Машински факултет
УНИВЕРЗИТЕТА У БЕОГРАДУ

БИОМЕХАНИКА ТКИВА И ОРГАНА

ОСНОВЕ ТЕОРИЈЕ ВИСКОЕЛАСТИЧНОСТИ

Фреквентни домен

проф. М П. Лазаревић, Машински факултет, Универзитет у Београду, Србија

Осцилаторно понашање:комплексни модули и комплексна попустљивост

- Експерименти пузања и релаксације не дају потпуне информације о механичком понашању вискоеластичних материјала

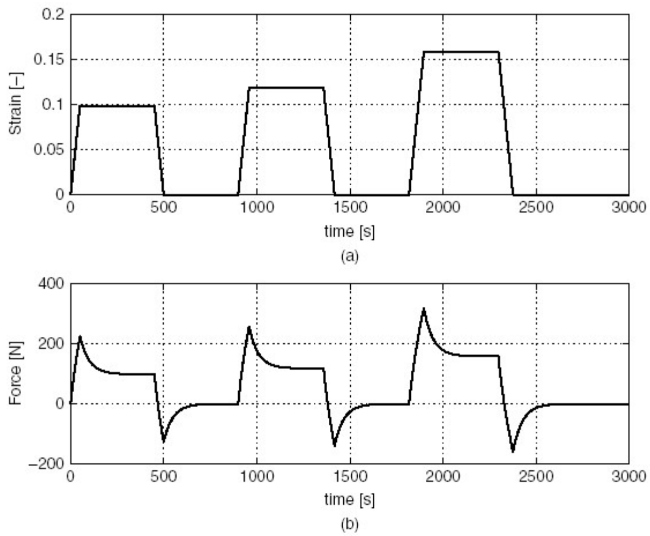
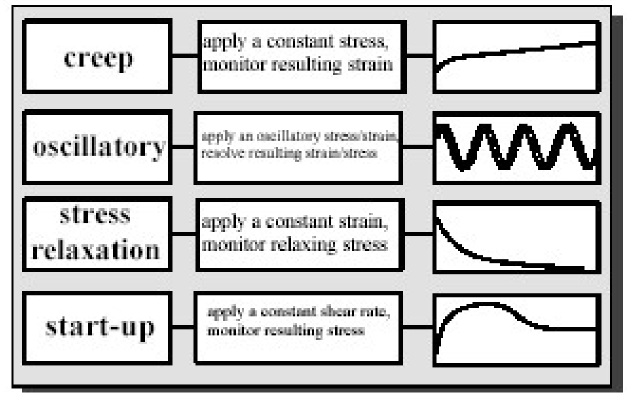


