- Rad sila na elementarnom i konačnom pomeranju mat. tačke i materijalnih sistema
- Kinetička energija
- Zakon promene kinetičke energije mat. sistema

Elementarno stvarno pomeranje tačke M (EVP) na intervalu vremena $[t, t+dt]$

Neka je poznata konačna jednačina kretanja tačke M: $\vec r = \vec r(t)$

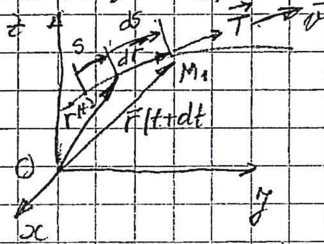
Posmatra se beskonačno malo, ESP, tačke (napadne tačke sile) na bilo kom intervalu vremena $[t, t+dt]$, $d\vec r$,

$d\vec r = \vec r(t+dt) - \vec r(t)$, $\quad d\vec r = \vec v\, dt \qquad (1)$

gde je $\vec r = \vec{OM}$ vektor položaja tačke M u odnosu na nepokretan pol, i

$\vec v = \dot{\vec r}$ brzina tačke

Pri ovom pomeranju u odnosu na Dekartov KS Oxyz dolazi do promene Dekartovih koordinata tačke M u trenutku t: $x = x(t)$, $y = y(t)$ i $z = z(t)$ za vrednosti dx, dy, dz, tako da su koordinate tačke u trenutku $t_1 = t+dt$:



$x(t+dt) = x(t) + dx$, $\quad dx = \dot x(t)\, dt$

$y(t+dt) = y(t) + dy$, $\quad dy = \dot y(t)\, dt$

$z(t+dt) = z(t) + dz$, $\quad dz = \dot z(t)\, dt \qquad (2)$

i $\boxed{d\vec r = dx\,\vec i + dy\,\vec j + dz\,\vec k, \quad \vec v = \dot x\,\vec i + \dot y\,\vec j + \dot z\,\vec k}$

Takođe, pošto se pomeranje tačke vrši duž trajektorije ESP na intervalu vremena $[t, t+dt]$, $d\vec r$ može biti iskazano preko diferencijalne promene lučne koordinate $s = s(t)$ tačke u trenutku t a tokom intervala dt:

$\left.\begin{array}{l} d\vec r = \vec v\, dt \\ \vec v = \dot s(t)\,\vec T \end{array}\right| \Rightarrow d\vec r = \dot s(t)\, dt \cdot \vec T$ i $\boxed{d\vec r = ds\,\vec T} \qquad (3)$

$\boxed{(ds \approx s(t+dt) - s(t)),\ ds = \dot s\, dt}$

Ako je pak kretanje tačke određeno generalisanim koordinatama q_j, $j = 1..n$ tada je

$x = x(q_j)$, $y = y(q_j)$, $z = z(q_j) \Rightarrow \vec r = x(q_j)\,\vec i + y(q_j)\,\vec j + z(q_j)\,\vec k$,

pri čemu su konačne jednačine kretanja: $q_j = q_j(t)$.

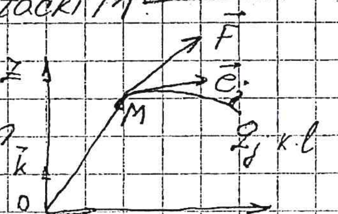
Posmatrano ESP $d\vec r$ na intervalu dt je: $\qquad (4)$

$d\vec r = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \vec r}{\partial q_j} dq_j$, $\quad \frac{\partial \vec r}{\partial q_j} = \vec e_j(q_k)$, $j, k = 1..n$, i $\boxed{d\vec r = \sum_{j=1}^{n} \vec e_j\, dq_j}$

gde su: $\boxed{dq_j = \dot q_j\, dt}$ $\quad \boxed{\vec v = \sum_{j=1}^{n} \dot q_j\, \vec e_j}$

$\vec e_j = \frac{\partial \vec r}{\partial q_j}$, vektori tangentni na q_j-koordinatne linije u tački M.

Elementarni stvarni rad sile $\vec F$.



