

## Осцилаторно понашање: комплексни модули и комплексна попустљивост

Алтернативни приступ у проучавању релаксације напона и попустљивости при пузању је проучавање осцилаторног понашања датог вискоеластичног материјала. При томе напон и деформација су периодичне променљиве и одговарајући одзив се мери. За линеарне вискоеластичне материјале када је равнотежно стање достигнуто хармонијски излаз прати хармонијски излаз али са фазним померајем захваљујући пригушним вискозним ефектима. Овакав приступ је оправдан имајући у виду реално физиолошко понашање ткива и органа (дисање, корачање, откуцаји срца итд.) Претпоставимо да се деформација мења по синусном закону

$$\gamma = \gamma_0 \sin \omega t, \quad (7.1)$$

где је са  $\gamma_0$  означена амплитуда деформације, а са  $\omega$  угаона брзина. Напон је одређен следећом релацијом:

$$T = T_0 \sin(\omega t + \phi) \quad (7.2)$$

са  $T_0$  амплитуда напона, а  $\phi$  је фазни угао. Израз (7.2) се може приказати као

$$T = \gamma_0 G_1 \sin \omega t + \gamma_0 G_2 \cos \omega t \quad (7.3)$$

$$G^* = G_1 + G_2 i, \quad i = \sqrt{-1} \quad (7.4)$$

$$\tan \phi = \frac{G_2}{G_1} \quad (7.5)$$

Применом комплексне нотације следи:

$$\gamma = \gamma_0 e^{i\omega t}, \quad T = T_0 e^{i(\omega t + \phi)} \quad (7.6)$$

Комплексни однос напон- деформација је сада:

$$\frac{T}{\gamma} = \frac{T_0}{\gamma_0} e^{i\phi} = \frac{T_0}{\gamma_0} (\cos \phi + i \sin \phi) = G_1 + i G_2 = G^*, \quad (7.7)$$

односно

$$T = G^* \gamma = (G_1 + i G_2) \gamma, \quad (7.8)$$

За синусоидалну деформацију  $\gamma = \gamma_0 \sin \omega t$  применом претходног израза следи

$$T = G_1 \gamma_0 \sin \omega t + i G_2 \gamma_0 \sin \omega t, \quad (7.9)$$

односно

$$T = G_1 \gamma \pm G_2 \sqrt{\gamma_o^2 - \gamma^2}, \quad (7.10)$$

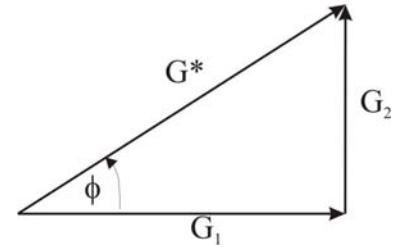
која дефинише елипсу (Лисажујеве фигуре) која је приказана на слици 7.2.

Енергија дисипације  $D$  по циклусу је одређена са

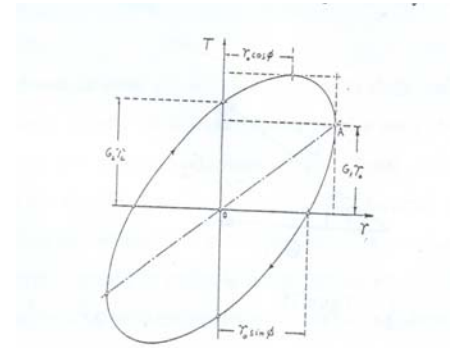
$$D = \oint T d\gamma = \int_0^{2\pi/\omega} T \dot{\gamma} dt \quad (7.11)$$

где се заменом  $T, \gamma$  добија

$$D = \omega \gamma_0^2 \int_0^{2\pi/\omega} (G_1 \sin \omega t \cos \omega t + G_2 \cos^2 \omega t) dt = \pi G_2 \gamma_0^2 \quad (7.12)$$



Слика 7.1



Слика 7.2

Максимална еластична енергија  $U$  је дефинисана као област испод линије ОА

$$U = \frac{1}{2} G_1 \gamma_0^2 \quad (7.13)$$

Однос дисипиране енергије по циклусу  $U$  је коефицијент губитка *coefficient loss*, или позната као физиолошка хистерезибилност  $\eta$ .