Figure 5.1



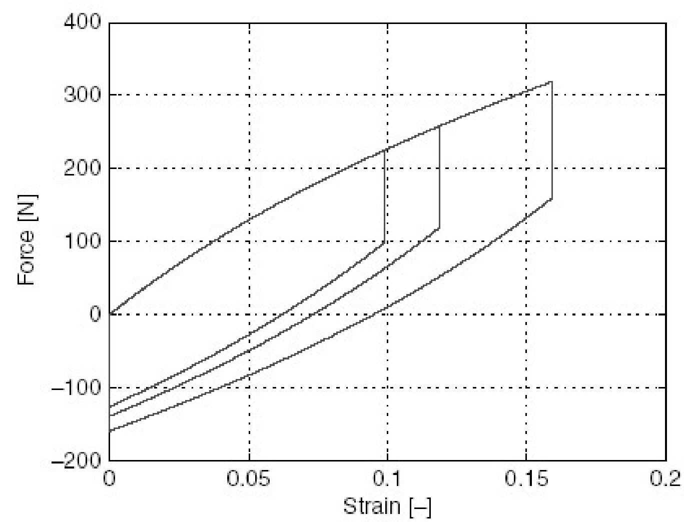
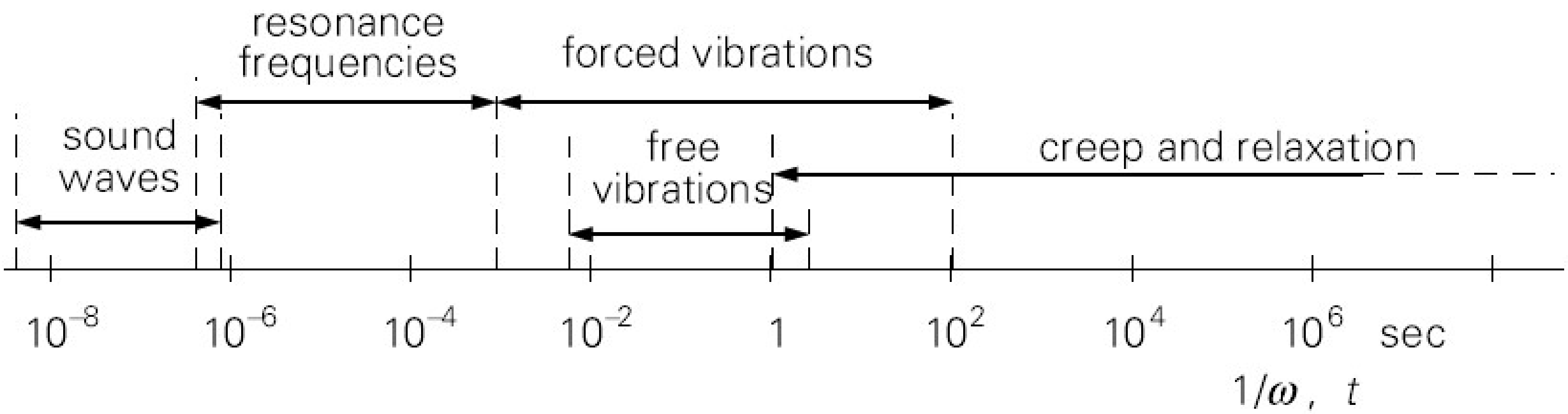


Figure 5.2

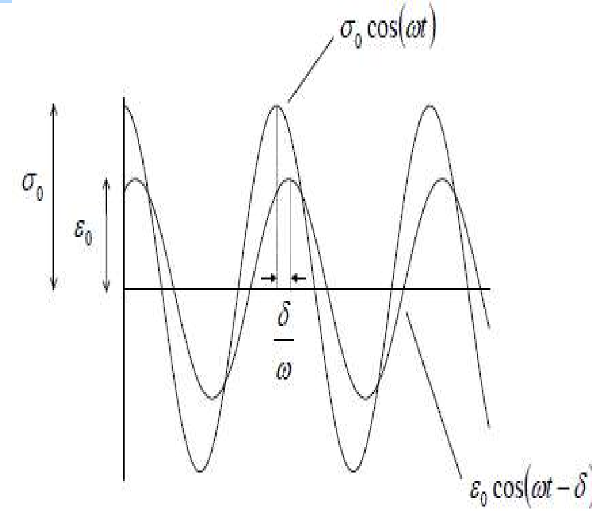
Временске скале



Осцилаторно напрезање

Осцилаторно понашање

- **Нека се деформација мења по синусном закону**



$$\gamma = \gamma_0 \sin(\omega t)$$

Напон је одређен следећом релацијом:

$$T = T_o \sin(\omega t + \phi)$$

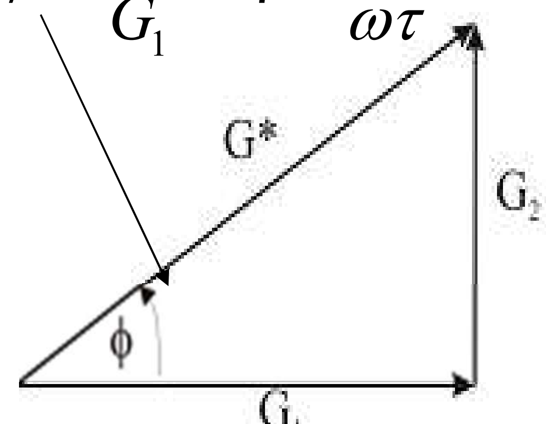
- **Претходни израз можемо написати као:**

