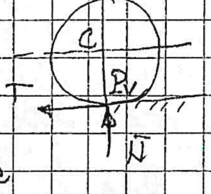
deluje, nakon oslobađanja od spoljašnje idealne veze (opisanog tipa), reakcija $\vec{R}$, tada je njen elementarni rad:

$$\delta A(\vec{R}) = \vec{R} \cdot d\vec{r}_M \quad ili \quad \delta A(\vec{R}) = \vec{R} \cdot \vec{v}_M dt$$

Kako je za veze navedenog tipa ili $\vec{v}_M = 0$ ili $\vec{R} \perp \vec{v}_M$ to je:

$\delta A(\vec{R}) = 0$. Ovo važi i za silu trenja pri kotrljanju bez klizanja tela po nepokretnoj podlozi, s obzirom na činjenicu da je napadna tačka te sile trenutni pol brzina tela, P_v, pa je $v_{P_v} = 0$



Ako su sve spoljašnje veze idealne tada je ukupni elementarni rad reakcija spoljašnjih veza: $\boxed{\delta A^{s.R.} = 0}$

Ako neka od spoljašnjih veza nije idealna, tada se reakcija te veze može razložiti na komponentu reakcije te veze kao idealne, $\vec{N}$, i komponentu koja predstavlja odgovarajuću silu trenja, $\vec{F}_\mu$, tako da je:

$$\vec{R} = \vec{N} + \vec{F}_\mu \Rightarrow \delta A(\vec{R}) = \delta A(\vec{N}) + \delta A(\vec{F}_\mu) \text{ i } \delta A(\vec{N}) = 0 \Rightarrow \delta A(\vec{R}) = \delta A(\vec{F}_\mu) \neq 0$$

Pri određivanju elementarnog rada reakcija neke unutrašnje veze koja je uspostavljena između tačaka M_i i M_j mat. sistema, mora se i jedna i druga tačka osloboditi te veze, i njeno dejstvo na tačku M_i zameniti silom $\vec{R}_{ij}$, a na tačku M_j silom $\vec{R}_{ji}$; pri čemu je $\vec{R}_{ij} = -\vec{R}_{ji}$. To znači da elementarni rad reakcija jedne unutrašnje veze predstavlja sumu radova sila $\vec{R}_{ij}$ i $\vec{R}_{ji}$, tj.:

$$\delta A(\vec{R}_{ij}, \vec{R}_{ji}) = \delta A(\vec{R}_{ij}) + \delta A(\vec{R}_{ji}) \Rightarrow \delta A(\vec{R}_{ij}, \vec{R}_{ji}) = \vec{R}_{ij} \cdot d\vec{r}_i + \vec{R}_{ji} \cdot d\vec{r}_j$$

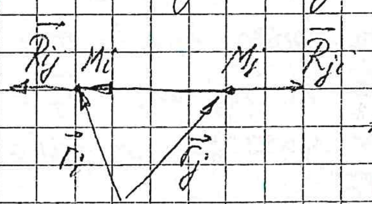
Kako je $\vec{R}_{ji} = -\vec{R}_{ij}$ izraz za elementarni rad sila $\vec{R}_{ij}$ i $\vec{R}_{ji}$ ima oblik:

$$\delta A(\vec{R}_{ij}, \vec{R}_{ji}) = \vec{R}_{ij} \cdot (d\vec{r}_i - d\vec{r}_j) = \vec{R}_{ij} \cdot d(\vec{r}_i - \vec{r}_j) = \vec{R}_{ij} \cdot d\overrightarrow{M_j M_i} \quad (a) \; (*)$$

ili

$$\delta A(\vec{R}_{ij}, \vec{R}_{ji}) = \vec{R}_{ij} \cdot (\vec{v}_{M_i} - \vec{v}_{M_j}) dt \Rightarrow \delta A(\vec{R}_{ij}, \vec{R}_{ji}) = \vec{R}_{ij} \cdot \vec{v}_{M_i}^{M_j} dt \quad (b)$$

Ako je posmatrana unutrašnja veza idealna, geometrijska, stacionarna i zadržavajuća tada je ili