$$\eta = \frac{D}{2\pi U} = \frac{G_2}{G_1} = \tan \phi \quad (7.14)$$

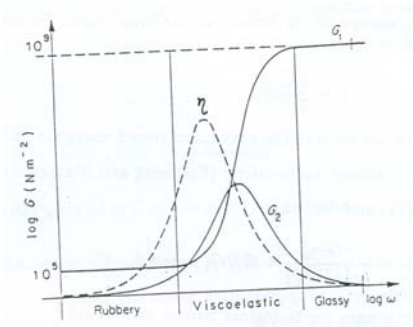
Овај коефицијент има велики значај за биолошка ткива. Сличан приступ се може применити и за комплексну попустљивост  $J^*$ .

$J^* = J_1 - iJ_2$ , при чему важи

$$J^* = 1/G^* \quad (7.15)$$

#### Експериментално одређивање динамичких модула

Разматрају се комплексни модули као функције фреквенције за типичан вискоеластични материјал слика 7.3, на сличан начин као релаксација напона и попустљивост на пузање у функцији времена. На ниским фреквенцијама материјал се понаша „гумасто“ са  $G_1 \approx 10^5 \text{ N/m}^2$  и не зависи од фреквенције и где је  $G_2 \approx 0$ . На високим фреквенцијама понашање је „стакласто“ и  $G_1 \approx 10^9 \text{ N/m}^2$ , независна од фреквенције и  $G_2 \approx 0$ . У средњем делу  $G_i, i=1,2$ , су зависне од фреквенције где  $G_1$  монотонно расте док  $G_2$  достиже максимум.



Слика 7.3

#### Осцилаторно понашање модела (Максвелов, Келвин-Војтов)

##### Максвелов модел

Ако се узме да је на улазу  $\gamma = \gamma_0 \exp(i\omega t)$  и да је  $\dot{\gamma} = i\omega \gamma$  на основу да је  $T = G^* \gamma$  и Максвеловог модела

$$\dot{\gamma} = \frac{\dot{T}}{\mu} + \frac{T}{\beta} \text{ добија се}$$

$$\frac{G_1}{\tau} - \omega G_2 + i \left( \omega G_1 + \frac{G_2}{\tau} - \omega \mu \right) = 0 \quad (7.16)$$

односно:

$$G_1 = \frac{\mu \omega^2 \tau^2}{1 + \omega^2 \tau^2}, \quad G_2 = \frac{\mu \omega \tau}{1 + \omega^2 \tau^2}, \quad \eta = \frac{1}{\omega \tau} \quad (7.17)$$

Гумасто понашање  $\omega \rightarrow 0$   $G_1 \rightarrow 0$ ,  $G_2 \rightarrow 0$ ,  $\eta \rightarrow \infty$  што не одговара типичном понашању полимера. Стакласто понашање тј. при  $\omega \rightarrow \infty$   $G_1 \rightarrow \mu$ ,  $G_2 \rightarrow 0$ ,  $\eta \rightarrow 0$  што је конзистентно са типичним понашањем полимера (види одговарајућу сл. из претходне лекције 6).

##### Келвин-Војтов модел

На сличан начин за Келвин-Војтов модел  $T = \mu \gamma + \beta \dot{\gamma}$  добија се да је:

$$G_1 = \mu, \quad G_2 = \omega \beta, \quad \eta = \omega \tau \quad (7.18)$$

Гумасто понашање је за  $\omega \rightarrow 0$  следи  $G_1 = \mu$ ,  $G_2 = 0$ ,  $\eta = 0$  што одговара типичном понашању полимера. Стакasto понашање при  $\omega \rightarrow \infty$   $G_1 \rightarrow \mu$ ,  $G_2 \rightarrow \infty$ ,  $\eta \rightarrow \infty$  што није у сагласности са понашањем полимера.