Elementarni stvarni rad (elementarni rad) $\vec F$ koja deluje tačku M predstavlja rad te sile na bilo kom elementarnom stvarnom pomeranju te tačke, $d\vec r$, tj. na pomeranju tačke M na bilo kom intervalu vremena beskonačno male dužine dt, $[t, t+dt]$

$\boxed{\delta A(\vec F) \overset{def}{=} \vec F \cdot d\vec r} \qquad (5)$

ili

$\delta A(\vec F) = \vec F \cdot \vec v\, dt \qquad (5')$

Da bi se odredio **rad sile** $\vec F$ **na konačnom pomeranju tačke** M iz, npr., njenog početnog položaja M_0 u trenutku t_0, u položaj M tačke na njenoj trajektoriji u nekom trenutku t, pri čemu je interval vremena $[t_0, t]$ konačne dužine, potrebno je luk

-2-

trajektorije $\widehat{M_0M}$ izdeliti na beskonačno mnogo segmenata beskonačno malih dužina, odrediti elementarni rad sile $\vec{F}$ na svakom od tih segmeta, a zatim sve tako dobijene radove sabrati. To znači da je rad sile $\vec{F}$ na konačnom pomeranju tačke iz položaja M_0 u položaj M duž trajektorije napadne tačke M sile $\vec{F}$, dat izrazom:

$$A_{M_0-M} = \int_{\widehat{M_0M}} \vec{F}\cdot d\vec{r} \qquad \left(A_{M_0-M} = \int_{\widehat{M_0M}} \delta A\right) \qquad (6)$$

Integral $\int_{\widehat{M_0M}}$ u izrazu za rad sile $\vec{F}$ na konačnom pomeranju M_0-M je krivolinijski, s obzirom na činjenicu da se pravac vektora $d\vec{r}$ poklapa s pravcem tangente na trajektoriji u bilo kojoj tački te trajektorije, tj. pravac vektora $d\vec{r}$ u bilo kojoj tački trajektorije zavisi od oblika te trajektorije. Ukoliko je:

$$\vec{F}\cdot d\vec{r} = H(p)\,dp,$$

gde je $H(p)$ neka skalarna funkcija parametra mehanike p i dp diferencijalna promena tog parametra, onda se krivolinijski integral (6) svodi na običan, određeni integral, tj. važi:

$$A_{M_0-M} = \int_{\widehat{M_0M}} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{p_0=p(t_0)}^{p=p(t)} H(p)\,dp \qquad (7)$$

S obzirom na izraze za ESP tačke, $d\vec{r}$, u različitim koordinatnim sistemima izrazi za elementarni rad sile $\vec{F}$ i njen rad na konačnom pomeranju (6) mogu se transformisati u sledeće izraze:

ⓐ U odnosu na Dekartov KS $Oxyz$, a s obzirom na (2) važi:

$$\left.\begin{aligned} &\delta A(\vec{F}) = \vec{F}\cdot d\vec{r} = F_x dx + F_y dy + F_z dz \quad \text{ili} \quad \delta A(\vec{F}) = (F_x\dot{x} + F_y\dot{y} + F_z\dot{z})\,dt \\ &\text{i} \quad A_{M_0-M} = \int_{\widehat{M_0M}} F_x dx + F_y dy + F_z dz \end{aligned}\right\} (8)$$

gde su F_x, F_y i F_z projekcije $\vec{F}$ na ose KS $Oxyz$: $\vec{F} = F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k}$

ⓑ U prirodnom triedru vezanom za trajektoriju, a s obzirom na (3):

$$\left.\begin{aligned} &\delta A(\vec{F}) = \vec{F}\cdot d\vec{r} = \vec{F}\cdot\vec{T}ds \Rightarrow \delta A(\vec{F}) = F_T\,ds \quad \text{ili} \quad \delta A(\vec{F}) = F_T\,\dot{s}\,dt \\ &\text{i} \quad A_{M_0-M} = \int_{\widehat{M_0M}} F_T\,ds, \end{aligned}\right\} (9)$$

gde je $\vec{F}\cdot\vec{T} = F_T$ projekcija $\vec{F}$ na ort tangente $\vec{T}$