$\vec{R}_{ij}$ i $\vec{R}_{ji}$ su kolinearne sa $\overline{M_j M_i}$

① $\overline{M_i M_j} = const$ $(d\overline{M_i M_j} = 0)$

ili je:

② $\vec{v}_{M_i} = \vec{v}_{M_j} \Rightarrow \vec{v}_{M_i}^{M_j} = 0$

ili je:

③ $\vec{v}_{M_i} \neq \vec{v}_{M_j}$, ali $\vec{R}_{ij} \perp \vec{v}_{M_i}^{M_j}$,

pa je prema (a) ili (b) elementarni rad reakcija posmatrane veze jednak nuli, tj. $\boxed{\delta A(\vec{R}_{ij}, \vec{R}_{ji}) = 0}$

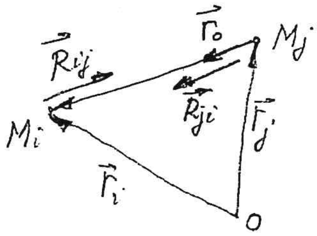
Ako su sve unutrašnje veze navedenog tipa, idealne tada je:

$$\delta A^u = 0$$

a)* $\vec{R}_{ij} = \pm|\vec{R}_{ij}|\,\vec{r}_0$

$\overrightarrow{M_jM_i} = \overline{M_iM_j}\cdot\vec{r}_0$

$d\overrightarrow{M_jM_i} = (d\overline{M_iM_j})\,\vec{r}_0 + \overline{M_iM_j}\,d\vec{r}_0\,,\quad d\vec{r}_0 \perp \vec{r}_0$



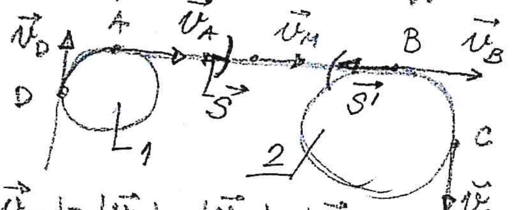
$$\delta A(\vec{R}_{ij},\vec{R}_{ji}) = \vec{R}_{ij}\cdot d\overrightarrow{M_jM_i} = \pm|\vec{R}_{ij}|\left[(d\overline{M_iM_j})\underbrace{\vec{r}_0\cdot\vec{r}_0}_{1} + \overline{M_iM_j}\,\underbrace{\vec{r}_0\cdot d\vec{r}_0}_{0}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\delta A(\vec{R}_{ij},\vec{R}_{ji}) = \pm|\vec{R}_{ij}|\,d\overline{M_iM_j}}$$

$$\overline{M_iM_j} = c_{ij} = const \Rightarrow d\overline{M_iM_j} = 0$$

Sistemi za koje je $\overline{M_iM_j} = c_{ij}$ za sve bilo koji par tačaka nazivaju se neizmenljivi sistemi. Primer: kruto telo.

b) Veza tipa lako-neistegljivo uže – primer



$|\vec{v}_D| = |\vec{v}_A| = |\vec{v}_B| = |\vec{v}_C|$

$\vec{v}_A = \vec{v}_B$

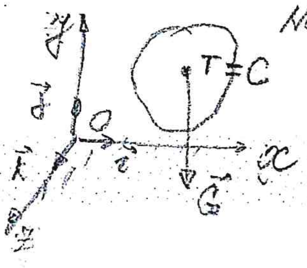
Pošto je uže neistegljivo i nema proklizavanja između užeta i tela 1 i 2 brzine svih tačaka užeta su jednakog intenziteta. Na delu užeta AB koji je pravolinijski važi jednakost vektora brzina tačaka užeta, tj.:

$$\vec{v}_A = \vec{v}_B = \vec{v}_M$$

Sila u užetu u tački A tela 1 je sila $\vec{S}$ koja ima pravac užeta AB, a smer ka tački B, dok je sila u užetu u tački B tela 2, sila $\vec{S}'$ koja, takođe ima pravac užeta AB ali smer ka tački B. Sile $\vec{S}$ i $\vec{S}'$ predstavljaju reakcije unutrašnje veze tipa uže u tačkama A i B tela 1 i 2, respektivno.

$$\delta A(\vec{S},\vec{S}') = \vec{S}\cdot\vec{v}_A\,dt + \vec{S}'\cdot\vec{v}_B\,dt = \vec{S}\cdot(\underbrace{\vec{v}_A - \vec{v}_B}_{0})\,dt = 0$$

Rad sile Zemljine teže koja deluje na kruto telo



Na svaku tačku krutog tela u homogenom polju Njutnove gravitacione sile Zemlje deluje sila teže $d\vec{G} = dm\vec{g}$, pri čemu sistem ovih sila obrazuje sistem paralelnih sila vezanih za tačke tela.

