

$$T(s) = \varepsilon \frac{\nu_0}{s}$$

где се може увести модуо релаксације, који представља однос функције напона и константне деформације:

$$E^* = \frac{\varepsilon(s)}{s} = \frac{T(s)}{\nu_0}$$

Да би модуо релаксације био у временском домену, потребно је извршити инверзну Лапласову трансформацију.

Модуо релаксације E^* је претходно дефинисан за случај једноосног оптерећења, где је као пример коришћен Зенеров модел. Уколико се модел налази под сложеним оптерећењем, тензор напона може се разложити на волуметријски и девијаторски део, те се може дефинисати модуо релаксације при смицању (G^*), као и при запреминској деформацији (K^*). Однос између ових величина исти је као и однос еластичних константи (E, G, K, ν), а те релације су већ познате:

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} = \frac{3K(1-2\nu)}{2(1+\nu)} = \frac{3KE}{9K-E}$$

Модуо релаксације при једноосном оптерећењу (E^*) се за сложене моделе често одређује експериментално. Преостала два модула релаксације такође је могуће одредити експериментално, међутим, у случају модула релаксације при запреминској деформацији то је веома компликовано, те се често сматра да се материјал понаша еластично при запреминској деформацији и узима се одговарајућа константна вредност (константа стишљивости). Када је у питању модуо релаксације при смицању, он се најчешће одређује из релације:

$$G^* = \frac{3K^*E^*}{9K^*-E^*}$$

узимајући у обзир да је K^* константна врендост, а E^* експериментално одређена функција.

Попустљивост при пузању (creep compliance):

Када се вискоеластични материјал налази под константним оптерећењем, он не задржава достигнуту величину деформације, већ долази до пузања - деформација се повећава, иако је напон остао исти. Однос функције промене деформације и задатог константног напона је попустљивост при пузању:

$$J(t) = \frac{\nu(t)}{T}, \quad T = \text{const.}$$

Веза између модула релаксације и попустљивости при пузању

Уколико су константни напон који доводи до пузања и константна деформација при којој долази до релаксације напона дефинисани на следећи начин:

$$T(t) = T_0 H(t) \quad \text{и} \quad \nu(t) = \nu_0 H(t)$$

где је $H(t)$ Хевисајдова одскочна функција (Сл. 4), погодно је разматрати Лапласову трансформацију ових израза:

$$T(s) = \frac{T_0}{s}, \quad \nu(s) = \frac{\nu_0}{s}$$

Уколико се узме у обзир да за неки систем у комплексном домену важи:

$$T_0 = \varepsilon \nu_0$$

где ε представља везу између тензора напона и тензора деформације. Сада се може написати:

$$T(s) = \frac{\varepsilon \nu_0}{s}$$

$$\nu(s) = \frac{T_0}{s\varepsilon}$$

Тј.

$$\varepsilon = s\frac{T(s)}{\nu_0}$$

$$\varepsilon = \frac{1}{\frac{\nu(s)}{T_0}}\frac{1}{s}$$

где се могу уочити Лапласова трансформација модула релаксације $E^*(s) = \frac{T(s)}{\nu_0}$, као и попустљивости при пузању $J(s) = \frac{\nu(s)}{T}$, тако да је:

$$\varepsilon = sE^*(s)$$

$$\varepsilon = \frac{1}{J(s)}\frac{1}{s}$$

С обзиром на то да леве стране ових израза морају бити једнаке, важи:

$$sE^*(s) = \frac{1}{J(s)}\frac{1}{s}$$

Одакле следи веза између модула релаксације и попустљивости при пузању:

$$E^*(s) = \frac{1}{s^2 J(s)}$$

Уколико је у питању сложено оптерећење, оно се може разложити на волуметријски и девијаторски део, те су односи одговарајућих модула релаксације и попустљивости при пузању:

$$2G^*(s) = \frac{1}{s^2 J_G(s)}$$

$$3K^*(s) = \frac{1}{s^2 J_K(s)}$$

Додатак Б

Лапласова трансформација

Лапласова трансформација је операција које се често користи у математици. Уколико се изврши над диференцијалном једначином у временском домену, она ће постати алгебарска једначину у комплексном, фреквентном, домену. При томе је решавање диференцијалне једначине веома поједностављено, а омогућена је и фреквентна анализа.