ⓒ U odnosu na generalisane koordinate q_j, $j=1,2,\ldots n$, a s obzirom na (4):

$$\left.\begin{aligned} &\delta A(\vec{F}) = \vec{F}\cdot d\vec{r} = \vec{F}\cdot\sum_{j=1}^{n}\vec{e}_j\,dq_j \Rightarrow \delta A(\vec{F}) = \sum_{j=1}^{n}(\vec{F}\cdot\vec{e}_j)\,dq_j \quad \text{i} \quad \delta A(\vec{F}) = \sum_{j=1}^{n} Q_j^{\vec{F}}\,dq_j \\ &\text{ili} \quad \delta A(\vec{F}) = \left(\sum_{j=1}^{n} Q_j^{\vec{F}}\dot{q}_j\right)dt \\ &\text{i} \quad A_{M_0-M} = \int_{\widehat{M_0M}} \sum_{j=1}^{n} Q_j^{\vec{F}}\,dq_j; \end{aligned}\right\} (10)$$

gde je $Q_j^{\vec{F}} = \vec{F}\cdot\vec{e}_j$ — generalisana sila sile $\vec{F}$ u odnosu na generalisanu koordinatu q_j (nije projekcija na bazni vektor $\vec{e}_j$ koordinatne linije q_j jer je $|\vec{e}_j| \neq 1$)

Rad rezultante sila u tački M:

$\vec{F}_r \sim (\vec{F}_1, \vec{F}_2, \ldots \vec{F}_m) \Rightarrow \vec{F}_r = \sum_{\alpha=1}^{m} \vec{F}_\alpha \Rightarrow \delta A(\vec{F}_r) = \vec{F}_r \cdot d\vec{r} \Rightarrow \delta A(\vec{F}_r) = \left(\sum_{\alpha=1}^{m} \vec{F}_\alpha\right) d\vec{r} \Rightarrow$

$\Rightarrow \delta A(\vec{F}_r) = \sum_{\alpha=1}^{m} \delta A(\vec{F}_\alpha)$ i $A_{M_0-M}(\vec{F}_r) = \sum_{\alpha=1}^{m} A_{M_0-M}(\vec{F}_\alpha)$ (11)

Snaga sile: $P(\vec{F}) \stackrel{def}{=} \frac{\delta A(\vec{F})}{dt} \Rightarrow P(\vec{F}) = \vec{F} \cdot \vec{v}$ (12)

Potencijalna (konzervativna) sila. - Posmatra se sila $\vec{F}$ koja zavisi od položaja tačke na koju deluje: $\vec{F} = \vec{F}(\vec{r})$, tj. $\vec{F} = \vec{F}(x,y,z)$, gde su x, y, z koordinate položaja M tačke u odnosu na KS Oxyz. Funkcija sile $\vec{F} = \vec{F}(x,y,z)$ predstavlja jednačinu stacionarnog polja te sile, s obzirom na činjenicu da će takva sila delovati na posmatranu tačku gde god se ona našla u prostoru.

Elementarni rad ove sile, prema (8) je:

$\delta A(\vec{F}) = F_x(x,y,z)dx + F_y(x,y,z)dy + F_z(x,y,z)dz$ (13)

$(\vec{F} = \{F_x, F_y, F_z\}$ i $F_x = F_x(x,y,z)$, $F_y = F_y(x,y,z)$, $F_z = F_z(x,y,z))$

Izraz na desnoj strani izraza (13) u opštem slučaju nije totalni diferencijal neke skalarne funkcije $U = U(x,y,z)$, tj nema oblik: $dU = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy + \frac{\partial U}{\partial z}dz$, odnosno, **u opštem slučaju** je:

$\boxed{\delta A(\vec{F}) \neq dU} \Rightarrow \delta A(\vec{F}) \neq \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy + \frac{\partial U}{\partial z}dz$ (14)

Sila $\vec{F}$ za koju važi (14) zove se **nekonzervativna ili nepotencijalna sila.**

Ako, pak, za polje sila postoji skalarna funkcija U, odnosno funkcija $U = -E_p(x,y,z)$, za koju važi: $\delta A = dU$, tj. $\boxed{\delta A = -dE_p}$ (15)

onda je sila $\vec{F}$ **potencijalna, odnosno konzervativna sila**, a funkcija $E_p = E_p(x,y,z)$ predstavlja **potencijalnu energiju polja sile.** Iz (13) i (15) tada sledi da je:

$\delta A = -\frac{\partial E_p}{\partial x}dx - \frac{\partial E_p}{\partial y}dy - \frac{\partial E_p}{\partial z}dz = F_x dx + F_y dy + F_z dz \Rightarrow \left.\begin{array}{l} F_x = -\partial E_p/\partial x \\ F_y = -\partial E_p/\partial y \\ F_z = -\partial E_p/\partial z \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\vec{F} = -\mathrm{grad}\, E_p}$ (16)