Rezultanta ovog sistema je sila teže krutog tela:

$\vec{G} = \int_m dm\vec{g} \Rightarrow \vec{G} = m\vec{g}$,

čija je napadna tačka, tačka tela koja se naziva težište, a čiji je položaj određen relacijom: $\vec{r}_T = \overrightarrow{OT} = \dfrac{\int dm g\vec{r}}{mg} = \dfrac{1}{m}\int_m dm\vec{r}$

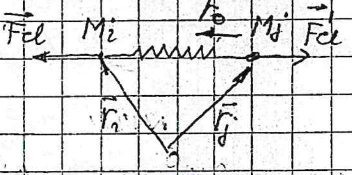
Težište i centar mase tela se poklapaju.

$$\delta A(\vec{G}) = \vec{G}\cdot d\vec{r}_C = -mg\,dy_C$$

$$A_{C_0-C} = \int_{C_0C}\delta A = -mg\int_{y_{C_0}}^{y_C} dy_C \Rightarrow \boxed{A_{C_0-C}(\vec{G}) = -mg(y_C - y_{C_0})}$$

Takođe, rad unutrašnjih sila unutar krutog tela je jednak nuli jer se rastojanje između bilo koje dve tačke (M_i i M_j) tokom kretanja tela ne menja ($\overline{M_iM_j} = const$). Ovakav mat. sistem se naziva neizmenljiv mat. sistem.

Kao primer izmenljivog mat. sistema može da posluži mat. sistema sa oprugom kao unutrašnjom vezom. Ako su tačke M_i i M_j mat. sistema vezane linearnom oprugom tada je:



$\vec R_{ij} = \vec F_{el}$, $\vec R_{ji} = -\vec F_{el}$, $\overline{M_iM_j} = l$, $l = L + \Delta l$

$\vec F_{el} = -c(\Delta l)\vec r_0$; $\overrightarrow{M_jM_i} = l\vec r_0$, $d\overrightarrow{M_jM_i} = (d\overline{M_jM_i})\vec r_0 + \overline{M_jM_i}\, d(\vec r_0)$

$\delta A(\vec F_{el}, \vec F_{el}) = \vec F_{el}\cdot d\overrightarrow{M_jM_i} = -c\Delta l\cdot dl = -c\Delta l \cdot d(\Delta l)$

$\boxed{\delta A(\vec F_{el},\vec F_{el}) = -d\left[\frac{c(\Delta l)^2}{2}\right]} \Rightarrow \boxed{A_{0-1}(\vec F_{el},\vec F_{el}) = \frac{c(\Delta l_0)^2}{2} - \frac{c(\Delta l)^2}{2}} \boxed{E_p \overset{def}{=} \frac{c(\Delta l)^2}{2}}$

Ako neka unutrašnja veza tada u tačkama M_i i M_j nije idealna, tada reakcije $\vec R_{ij}$ i $\vec R_{ji} = -\vec R_{ij}$ treba razložiti na komponente $\vec N_{ij}$ i $\vec T_{ij}$ odnosno, $\vec N_{ji} = -\vec N_{ij}$ i $\vec T_{ji} = -\vec T_{ij}$, gde su $\vec N_{ij}$ i $\vec N_{ji}$ reakcije te veze u tačkama M_i i M_j kao idealne, a $\vec T_{ij}$ i $\vec T_{ji}$ odgovarajuće sile trenja u tim tačkama, tako da je:

$\delta A(\vec R_{ij},\vec R_{ji}) = \delta A(\vec N_{ij},\vec N_{ji}) + \delta A(\vec T_{ij},\vec T_{ji})$ i $\delta A(\vec N_{ij},\vec N_{ji}) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \delta A(\vec R_{ij},\vec R_{ji}) = \delta A(\vec T_{ij},\vec T_{ji})$ $\rightarrow \delta A(\vec T_{ij},\vec T_{ji}) = \vec T_{ij}\cdot d\overrightarrow{M_jM_i}$, ili

$\rightarrow \delta A(\vec T_{ij},\vec T_{ji}) = \vec T_{ij}\cdot(\vec v_{M_i} - \vec v_{M_j})dt = \vec T_{ij}\cdot \vec v_{M_i}^{M_j} dt$

(Brzina $\vec v_{M_i}^{M_j}$ često predstavlja brzinu klizanja tela kome pripada tačka M_i po površini tela kome pripada tačka M_j)

Elementarni rad aktivnih sila u sistemu. — Aktivne sile koje deluju na mat. sistem mogu biti nepotencijalne i potencijalne, pa je:

$\delta A^a = \delta A^{n.pot} + \delta A^{pot}$

Ako u tačkama $M_i(x_i,y_i,z_i)$ mat. sistema deluju potencijalne stacionarne sile $\vec P_i = \vec P_i(x_1,y_1,z_1,\dots x_N,y_N,z_N)$ tada postoji potencijalna energija polja tih sila: $E_p = E_p(x_1,y_1,z_1,\dots,x_N,y_N,z_N)$, takva da važi:

$\boxed{\vec P_i = -\left(\frac{\partial E_p}{\partial x_i}\vec i + \frac{\partial E_p}{\partial y_i}\vec j + \frac{\partial E_p}{\partial z_i}\vec k\right) = -\text{grad}_i E_p}$

i $\delta A^{pot} = \delta A(\vec P_1,\vec P_2,\dots,\vec P_n) = \sum_{i=1}^{N} \vec P_i\cdot d\vec r_i \Rightarrow \delta A^{pot} = -\sum_{i=1}^{N} \text{grad}_i E_p\, d\vec r_i \Rightarrow \boxed{\delta A^{pot} = -dE_p}$

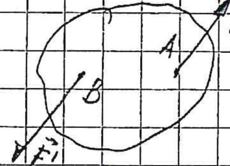
i $A_{0-1}^{pot} = -(E_p(x_i,y_i,z_i) - E_p(x_{i0},y_{i0},z_{i0}))$, tj. $\boxed{A_{0-1} = -(E_p - E_{p0})}$

Rad nepotencijalnih sila $\vec F_1, \vec F_2, \vec F_i, \vec F_n$ se traži po definiciji

$\delta A^{n.pot} = \delta A(\vec F_1,\dots,\vec F_i,\dots\vec F_n) = \sum_{i=1}^{N} \vec F_i\cdot d\vec r_i$

Rad sila na krutom telu

(1) Rad sprega sila $[\vec{F}, \vec{F'}]$ čiji je moment $\vec{M} = \vec{M}_B^{F} = \vec{M}_A^{F'}$, gde su A i B napadne tačke sila $\vec{F}$ i $\vec{F'} = -\vec{F}$ sprega.



$$\delta A[\vec{F}, \vec{F'}] = \vec{F} \cdot d\vec{r}_A + \vec{F'} \cdot d\vec{r}_B = \vec{F} \cdot (d\vec{r}_A - d\vec{r}_B) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \delta A[\vec{F}, \vec{F'}] = \vec{F} \cdot (\vec{v}_A - \vec{v}_B)\, dt$$

Kako je u opštem slučaju: $\vec{v}_A = \vec{v}_B + \vec{v}_A^{B}$, $\vec{v}_A^{B} = \vec{\omega} \times \vec{BA}$

to je: $\delta A[\vec{F}, \vec{F'}] = \vec{F} \cdot \vec{v}_A^{B} dt = (\vec{\omega} \times \vec{BA}) \cdot \vec{F} dt = (\vec{BA} \times \vec{F}) \cdot \vec{\omega}\, dt$

jer važi $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = (\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{a}$