$$T = \gamma_0 G_1 \sin\omega t + \gamma_0 G_2 \cos\omega t$$

при чему је (слика 7.1)

$$G^* = G_1 + iG_2, \quad i = \sqrt{-1} \qquad tg\phi = G_2 / G_1$$

$$tg\phi = \frac{G_2}{G_1} = \eta = \frac{1}{\omega\tau}$$



Слика 7.1

Применом комплексног еквивалента за γ , T **добија се:**

$$\gamma = \gamma_0 e^{i\omega t}, \quad T = T_0 e^{i(\omega t + \phi)}$$

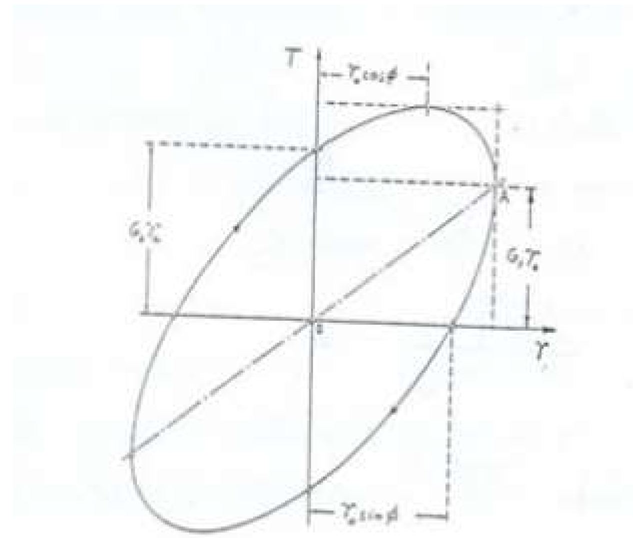
- **Комплексни однос напон - деформација је:**

$$T / \gamma = T_0 / \gamma_0 (\cos\phi + i\sin\phi) = G_1 + iG_2$$

$$\boxed{T = G^* \gamma = (G_1 + iG_2)\gamma}$$

Комплексни модул релаксације

$$G^* = G_1 + iG_2$$



(Лисажујеве фигуре) к

$$T = G_1\gamma \pm G_2\sqrt{\gamma_o^2 - \gamma^2},$$

Енергија дисипације D по циклусу

$$D = \oint T d\gamma = \int_0^{2\pi/\omega} T\dot{\gamma} dt$$

$$D = \omega\gamma_0^2 \int_0^{2\pi/\omega} \left(G_1 \sin\omega t \cos\omega t + G_2 \cos^2 \omega t\right) dt = \pi G_2 \gamma_0^2$$

Максимална еластична енергија U $\quad U = \frac{1}{2} G_1 \gamma_0^2$

Однос дисипиране енергије по циклусу U је коефицијент губитка *coefficient loss*, или позната као физиолошка хистерезибилност η.

$$\eta = \frac{D}{2\pi U} = \frac{G_2}{G_1} = \tan\phi$$

комплексну попустљивост J^*.

$J^* = J_1 - iJ_2$, при чему важи

$$J^* = 1/G^*$$

Осцилаторно понашање Максвеловог модела

- **Ако се узме да је на улазу** $\gamma = \gamma_0 \exp(i\omega t)$ $\qquad \dot{\gamma}(t) = d\gamma / dt = i\omega\gamma(t)$

$$T = G^{*}\gamma \qquad \dot{T} = G^{*}\dot{\gamma} \qquad \dot{\gamma} = \frac{\dot{T}}{\mu} + \frac{T}{\beta}$$

$$\frac{G_1}{\tau} - \omega G_2 + i\left(\omega G_1 + \frac{G_2}{\tau} - \omega\mu\right) = 0 \qquad \mathrm{Re} = 0, \mathrm{Im} = 0$$

$$G_1 = \frac{\mu\omega^2\tau^2}{1+\omega^2\tau^2} \qquad G_2 = \frac{\mu\omega\tau}{1+\omega^2\tau^2} \qquad \eta = 1/\omega\tau$$