Rad potencijalne sile na konačnom pomeranju je:

$A_{M_0-M} = -\int_{\overset{\frown}{M_0 M}} dE_p = -\int_{E_{p0}=E_p(M_0)}^{E_p=E_p(M)} dE_p \Rightarrow A_{M_0-M} = -(E_p(M) - E_p(M_0)) \Rightarrow \boxed{A_{M_0-M} = -(E_p - E_{p0})}$ (17)

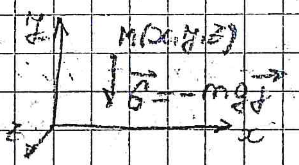
Svojstva:

1. - Rad potencijalne sile **ne zavisi od oblika putanje tačke** (napadne tačke sile), već od vrednosti E_p u početnom i krajnjem položaju tačke
2. - Rad sile na zatvorenoj trajektoriji je nula
3. Za $E_p(M_0) = 0 \Rightarrow A_{M_0-M} = -E_p(M) \Rightarrow \boxed{A_{M-M_0} = +E_p(M)} \Rightarrow$ Potencijalna energija polja u nekoj tački jednaka je radu koji izvrši konzervativna sila pri prelasku tačke iz tog položaja u položaj nultog potencijala.
4. - Potencijalna sila ima pravac normale na **ekvipotencijalnu površ** $E_p(x,y,z) = C$ u tački te površi i usmerena je u stranu smanjivanja potencijalne energije polja.
5. - Rad potencijalne sile na ekvipotencijalnoj površi je jednak nula
6. - Sila $\vec{F} = \vec{F}(x,y,z)$ je potencijalna ako zadovoljava jednačina:

$\boxed{\mathrm{rot}\,\vec{F} = 0} \Rightarrow \frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x}; \frac{\partial F_y}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial y}$ i $\frac{\partial F_z}{\partial x} = \frac{\partial F_x}{\partial z}$

Polje sile. je deo prostora, skup geometrijskih tačaka takav da kada se u bilo kojoj tački tog prostora nađe mat. tačka M određenih fizičkih svojstava na nju počne da deluje sila tog polja. Ako za tačku M u polju sile postoji skalarna funkcija $E_p = E_p(x, y, z)$, gde su (x, y, z) koordinate bilo koga položaja tačke M u tom polju u odnosu na nepokretan DKS, $Oxyz$, takva da se elementarni rad sile polja iz posmatranog položaja može izraziti u obliku: $\delta A = -dE_p$, onda se takvo polje sile naziva stacionarno polje potencijalne sile.
Funkcija $E_p = E_p(x, y, z)$ je potencijalna energija tačke M u posmatranom stacionarnom polju potencijalne sile.

Radovi nekih sila:



① Rad sile homogenog polja zemljine teže:

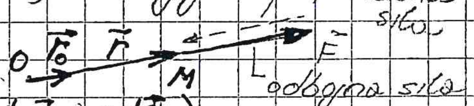
$\delta A=-mgdy$; $A_{M_0-M}=-mg\int_{y_0}^{y}dy=-(mgy-mgy_0)$

$E_p(\vec{G})=mgy$

Ukoliko je osa Oy u smeru sile $\vec{G}$:

$\delta A(\vec{G})=mgdy$, $A_{M_0-M}=mg\int_{y_0}^{y}dy=mg(y-y_0)$, $E_p(\vec{G})=-mgy$

② Rad centralne sile $\vec{F}=\vec{F}(r)$, $r=\overline{OM}$



$\vec{F}=F_r\vec{r}_0=F_r\frac{\vec{r}}{r}$, $F_r=\pm|\vec{F}|$, $F_r=F_r(r)$; $\left(\vec{r}=r\vec{r}_0 \Rightarrow d\vec{r}=dr\vec{r}_0+rd\vec{r}_0 ;\ \vec{r}_0\perp d\vec{r}_0 ;\ \vec{r}_0\cdot\vec{r}_0=1 \Rightarrow \vec{r}_0\cdot d\vec{r}_0=0\right)$