Pošto je $\vec{BA} \times \vec{F} = \vec{M}_B^{F} = \vec{M}$ moment sprega to se dalje može pisati da je rad sprega momenta $\vec{M}$:

$$\boxed{\delta A([\vec{M}]) = \vec{M} \cdot \vec{\omega}\, dt}$$

Ako telo vrši rotaciju oko nepokretne ose Oz ili ravno kretanje pri čemu se rotacija vrši oko translatorne pokretne ose Cz ($Cz \perp S$, $C \in S$ i $S \in Oxy$), onda je i u jednom i u drugom slučaju:

$\vec{\omega} = \omega_z \vec{k}$, $\omega_z = \dot{\varphi}$ i $\vec{M} \cdot \vec{\omega} = M_z \omega_z$, pa je

$$\boxed{\delta A[\vec{M}] = M_z \omega_z\, dt} \text{ i } \boxed{\delta A[\vec{M}] = M_z \dot{\varphi}\, dt = M_z\, d\varphi}$$

Za slučaj da je sprega sila u ravni upravnoj na osu Oz, odnosno Cz, to je: $\vec{M} = M_z \vec{k}$ i $M_z = \pm |\vec{M}|$ pa gornji izraz postaje:

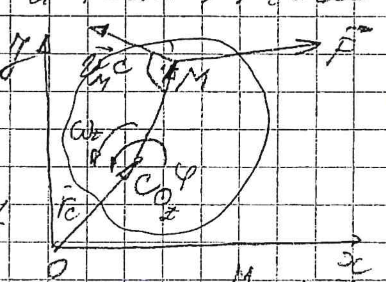
$$\boxed{\delta A([\vec{M}]) = \pm |\vec{M}|\, d\varphi}$$

$$\boxed{M_z = Q_\varphi^{M}}$$

$+$ ako se smer dejstva sprega poklapa sa smerom promene ugla rotacije ($\varphi = \varphi(t)$), tj. sa smerom ugaone brzine $\dot{\varphi}$

$-$ smer dejstva sprega i smer promene ugaone brzine $\dot{\varphi}$ tela različiti

(2) Rad sile na krutom telu koje vrši ravno kretanje čije su jednačine: $x_C = x_C(t)$, $y_C = y_C(t)$ i $\varphi = \varphi(t)$. - U tački M tela deluje sila $\vec{F}$:



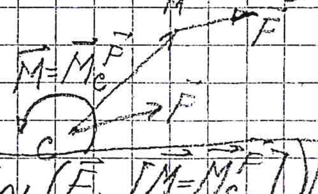
$\delta A(\vec{F}) = \vec{F} \cdot d\vec{r}_M = \vec{F} \cdot \vec{v}_M dt$ i $\vec{v}_M = \vec{v}_C + \vec{v}_M^{C}$

$\vec{v}_M^{C} = \vec{\omega} \times \vec{CM}$

$$\delta A(\vec{F}) = \vec{F} \cdot (\vec{v}_C + \vec{\omega} \times \vec{CM})\, dt = \vec{F} \cdot \vec{v}_C dt + (\vec{\omega} \times \vec{CM}) \cdot \vec{F} dt$$

$$\delta A(\vec{F}) = \vec{F} \cdot \vec{v}_C\, dt + (\vec{CM} \times \vec{F}) \cdot \vec{\omega}\, dt$$

$$\boxed{\delta A(\vec{F}) = \vec{F} \cdot \vec{v}_C\, dt + \vec{M}_C^{F} \cdot \vec{\omega}\, dt}$$



$$\boxed{\vec{F} \sim (\vec{F}, [\vec{M} = \vec{M}_C^{F}])}$$

gde je $\vec{v}_C = \dot{x}_C \vec{i} + \dot{y}_C \vec{j}$ i $\vec{\omega} = \dot{\varphi} \vec{k}$, pa je:

$$\delta A(\vec{F}) = (F_x \dot{x}_C + F_y \dot{y}_C)\, dt + M_{Cz}^{F} \dot{\varphi}\, dt$$

$$\boxed{\delta A(\vec{F}) = F_x\, dx_C + F_y\, dy_C + M_{Cz}^{F}\, d\varphi}$$

Ovakav izraz predstavlja posledicu redukciju sile $\vec F$ iz tačke M u tačku C.

Moment sprega koji se pri tome dodaje je: $\vec M = \vec M_C^{\vec F}$.