### Веза између комплексног модула и модула релаксације напона

На основу Болцмановог суперпозиционог принципа

$$T(t) = \int_{-\infty}^t G(t-\tau) \dot{\gamma}(\tau) d\tau \quad (7.19)$$

и узимањем да је  $\gamma(\tau) = \gamma_0 \exp(i\omega\tau)$  заменом у претходни интегрални израз (при чему је искоришћена смена  $\xi = t - \tau$ ) следи:

$$T(t) = i\omega\gamma(t) \int_0^{\infty} G(\xi) e^{-i\omega\xi} d\xi \quad (7.20)$$

променом  $\xi \rightarrow \tau$  и дељењем са  $\gamma(t)$  добија се:

$$\frac{T(t)}{\gamma(t)} = i\omega \int_0^{\infty} G(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau = G^*(\omega) = G_1(\omega) + iG_2(\omega) \quad (7.21)$$

тј.

$$G_1(\omega) = \omega \int_0^{\infty} G(\tau) \sin \omega\tau d\tau, \quad G_2(\omega) = \omega \int_0^{\infty} G(\tau) \cos \omega\tau d\tau \quad (7.22)$$

Претходне једначине су синус и косинус Фуријеве трансформације, респективно. На основу тих израза добија се да познавањем  $G(t)$  можемо одредити динамичке модуле  $G_1(\omega), G_2(\omega)$  применом Фуријеве трансформације (7.22).

Обрнуто ако су познати динамички модули  $G_1(\omega), G_2(\omega)$  инверзном Фуријевом трансформацијом можемо одредити  $G(t)$ . Динамичка попустљивост се може на сличан начин одредити:

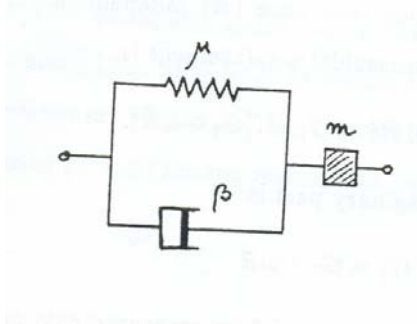
$$J_1(\omega) = \int_0^{\infty} \frac{dJ(\tau)}{d\tau} \cos \omega\tau d\tau, \quad J_2(\omega) = - \int_0^{\infty} \frac{dJ(\tau)}{d\tau} \sin \omega\tau d\tau \quad (7.23)$$

ако је позната попустљивост на пузање  $J(t)$ . Међутим, уместо Фуријеве трансформације чешће се користе Лапласова трансформација где је сада комплексна променљива  $s = j\omega$  тј.

$$G^*(\omega) = s \int_0^{\infty} G(\tau) e^{-s\tau} d\tau \quad (7.24)$$

## ЭФЕКТИ ИНЕРЦИЈЕ И ЧИСТЕ ЊУТНОВСКЕ ВИСКОЗНОСТИ

### Эфекти инерције



Слика 7.4

Динамичко понашање еластичних чврстих тела укључује инерцијалне ефекте. Добро је познато да у случају еластичних чврстих тела, присуство инерције (масе) води ка диференцијалној једначини осцилација чврстих тела, познатој као хармонична једначина (једначина хармонијског осциловања). Уопштено, ефекат инерције је такав да узрокује смањење меморијског модула (нагомилавања),  $G_1$ . У циљу илустровања разматра се серијски Kelvin-Voigt-ов модел са концентрисаном масом (слика 7.4).

Диференцијална једначина кретања овог модела је:

$$T = m\ddot{\gamma} + \beta\dot{\gamma} + \mu\gamma, \quad (7.25)$$

где је  $m$  маса. За  $\gamma = \gamma_0 \exp(i\omega t)$  из једначине 7.25 следи да је

$$G^* = \mu - \omega^2 m + i\omega\beta. \quad (7.26)$$

Реални део  $G^*$  једнак је  $\mu - \omega^2 m$ . Пошто је за Kelvin-Voigt-ов модел  $G^* = \mu$ , следи да инерција изазива смањење модула нагомилавања. Негативни знак силе инерције указује да је ван фазе са  $\gamma$  за  $\pi$ . Према томе, реалан део једначине (7.26) ће бити обележен са  $G_1'$ . Једначина (7.26) такође указује да инерција не утиче на имагинарни део  $G^*$ , тј.  $G_2$ . Уопште, може се писати

$$G_1' = G_1 - \omega^2 m. \quad (7.27)$$

Концентрисана маса изазива смањење  $G_1'$  са квадратом фреквенције. Она не утиче на  $G_2$ . Међутим, маса се дистрибуира уместо да се распоређује (дистрибуира), инерција може да утиче и на нагомилавање и на расипање енергије. У овом разматрању, пажња се обраћа на ниске фреквенције где су ефекти инерције занемарљиви и према томе, овај проблем се неће детаљније разматрати. Важно је приметити да су током мерење осцилација присутни инерцијални ефекти, тј. мери се  $G_1'$ . Одатле, у циљу добијања  $G_1$ , мора се извршити корекција измерених вредности укључујући ефекте инерције.