$|\vec{r}_0|=1$

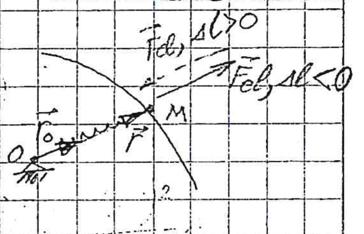
$\delta A(\vec{F})=\vec{F}\cdot d\vec{r}=F_r\frac{\vec{r}\cdot d\vec{r}}{r} \Rightarrow \boxed{\delta A(\vec{F})=F_r(r)dr}$, jer je $\vec{r}\cdot\vec{r}=r^2 \Rightarrow d(\vec{r}\cdot\vec{r})=dr^2 \Rightarrow \vec{r}\cdot d\vec{r}=rdr$

③ Rad Njutnove gravitacione sile (privlačna centralna sila)

$F_r=-k\frac{mM_z}{r^2} \Rightarrow \boxed{\delta A(\vec{F})=-\frac{kmM_z}{r^2}dr}$ $A_{M_0-M}=-kmM_z\int_{r_0}^{r}\frac{dr}{r^2} \Rightarrow \boxed{A_{M_0-M}=-kmM_z\left[\left(-\frac{1}{r}\right)-\left(-\frac{1}{r_0}\right)\right]}$

$\boxed{E_p=-\frac{kmM_z}{r}}$

④ Rad linearne elastične sile (sile linearne opruge)



$\overline{OM}=l=r$, $\Delta l=r-L$, $\vec{F}_{el}=-c\Delta l\,\vec{r}_0$ $\boxed{F_{el,r}=-c\Delta l=-c(r-L)}$

$\boxed{\delta A(\vec{F}_{el})=F_{el,r}dr=-c(r-L)dr}$ $A_{M_0-M}=-\int_{r_0}^{r}c(r-L)dr \Rightarrow$

$\boxed{A_{M_0-M}=\frac{c(\Delta l_0)^2}{2}-\frac{c(\Delta l)^2}{2}}$ $\Delta l_0=r_0-L=l_0-L$, $\Delta l=r-L=l-L$, $\boxed{E_p(\vec{F}_{el})=\frac{c(\Delta l)^2}{2}}$

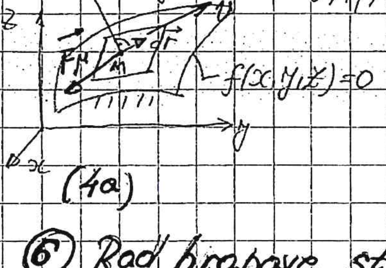
⑤ Rad idealno glatke površi

(5a) stacionarne: $f(x,y,z)=0$, $\vec{N}=\lambda\,\mathrm{grad}f$

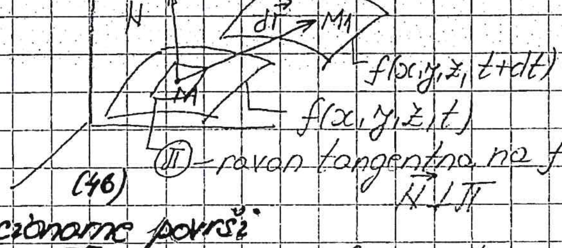
$\delta A(\vec{N})=\vec{N}\cdot d\vec{r}=\lambda\,\mathrm{grad}f\cdot d\vec{r} \Rightarrow \boxed{\delta A(\vec{N})=0}$ $\left(\begin{array}{l} df=\mathrm{grad}f\cdot d\vec{r}=0 \\ d\vec{r}\perp\mathrm{grad}f \end{array}\right)$

(5b) nestacionarne: $f(x,y,z,t)=0$, $\vec{N}=\lambda\,\mathrm{grad}f$

$\delta A(\vec{N})=\vec{N}\cdot d\vec{r}=\lambda\,\mathrm{grad}f\cdot d\vec{r} \Rightarrow \boxed{\delta A(\vec{N})\neq 0}$ $\left(\begin{array}{l} \mathrm{grad}f\cdot d\vec{r}=-\frac{\partial f}{\partial t}dt\neq 0 \\ d\vec{r}\text{ nije upravno na } \mathrm{grad}f \end{array}\right)$



(4a)



(4b)

(Π) – ravan tangentna na $f(x,y,z,t)=0$ u trenutku t
$\vec{N}\perp\Pi$

⑥ Rad hrapave stacionarne površi

$\vec{R}=\vec{N}+\vec{F}_\mu$; $\vec{F}_\mu=-\mu N\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$, $\vec{N}=\lambda\,\mathrm{grad}f$, μ – dinamički koeficijent trenja