Veličine F_x, F_y i $M_{Cz}^{\vec F}$ uz diferencijalne promene generalisanih koordinata: $(q_1 = x_C, q_2 = y_C$ i $q_3 = \varphi)$ tela su generalisane sile sile $\vec F$ po tim generalisanim koordinatama: $Q_{x_C}^{\vec F} = Q_1^{\vec F} = F_x$, $Q_{y_C}^{\vec F} = Q_2^{\vec F} = F_y$ i $Q_\varphi^{\vec F} = Q_3^{\vec F} = M_{Cz}^{\vec F}$

3) Rad sprega sila momenta $\vec M$ na telu koje vrši sferno kretanje oko nepokretne tačke O.-

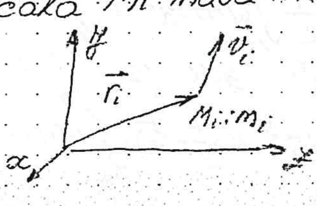
Vektor trenutne ugaone brzine $\vec\omega$ tela koje vrši sferno kretanje oko nepokretne tačke je:
$\vec\omega = \dot{\vec\psi} + \dot{\vec\theta} + \dot{\vec\varphi} = \dot\psi \vec k + \dot\theta \vec n + \dot\varphi \vec\nu$, dok je vektor elementarne rezultujuće rotacije:
$\delta\vec\alpha = \vec\omega dt = \delta\vec\psi + \delta\vec\theta + \delta\vec\varphi \Rightarrow \delta\vec\alpha = d\psi \vec k + d\theta \vec n + d\varphi \vec\nu$, gde su $\vec k, \vec n$ i $\vec\nu$ jedinični vektori nepokretne ose Oz, čvorne ose i sopstvene ose tela $O\zeta$, respektivno, a koje su međusobno upravne.

Rad sprega sila momenta $\vec M$ u ovom slučaju je:
$\delta A[\vec M] = \vec M\cdot\vec\omega dt = (M_z\dot\psi + M_n\dot\theta + M_\zeta\dot\varphi)dt \Rightarrow \delta A[\vec M] = M_z d\psi + M_n d\theta + M_\zeta d\varphi$,
gde su M_z, M_n i M_ζ projekcije vektora $\vec M$ na osu precesije Oz, osu nutacije $O\xi$, i osu sopstvene rotacije $O\zeta$, respektivno. Veličine M_z, M_n i M_ζ uz diferencijalne promene generalisanih koordinata tela: $q_1=\psi$, $q_2=\theta$ i $q_3=\varphi$ su generalisani sile sprega sila momenta $\vec M$ po tim generalisanim koordinatama:
$Q_\psi^{\vec M} = M_z$, $Q_\theta^{\vec M} = M_n$ i $Q_\varphi^{\vec M} = M_\zeta$.

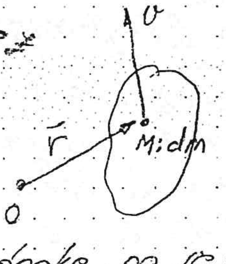
Kinetička energija materijalnog sistema.

1.- Kinetička energija materijalne tačke M_i mase m_i čija je brzina $\vec v_i = \vec v_i(t)$.-
$E_k(M_i) = E_{k_i} = \frac{1}{2} m_i \vec v_i\cdot\vec v_i \Rightarrow \boxed{E_{k_i} = \frac{1}{2} m_i v_i^2} \Rightarrow E_{k_i} = \frac{1}{2} m_i(\dot x_i^2+\dot y_i^2+\dot z_i^2)$

2.- Kinetička energija materijalnog sistema N tačaka M_i masa m_i čije su brzine $\vec v_i = \vec v_i(t)$, $i=1,2,\ldots N$:
$E_k \stackrel{def}{=} \sum_i E_{k_i} \Rightarrow \boxed{E_k = \frac{1}{2}\sum_i m_i v_i^2}$



3) Kinetička energija krutog tela.-
$M: dm$, $\vec v = \vec v(t)$ i $\vec v = \vec v(q_\alpha, \dot q_\alpha) \Rightarrow E_k(M) = d_m E_k = \frac{1}{2} dm\, v^2$