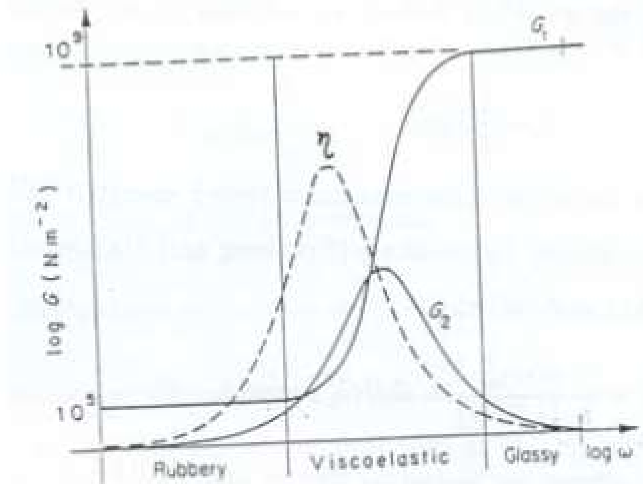
Гумасто понашање →0 , $G_1 \to 0$, $G_2 \to 0$, $\eta \to \infty$ што не одговара типичном понашању полимера. Стакласто понашање тј. при $\omega \to \infty$, $G_1 \to \mu$, $G_2 \to 0$, $\eta \to 0$, што је конзистентно са типичним понашањем полимера.

Експериментално одређивање динамичких модула

„гумасто“ са $G_1 \approx 10^5 N/m^2$ и не зависи од фреквенције

$G_2 \simeq 0$.

$G_1 \approx 10^9 N/m^2$, независна од фреквенције и $G_2 \simeq 0$.



Осцилаторно понашање модела (Максвелов

$\dot{\gamma} = \dfrac{\dot{T}}{\mu} + \dfrac{T}{\beta}$ добија се

$$\frac{G_1}{\tau} - \omega G_2 + i\left(\omega G_1 + \frac{G_2}{\tau} - \omega\mu\right) = 0$$

$$G_1 = \frac{\mu\omega^2\tau^2}{1+\omega^2\tau^2}, \quad G_2 = \frac{\mu\omega\tau}{1+\omega^2\tau^2}, \quad \eta = \frac{1}{\omega\tau}$$

Келвин-Војтов модел

На сличан начин за Келвин-Војтов модел $T = \mu\gamma + \beta\gamma$ добија се да је:

$$G_1 = \mu, \quad G_2 = \omega\beta, \quad \eta = \omega\tau \tag{7.18}$$

Гумасто понашање је за $\omega \to 0$ следи $G_1 = \mu$, $G_2 = 0$, $\eta = 0$ што одговара типичном понашању полимера. Стакласто понашање при $\omega \to \infty$ $G_1 \to \mu$, $G_2 \to \infty$, $\eta \to \infty$ што није у сагласности са понашањем полимера.

комплексну попустљивост J^*. $J^* = J_1 - iJ_2$

- При чему важи

$$\boxed{J^* = 1/G^*}$$

Зенеров модел

Показати да је за стандардни линеарни модел чврстог тела

$$G_1 = \mu_r \frac{1+\omega^2\tau_\gamma\tau_\tau}{1+\omega^2\tau_\gamma^2}, \quad G_2 = \omega\mu_r \frac{\tau_\tau - \tau_\gamma}{1+\omega^2\tau_\gamma^2}, \quad \eta = \omega \frac{\tau_\tau - \tau_\gamma}{1+\omega^2\tau_\gamma\tau_\tau}$$