### „Чисти Њутновски“ ефекти

Ако материјал испољава чисту вискозну отпорност ( $R$ ) независно од вискоеластичних процеса, онда је укупни одговор на синусоидално померање

$$T = G^* \gamma + R\dot{\gamma} = G_1 + i(G_2 + \omega R). \quad (7.28)$$

Из једначине (7.28) следи да је имагинарни део

$$G_2' = G_2 + \omega R \quad (7.29)$$

и да не утиче на  $G_1$ . Према томе, на основу осцилаторних мерења може се добити  $G_2'$ . У циљу израчунавања  $G_2$ , треба проценити  $R$ . Један од начина да ово буде урађено је на следећи начин.

Ако материјал има широк спектар временских константи, онда је  $G_2$  неосетљиво на промене фреквенције. Према томе,  $G_2' / \omega = G_2 / \omega + R \rightarrow R$ , као  $\omega \rightarrow \infty$ , тј. мерењем  $G_2'$  при високим фреквенцијама, може се проценити  $R$ .

Узимајући у обзир ефекте фреквенције и инерције, за израчунавање хистерезности ( $\eta$ ) из експерименталних података потребно је применити следећу једначину

$$\eta = \frac{G_2}{G_1} = \frac{G_2' - \omega R}{G_1' + \omega^2 m}. \quad (7.30)$$

### **Понашање ткива које може бити описано преко линеарне вискоеластичности**

Иако већина биолошких ткива испољава нелинеарно динамичко понашање, има оних који у нормалним физиолошким условима могу бити окарактерисана као линеарно вискоеластична. Плућно ткиво је пример једног таквог. Даље, феномени као што су пузање или релаксација напона су суштински вискоеластични и често да би били испитивани користи се линеарна вискоеластичност чак и ако је уопштено понашање ткива нелинеарно.

Важно је запазити да посматрања указују на то да биолошка ткива имају релативно интензиван хистерезис у односу на брзину деформације. Ово указује да хистерезност није много преко широког опсега фреквенција. У терминима линеарне вискоеластичности може се постићи континуалном расподелом временских константи. Ово такође подразумева то да може доћи до релаксације напона после продуженог периода времена. Према томе, тешко је добити поуздан (веродостојан) закон вискоеластичности који је базиран на пуној релаксацији еластичног понашања. Ово је још један разлог зашто треба да се покуша да се формулише вискоеластично понашање за време периодичног напрезања пре него током пузања или релаксације напона.

### **Плућно ткиво**

Студије динамичког понашања плућног ткива указују да се у нормалном опсегу фреквенција и амплитуда дисања (познате као tidal запремине  $V_T$ ) плућно ткиво понаша суштини као линеарно вискоеластично чврсто тело. Уобичајено, у респираторној физиологији, еластичност (elastance) ( $E_{dyn}$ ) и резистентност ткива ( $R_{rs}$ ) користе се уместо модула нагомилавања и модула губитака (loss), респективно. Понекад, уместо динамичке еластичности, користи се реципрочна вредност динамичке попустљивости (compliance) ( $C_{dyn}$ ). Динамичка еластичност је идентична као и меморијски модул (нагомилавања) и резистентност ткива је једнака  $G_2 / \omega$ .