Лапласова трансформација неке функције представља следећи интеграл над том функцијом:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = f(s) = \lim_{\alpha \to 0^-} \int_{\alpha}^{\infty} f(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t$$

Док је инверзна Лапласова трансформација:

$$\mathcal{L}^{-1}\{f(s)\} = f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} f(s)\mathrm{e}^{st}\mathrm{d}s$$

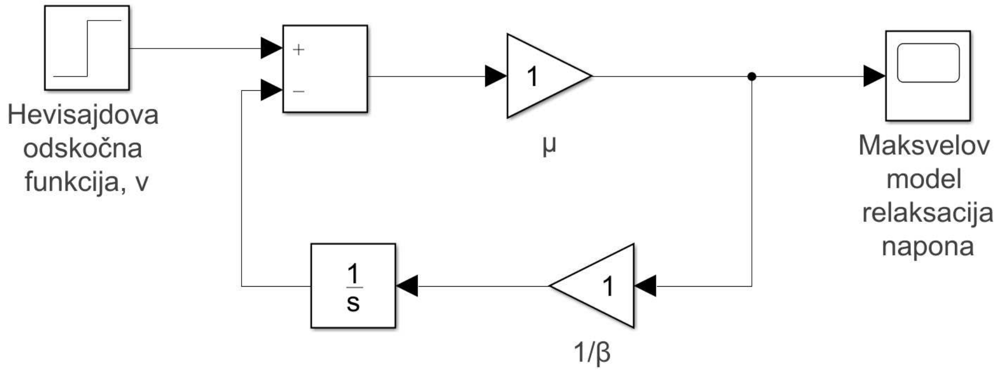
Међутим, постоје таблице решених интеграла за функције које се често јављају у пракси, те често није потребно вршити ову интеграцију.

Додатак В

Блок дијаграми (Simulink) и одговарајуће конститутивне једначине

Релаксација напона Максвеловог модела:

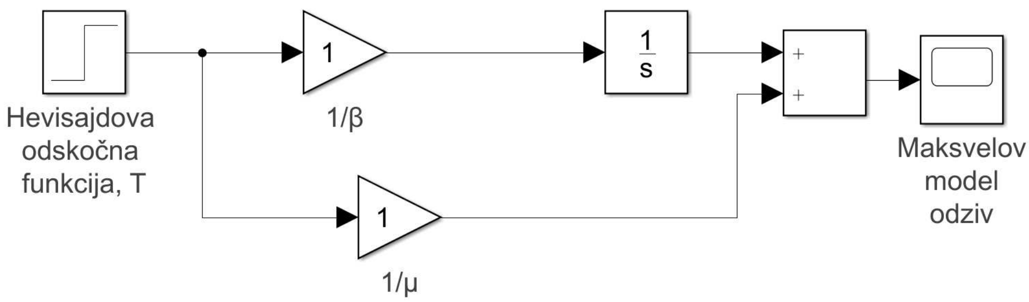
$$\dot{T} = -\frac{\mu}{\beta}T$$



Слика 20: Релаксација напона Максвеловог модела

Пузање Максвеловог модела:

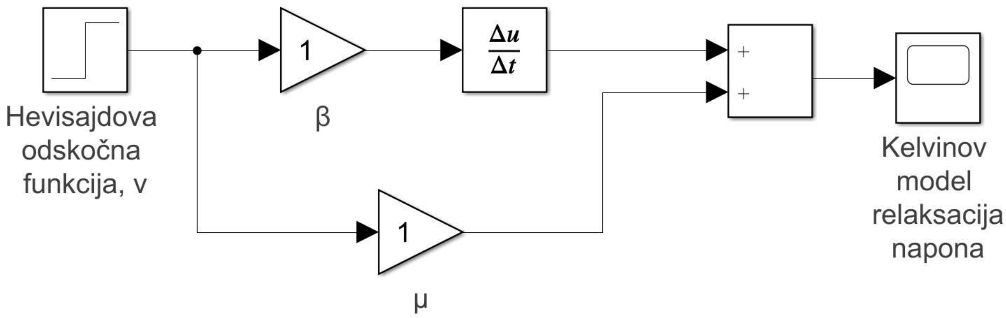
$$\dot{\nu} = \frac{\dot{T}}{\mu} + \frac{T}{\beta}$$