Веза између комплексног модула и модула релаксације напона

$$T(t) = \int_{-\infty}^{t} G(t-\tau)\dot{\gamma}(\tau)d\tau$$

$$\frac{T(t)}{\gamma(t)} = i\omega\int_0^\infty G(\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau = G^*(\omega) = G_1(\omega) + iG_2(\omega)$$

Sin.cos Фуријеве трансформације

$$G_1(\omega) = \omega\int_0^\infty G(\tau)\sin\omega\tau d\tau, \quad G_2(\omega) = \omega\int_0^\infty G(\tau)\cos\omega\tau d\tau$$

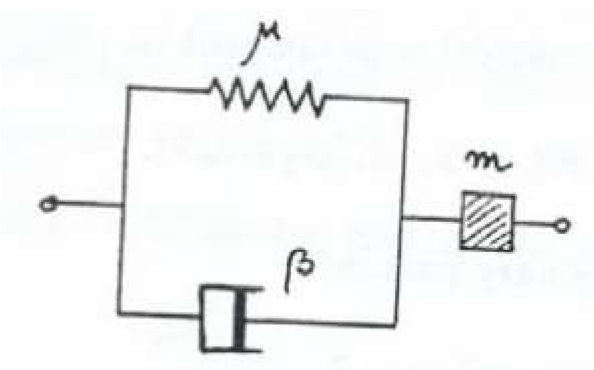
.Динамичка попустљивост

$$J_1(\omega)=\int_0^{\infty}\frac{dJ(\tau)}{d\tau}\cos\omega\tau d\tau\,,\;J_2(\omega)=-\int_0^{\infty}\frac{dJ(\tau)}{d\tau}\sin\omega\tau d\tau$$

$$G^*(\omega)=s\int_0^{\infty}G(\tau)e^{-s\tau}d\tau$$

ЕФЕКТИ ИНЕРЦИЈЕ И ЧИСТЕ ЊУТНОВСКЕ ВИСКОЗНОСТИ

Ефекти инерције



$$T=m\ddot{\gamma}+\beta\dot{\gamma}+\mu\gamma\,,\qquad \gamma=\gamma_0\exp(i\omega t)$$

$$G^*=\mu-\omega^2m+i\omega\beta\,.$$

$$G_1'=G_1-\omega^2m\,.$$

„Чисти Њутновски“ ефекти

$$T = G^{*}\gamma + R\dot{\gamma} = G_1 + i(G_2 + \omega R).$$

Из једначине (7.28) следи да је имагинарни део

$$G_2^{'} = G_2 + \omega R$$

$G_2^{'} / \omega = G_2 / \omega + R \to R$, као $\omega \to \infty$, тј. мерењем $G_2^{'}$ при високим фреквенцијама, може се проценити *R*.

$$\eta = \frac{G_2}{G_1} = \frac{G_2^{'} - \omega R}{G_1^{'} + \omega^2 m}.$$

Плућно ткиво **Понашање ткива које може бити описано преко линеарне вискоеластичности**

вискоеластично чврсто тело. Уобичајено, у респираторној физиологији, еластичност (elastance) (E_{dyn}) и резистентност ткива (R_{tis}) користе се уместо модула нагомилавања и модула губитака (loss), респективно. Понекад, уместо динамичке еластичности, користи се реципрочна вредност динамичке попустљивости (compliance) (C_{dyn}). Динамичка еластичност је идентична као и меморијски модул (нагомилавања) и резистеност ткива је једнака G_2 / ω.

(Hildebrandt, 1969).

$$G(t) = A - B \log t, \quad A, B = const$$

Користећи ову везу, може се показати да за плућа важ

$$E_{dyn} = A + 0,25B + B \log \omega, \quad R_{tis} = \frac{\pi B}{4,6\omega},$$

$$\eta = \frac{\pi}{4,6(A/B + 0,25 + \log \omega)}.$$