Експериментално је показано да плућно ткиво имају широк опсег временских константи и према томе њихова понашања

релаксације напона ће се десити ван продуженог периода времена (Hildebrandt, 1969). Ово такође указује на то да хистерезис зависи са малом фреквенцијом у интервалу времена у односу на опсег временских константи. Hildebrandt је нашао да се понашање релаксације напона плућног ткива у широком опсегу временских константи може бити апроксимирано емпиријском релацијом која је дата једначином

$$G(t) = A - B \log t, \quad A, B = \text{const} \quad (7.31)$$

Користећи ову везу, може се показати да за плућа важи

$$E_{\text{dyn}} = A + 0,25B + B \log \omega, \quad R_{\text{is}} = \frac{\pi B}{4,6\omega},$$

$$\eta = \frac{\pi}{4,6(A/B + 0,25 + \log \omega)}. \quad (7.32)$$

#### Домаћи задатак - плућа

Hildebrandt (1969) је добио следеће резултате из релаксације напона исеченог плућног ткива

(7.33)

$t [\text{sec}]$	$G(t) [cmH_2O / ml]$
0,1	0,130
1,0	0,120
2,0	0,115
10,0	0,110
50,0	0,105

Уклопити једначину (7.31) у ове податке користећи бар квадратну технику (тј. линеарну регресију). Од оваквих добијених вредности  $A$  и  $B$ , треба предвидети  $E_{\text{dyn}}$  и  $\eta$ . Упоредити своја предвиђања са доле датим подацима за  $E_{\text{dyn}}$  и  $\eta$

$f [Hz]$	$E_{\text{dyn}} [cmH_2O / ml]$	$\eta$
0,01	0,102	0,158
0,10	0,110	0,140
1,00	0,120	0,126
2,00	0,120	0,130

(7.34)

Очигледно линеарно опадање  $G(t)$  по  $\log t$  сугерише да напон не достиже плато (ниво) између посматраних интервала времена. Са друге стране, најмања посматрана фреквенција била је 0,01 Hz, што сугерише да се релаксација напона може наставити на сличан начин преко интервала већих од 10 минута. На основу ових посматрања, Hildebrandt (1970) је размишљао да пошто се „нешто од плућне еластичности задржава и до касне доби, може

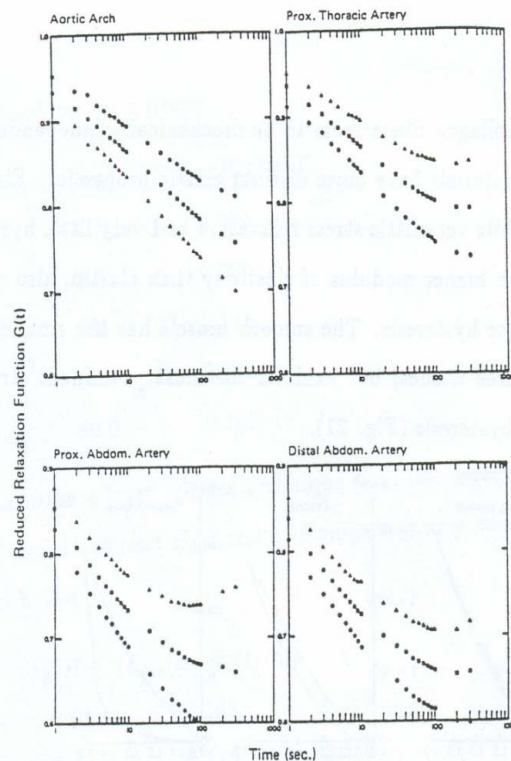
се закључити да најдуже временске константе морају бити добре бар 100 година“.