$\delta A(\vec{R})=\delta A(\vec{N})+\delta A(\vec{F}_\mu)$, $\delta A(\vec{N})=0 \Rightarrow \delta A(\vec{R})=\delta A(\vec{F}_\mu)$ i $\delta A(\vec{F}_\mu)=-\mu N\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}\cdot d\vec{r} \Rightarrow$

$\Rightarrow \delta A(\vec{F}_\mu)=-\mu N\frac{\vec{v}\cdot\vec{v}dt}{|\vec{v}|}$; za $\vec{v}=\dot{s}\vec{T} \Rightarrow \frac{\vec{v}\cdot\vec{v}}{|\vec{v}|}dt=\frac{\dot{s}ds}{|\dot{s}|}=ds\,\mathrm{sgn}\dot{s}$, jer je $\frac{\dot{s}}{|\dot{s}|}=\begin{cases}1, & \text{za } \dot{s}>0\\ -1, & \text{za } \dot{s}<0\end{cases}$

pa je: $\boxed{\delta A(\vec{F}_\mu)=-(\mu N\,\mathrm{sgn}\dot{s})ds} \Rightarrow \boxed{\delta A(\vec{F}_\mu)=-\mu N|ds|}$ → da bi se našao rad na konačnom pomeranju mora se znati $N=N(s)$

Ako je N=const i tačka ne menja smer kretanja na intervalu $[t_0,t]$

$A_{M_0-M}(\vec{F}_\mu)=-\mu N\int_{s_0}^{s}|ds| \Rightarrow \boxed{A_{M_0-M}=-\mu NS}$

$\boxed{S=|s-s_0| \text{ – pređeni put}}$

Dravske elektrarne Maribor, d.o.o., 2000 Maribor, Obrežna ulica 170, Tel.: +386 (0)2 300 5000, Faks: +386 (0)2 300 5665

Rad sila materijalnog sistema

Razmatra se materijalni sistem N tačaka M_i masa m_i čiji su vektori položaja u odnosu na nepokretni pol O, $\vec{r}_i = \vec{r}_i(t)$ i koje se kreću pod dejstvom sila:

$\vec{F}_{ri} = \vec{F}_{ri}^{\,a} + \vec{F}_{ri}^{\,u.R.V} + \vec{F}_{ri}^{\,S.R.V}$, $i = 1 .. N$ (M_i – napadne tačke sila $\vec{F}_{ri}$)

Elementarni rad bilo koje sile $\vec{F}_{ri}$ na elementarnom stvarnom pomeranju napadne tačke M_i te sile, $d\vec{r}_i$, a koje odgovara intervalu vremena $[t, t+dt]$, je:

$$\delta A_i = \delta A(\vec{F}_{ri}) = \vec{F}_{ri} \cdot d\vec{r}_i \Rightarrow \delta A_i = \delta A_i^{a} + \delta A_i^{u.R.V} + \delta A_i^{S.R.V}$$

dok je rad sile $\vec{F}_{ri}$ na konačnom pomeranju tačke M_i iz početnog položaja M_{io} u trenutku t_o u položaj M_i u trenutku t, pri čemu je dužina intervala $[t_o, t]$ konačna, iznosi:

$$A_{M_{io}-M_i} = \int_{\overset{\frown}{M_{io}M_i}} \vec{F}_{ri} \cdot d\vec{r}_i \Rightarrow A_{M_{io}-M_i} = A^{a}_{M_{io}-M_i} + A^{u.R.V}_{M_{io}-M_i} + A^{S.R.V}_{M_{io}-M_i}, \left(A^{a(u.R.V,\,S.R.V)}_{M_{io}-M_i} = \int_{\overset{\frown}{M_{io}M_i}} \delta A_i^{a(u.R.V,\,S.R.V)}\right)$$

Elementarni rad svih sila u mat. sistemu predstavlja rad svih sila, koje deluju na materijalni sistem, na njegovom elementarnom pomeranju tokom intervala $[t, t+dt]$.

$$\boxed{\delta A \overset{def}{=} \sum_{i=1}^{N} \delta A_i} \quad i \quad \boxed{\delta A = \delta A^{a} + \delta A^{u.R.V} + \delta A^{S.R.V}}$$

gde je $\delta A^{a} = \sum_i \delta A_i^{a}$ – elementarni rad svih aktivnih sila u sistemu

