Први колоквијум 2022.

1. Израчунати $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x\sin x}-1}{e^{x^2}-1}$.

   Коришћењем Маклореновог развоја $\sin x = x + o(x)$ и $e^x = 1 + x + o(x)$ кад $x \to 0$, добијамо $e^{x^2} = 1 + x^2 + o(x^2)$ и $\sqrt{1+x\sin x} = \sqrt{1+x^2+o(x^2)}$, па можемо користити Маклоренов развој $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + o(x)$ па имамо $\sqrt{1+x^2+o(x^2)} = 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$.

   Дакле, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x\sin x}-1}{e^{x^2}-1} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{1+\frac{x^2}{2}+o(x^2)-1}{1+x^2+o(x^2)-1} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{x^2}{2}+o(x^2)}{x^2+o(x^2)} = \frac{1}{2}$. Друга група је имала $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{1+x\sin x}}{e^{x^2}-1}$.

2. Наћи Тејлоров полином трећег степена за функцију $y = x\sqrt[3]{x+1}$ у околини тачке $a = 1$.

   Дату функцију ћемо написати у облику полинома $T_3(x) = y(1) + \frac{y'(1)}{1!}(x-1) + \frac{y''(1)}{2!}(x-1)^2 + \frac{y'''(1)}{3!}(x-1)^3$. Дакле, имамо $y'(x) = \sqrt[3]{x+1} + \frac{1}{3}x\cdot(x+1)^{\frac{-2}{3}} = \sqrt[3]{x+1} + \frac{x}{3\sqrt[3]{(x+1)^2}} = \frac{3(x+1)+x}{3\cdot\sqrt[3]{(x+1)^2}} = \frac{4x+3}{3\cdot\sqrt[3]{(x+1)^2}}$.

   Одатле, $y''(x) = \frac{4\cdot 3\cdot\sqrt[3]{(x+1)^2}-(4x+3)\cdot 3\cdot\frac{2}{3}(x+1)^{\frac{-1}{3}}}{9\cdot\sqrt[3]{(x+1)^4}} = \frac{12(x+1)-8x-6}{9\cdot\sqrt[3]{(x+1)^5}} = \frac{4x+6}{9\cdot\sqrt[3]{(x+1)^5}}$,
   па је $y'''(x) = \frac{4\cdot 9\cdot\sqrt[3]{(x+1)^5}-(4x+6)\cdot 9\cdot\frac{5}{3}\sqrt[3]{(x+1)^2}}{81\cdot\sqrt[3]{(x+1)^{10}}} = \frac{36(x+1)-60x-90}{81\cdot\sqrt[3]{(x+1)^8}} = \frac{-24x-54}{81\cdot\sqrt[3]{(x+1)^8}}$.
   Израчунавањем функције и датих извода у тачки $x = 1$, добијамо $y(1) = \sqrt[3]{2}$, $y'(1) = \frac{7}{3\cdot\sqrt[3]{4}} = \frac{7\sqrt[3]{2}}{6}$, $y''(1) = \frac{10}{9\cdot\sqrt[3]{2^5}} = \frac{5\cdot\sqrt[3]{2}}{18}$ и $y'''(1) = \frac{-78}{81\sqrt[3]{2^8}} = \frac{-13\sqrt[3]{4}}{108}$.
   Тејлоров полином је $T_3(x) = \sqrt[3]{2} + \frac{7\sqrt[3]{2}}{6}(x-1) + \frac{5\cdot\sqrt[3]{2}}{36}(x-1)^2 - \frac{13\sqrt[3]{4}}{648}(x-1)^3$.

   Друга група је имала исту функцију у околини тачке $a = 2$.

Први колоквијум 2023.

3. а) Наћи Маклоренове полиноме другог степена за функције $y_1 = \frac{\ln(1+x)}{\sin x}$ и $y_2 = \frac{\ln(1+\sin x)}{x}$.

   Користићемо Маклоренове развоје функција $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$, $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$ и $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + o(x)$.