## Крвни судови

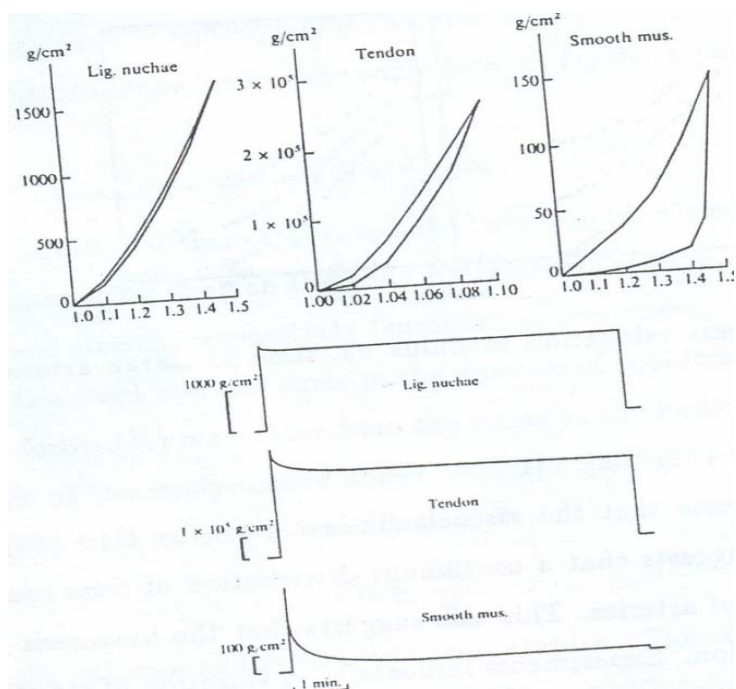
Више детаља о овој теми може се наћи код Fung (1980). Крвни судови, артерије и вене су комплекси ткивних структура састављени првенствено од еластина, колагена и глатких мишићних ћелија. Еластин и глатке мишићне ћелије су међусобно повезане, док колагенска влакна изгледају механички независна од претходна два. Ова три материјала имају прилично различите еластичне особине. Еластин је скоро савршено еластичан и испољава веома малу релаксацију напона и веома мали хистерезис. Колаген иако има много више модуле еластичности него еластин, такође испољава већу релаксацију напона и већи хистерезис. Глатки мишићи имају најмање модуле еластичности од ова три ткива, али испољавају најистакнутију релаксацију напона и најистакнутији хистерезис (слика 7.5).

Релативна количина еластина, колагена и глатких мишића варира дуж артеријског стабла. Еластин је много заступљенији у великим артеријама, док су у малим артеријама колаген и глатки мишићи доминантнији. Ово се одражава на њихово вискоеластично понашање. Експериментално добијање података указује да је релаксација напона бржа у малим артеријама него у великим артеријама што је у ствари рефлексција релативног доприноса еластина, колагена и глатких мишића (слика 7.6).

Треба запазити да слика 7.6 сугерише да се вискоеластични закон дат једначином 7.31 примењује у случају артерија. Ово сугерише да је континуална расподела временских константи такође карактерисана вискоеластичношћу артерија. Ово такође сугерише да хистерезис није веома осетљив на брзину деформације. Експерименти указују на то да промена брзине истезања од 0,001 до 1,0 дужина/сек не утиче значајно на хистерезис. Интересантно, пузање је много мање присутно него релаксација напона. Шта више, неповратно је; након дугог периода времена узорак се не враћа на своју првобитну дужину, након што је оптерећење уклоњено. Ово



Слика 7.5. Хистерезис напон - однос издужења (врх) и релаксације напона - време (дно) еластина (лигамент *nuchae*), колаген (*tendon*) и глатки мишићи



Слика 7.6. Нормализовани модули релаксације напона - време за велике артерије (врх) и мале артерије (дно).

наговештава да је или дошло до течења или је у питању неки нелинеарни феномен.

*Питања:*

1. Зашто се користи, испитује осцилаторно понашање биолошких ткива.
2. Дефинисати хистеризибилност  $\eta$ , значај.
3. Експериментално одређивање динамичких модула, сл. 7.3
4. Осцилаторно понашање Максвеловог модела.
5. Осцилаторно понашање Келвин Војтовог модела.
6. Веза између комплексног модула и модула релаксације напона
7. Ефекти инерције
8. Понашање ткива које може бити описано преко линеарне вискоеластичности-пример плућа

### **Задатак 1**

Показати да је за стандардни линеарни модел чврстог тела

$$G_1 = \mu_r \frac{1 + \omega^2 \tau_\gamma \tau_\tau}{1 + \omega^2 \tau_\gamma^2}, \quad G_2 = \omega \mu_r \frac{\tau_\tau - \tau_\gamma}{1 + \omega^2 \tau_\gamma^2}, \quad \eta = \omega \frac{\tau_\tau - \tau_\gamma}{1 + \omega^2 \tau_\gamma \tau_\tau}$$

### **Задатак 2**

Нацртати сличан дијаграм на основу слике 7.3 али сада за комплексну  $J$  (попустљивост на пузање) у зависности од фреквенције,