$\delta A^{u.R.V} = \sum_i \delta A_i^{u.R.V}$ – elementarni rad reakcija svih unutrašnjih veza

$\delta A^{S.R.V} = \sum_i \delta A_i^{S.R.V}$ – elementarni rad reakcija svih spoljašnjih veza

Rad svih sila koje deluju na MS na konačnom pomeranju tog MS predstavlja rad tih sila na promeni početnog stanja kretanja mat. sistema „0" u trenutku t_o, a koje je određeno položajima M_{io} tačaka tog materijalnog sistema, $\vec{r}_{io} = \vec{r}_i(t_o)$ i njihovim početnim brzinama $\vec{v}_{io} = \vec{v}_i(t_o)$, u stanje kretanja „1" tog materijalnog sistema u trenutku $t = t_1$ koje je određeno položajima M_i tačaka mat. sistema, $\vec{r}_i = \vec{r}_i(t)$ i njihovim brzinama $\vec{v}_i = \vec{v}_i(t)$, pri čemu je interval vremena $[t_o, t]$ konačne dužine,

$$\boxed{A_{0-1} \overset{def}{=} \sum_{i=1}^{N} A_{M_{io}-M_i}(\vec{F}_{ri})} \Rightarrow \boxed{A_{0-1} = A_{0-1}^{a} + A_{0-1}^{u.R.V} + A_{0-1}^{S.R.V}} \left(A_{0-1}^{a(u.R.V,\,S.R.V)} = \sum A^{a(u.R.V,\,S.R.V)}_{M_{io}-M_i}\right)$$

$$A_{0-1}^{a} = \sum_i A_{M_{io}-M_i}(\vec{F}_{ri}^{\,a}), \quad A_{0-1}^{u.R.V} = \sum_{i=1}^{N} A_{M_{io}-M_i}(\vec{F}_{ri}^{\,u.R.V}), \quad A_{0-1}^{S.R.V} = \sum_{i=1}^{N} A_{M_{io}-M_i}(\vec{F}_{ri}^{\,S.R.})$$

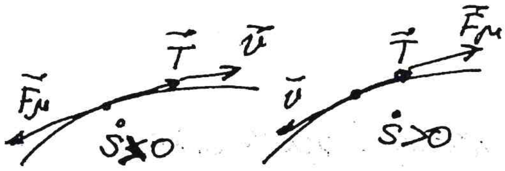
Rad sila mat. sistema, kako na elementarnom, tako i na konačnom, pomeranju mat. sistema određen je sumom radova svih sila koje deluju na mat. sistem a na posmatranom pomeranju tog mat. sistema.

Rad reakcija spoljašnjih i unutrašnjih veza

– Veze i unutrašnje i spoljašnje, u klasičnoj mehanici su: sferni zglob, cilindrični zglob, lako nerastegljivo uže, laki kruti štap i stacionarne površi koje se nalaze u kontaktu sa objektima mat. sistema. Ove veze su geometrijske jer pre svega ograničavaju položaje kontaktnih tačaka objekata mat. sistema sa njima, po samim tim i položaje tih objekata i mat. sistema na vezama u celini. One su stacionarne i zadržavajuće, jer se forma tih veza u vremenu ne menja, a tokom kretanja mat. sistema ne napušta veze.

Elementarni rad reakcija ovakvih spoljašnjih, ali idealnih, veza je uvek nula. Naime, ako u tački M mat. sistema

$$\delta A(\vec F_\mu) = \vec F_\mu \cdot \vec v\, dt = \vec F_\mu \cdot \vec T\, \dot s\, dt$$



$$\left.\begin{array}{l} \dot s>0 \Rightarrow \boxed{\vec F_\mu \cdot \vec T} = -\mu N \\ \dot s<0 \Rightarrow \boxed{\vec F_\mu \cdot T} = \mu N \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\vec F_\mu \cdot \vec T = -\mu N \operatorname{sgn} \dot s}$$

$$\delta A(\vec F_\mu) = -\mu N \underbrace{\operatorname{sgn} \dot s \cdot ds}_{|ds|} \Rightarrow \boxed{\delta A(\vec F_\mu) = -\mu N |ds|}$$

$$|ds| = \begin{cases} ds, & ds>0, (\operatorname{sgn} \dot s = 1) \\ -ds, & ds<0 \ (\operatorname{sgn} \dot s = -1) \end{cases}$$