   Дакле, $y_1 = \frac{\ln(1+x)}{\sin x} = \frac{x-\frac{x^2}{2}+o(x^2)}{x-\frac{x^3}{3!}+o(x^3)} = \frac{x(1-\frac{x}{2}+o(x^2))}{x(1-\frac{x^2}{6}+o(x^2))} = \frac{1-\frac{x}{2}+o(x^2)}{1-\frac{x^2}{6}+o(x^2)} = (1-\frac{x}{2}+o(x^2))\cdot(1-\frac{x^2}{6}+o(x^2))^{-1} = (1-\frac{x}{2}+o(x^2))\cdot(1+\frac{x^2}{6}+o(x^2))$. Множењем датих заграда до x^2 добијамо $y_1 = 1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{6}+o(x^2)$. Слично, $1+\sin x = 1+x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)$, па је $\ln(1+\sin x) = \ln(1+x-\frac{x^3}{6}) = (x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)) - \frac{(x-\frac{x^3}{6}+o(x^3))^2}{2} + o(x^3) = x - \frac{x^3}{6} - \frac{1}{2}x^2 + o(x^3)$. Сређивањем добијамо $y_2 = \frac{\ln(1+\sin x)}{x} = \frac{x-\frac{x^3}{6}-\frac{1}{2}x^2+o(x^3)}{x} = 1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{6}x^2 + o(x^2)$.

   б) Израчунати $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+\sin x)^{3/x}-(1+x)^{3/\sin x}}{x^2}$.

   Како је $a^b = e^{\ln a^b} = e^{b\ln a}$, дати лимес се своди на:
   $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{\frac{3\ln(1+\sin x)}{x}}-e^{\frac{3\ln(1+x)}{\sin x}}}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{3(1-\frac{1}{2}x-\frac{1}{6}x^2+o(x^2))}-e^{3(1-\frac{1}{2}x+\frac{1}{6}x^2+o(x^2))}}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{(3-\frac{3}{2}x-\frac{1}{2}x^2+o(x^2))}-e^{(3-\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}x^2+o(x^2))}}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{e^3(e^{-\frac{3}{2}x-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)}-e^{-\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}x^2+o(x^2)})}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{e^3((1-\frac{3}{2}x-\frac{1}{2}x^2+o(x^2))-(1-\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}x^2+o(x^2)))}{x^2} = -e^3$

4. У којим тачкама криве $y = y(x)$ дате једначином $x^2y^2 + xy = 2$ су тангенте паралелне правој $y = 2 - x$.

   Нека је тачка $M(a,b)$ додирна тачка тангенте и криве. Како је тангента паралелна правој, то је коефицијент правца тангенте $k = -1$. Са друге стране, $k = y'(x_0)$. Диференцирањем једначине криве добијамо $2xy^2 + 2x^2yy' + y + xy' = 0$ тј. $y' = \frac{-2xy^2-y}{2x^2y+x}$. Имамо систем једначина $\frac{-2ab^2-b}{2a^2b+a} = -1$ и $a^2b^2 + ab = 2$. Прва једначина се своди на $(b-a)(2ab+1) = 0$. Дакле, имамо 2 случаја. У случају када је $a = b$, из друге једначине добијамо $a^4 + a^2 = 2$ Решења ове једначине су $a = 1$ или $a = -1$, па добијамо две тачке $M_1(1,1)$ и $M_2(-1,-1)$. Случај када је $2ab + 1 = 0$ нема решења.

Први колоквијум 2024.

5. Израчунати $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x - x\sqrt[3]{2-\cos 3x}}{x^3}$.

   Коришћењем Маклореновог развоја $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$ и $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ кад $x \to 0$, добијамо $\cos 3x = 1 - \frac{9x^2}{2} + o(x^2)$ и $\sqrt[3]{2-\cos 3x} = \sqrt[3]{1 + \frac{9x^2}{2} + o(x^2)}$, па можемо користити Маклоренов развој $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + o(x)$ па имамо $\sqrt[3]{1 + \frac{9x^2}{2} + o(x^2)} = 1 + \frac{3}{2}x^2 + o(x^2)$.

   Дакле, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x - x\sqrt[3]{2-\cos 3x}}{x^3} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) - x\cdot(1+\frac{3}{2}x^2 + o(x^2))}{x^3} = \frac{\frac{-10}{6}x^3 + o(x^3)}{x^3} = -\frac{5}{3}$.

6. Наћи Маклоренов полином другог степена функције $y = y(x)$ дате имплицитно једначином $ye^y = xe^x + e$,при чему је $y(0) = 1$.

   Диференцирањем дате једначине имамо: $y'e^y + ye^y y' = e^x + xe^x$, тј. $y' = \frac{e^x(x+1)}{e^y(1+y)}$. Даљим диференцирањем добијамо $y'' = \frac{(e^x(x+1)+e^x)e^y(1+y) - e^x(x+1)(e^y y'(1+y) + e^y y')}{e^{2y}(1+y)^2}$. За $x = 0$ и $y = 1$ добијамо $y'(0) = \frac{1}{2e}$ и $y''(0) = \frac{8e-3}{8e^2}$. Тражени Маклоренов полином је $T_2(x) = 1 + \frac{1}{2e}x + \frac{8e-3}{16e^2}x^2$.