Слика 21: Пузање Максвеловог модела

Релаксација напона Келвин-Војтовог модела:

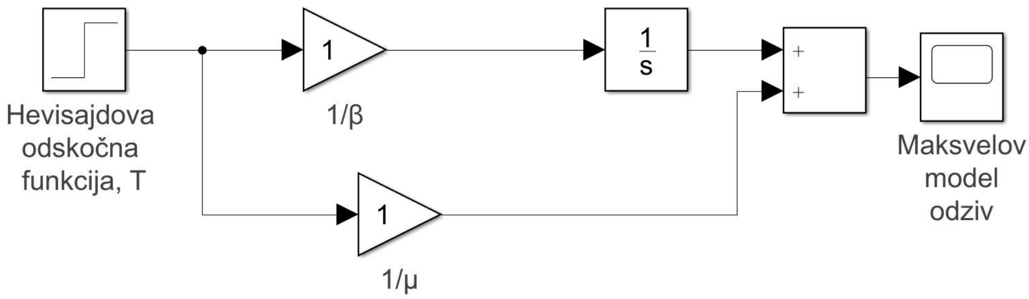
$$T = \mu\nu + \beta\dot{\nu}$$



Слика 22: Релаксација напона Келвин-Војтовог модела

Пузање Келвин-Војтовог модела:

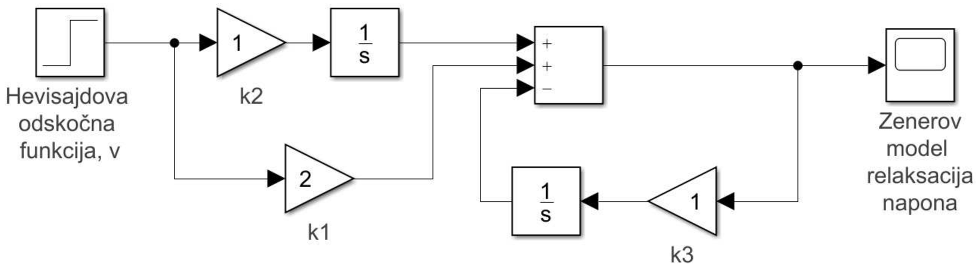
$$\dot{\nu} = \frac{T}{\beta} - \frac{\mu}{\beta}\nu$$



Слика 23: Пузање Келвин-Војтовог модела

Релаксација напона Зенеровог модела:

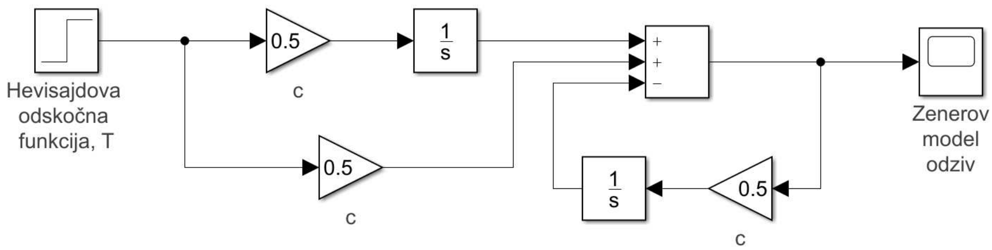
$$\dot{T} = k_1\dot{\nu} + k_2\nu - k_3T$$



Слика 24: Релаксација напона Зенеровог модела

Пузање Зенеровог модела:

$$\dot{\nu} = c\dot{T} + cT - c\nu$$



Слика 25: Пузање Зенеровог модела