Kinetička energija tela: $E_k = \int_m d_m E_k = \frac{1}{2} \int_m dm\, v^2$

a) Telo vrši translatorno kretanje.- Brzine svih tačaka tela jednake, pa je:
$\vec v = \vec v_C$ i $d_m E_k = \frac{1}{2} dm\, v_C^2$ i $E_k = \frac{1}{2}\int_m dm\, v_C^2 = \frac{1}{2} v_C^2 \int_m dm \Rightarrow \boxed{E_k = \frac{1}{2} m v_C^2}$

б) Rotacija tela oko nepokretne tačke O.-
$\vec v = \vec\omega\times\vec r \Rightarrow \vec v\cdot\vec v = (\vec\omega\times\vec r)\cdot\vec v \Rightarrow v^2 = (\vec r\times\vec v)\cdot\vec\omega \Rightarrow \boxed{d_m E_k = \frac{1}{2} dm(\vec r\times\vec v)\cdot\vec\omega}$

Kinetička energija tela je: $E_k = \frac{1}{2}\int_m dm(\vec r\times\vec v)\cdot\vec\omega \Rightarrow E_k = \frac{1}{2}\vec\omega\cdot\int_m \vec r\times dm\vec v$, tj:
$\boxed{E_k = \frac{1}{2}\vec\omega\cdot\vec L_O}$

Kako je: $\vec L_O = L_{O\xi}\vec\lambda + L_{O\eta}\vec\mu + L_{O\zeta}\vec\nu$ i $\vec\omega = \omega_\xi\vec\lambda + \omega_\eta\vec\mu + \omega_\zeta\vec\nu$, to je:
$E_k = \frac{1}{2}(L_{O\xi}\omega_\xi + L_{O\eta}\omega_\eta + L_{O\zeta}\omega_\zeta)$.

U slučaju da su ose $O\xi$, $O\eta$ i $O\zeta$ DKS vezanog za telo glavne ose inercije: $J_{\xi\eta}^{O} = J_{\eta\zeta}^{O} = J_{\zeta\xi}^{O} = 0$, moment količine kretanja tela za tačku O je određen momentima količine kretanja za ose $O\xi$, $O\eta$ i $O\zeta$: $L_{O\xi} = J_{O\xi}\omega_\xi$, $L_{O\eta} = J_{O\eta}\omega_\eta$ i $L_{O\zeta} = J_{O\zeta}\omega_\zeta$, gde su $J_{O\xi}$, $J_{O\eta}$ i $J_{O\zeta}$ glavni momenti inercije. Kinetička energija tela koje vrši rotaciju oko nepokretne tačke O u tom slučaju ima oblik:

$E_K = \frac{1}{2}J_{O\xi}\omega_\xi^2 + \frac{1}{2}J_{O\eta}\omega_\eta^2 + \frac{1}{2}J_{O\zeta}\omega_\zeta^2$;

gde su: $\omega_\xi = \dot{\psi}\sin\theta\sin\varphi + \dot{\theta}\cos\varphi$; $\omega_\eta = \dot{\psi}\sin\theta\cos\varphi - \dot{\theta}\sin\varphi$ i $\omega_\zeta = \dot{\psi}\cos\theta + \dot{\varphi}$.

Pošto su ω_ξ, ω_η i ω_ζ linearne po generalisanim brzinama $\dot{\psi}, \dot{\theta}, \dot{\varphi}$, to će kinetička energija tela biti kvadratna forma tih generalisanih brzina:

$E_K = E_K(\psi,\theta,\varphi,\dot{\psi},\dot{\theta},\dot{\varphi}) = \frac{1}{2}\left[a_{11}\dot{\psi}^2 + 2a_{12}\dot{\psi}\dot{\theta} + 2a_{13}\dot{\psi}\dot{\varphi} + a_{22}\dot{\theta}^2 + 2a_{23}\dot{\theta}\dot{\varphi} + a_{33}\dot{\varphi}^2\right]$,

gde su: $a_{ij} = a_{ij}(\psi,\theta,\varphi)$ - koeficijenti inercije (masa) $(i,j=1,2,3)$

c) Kinetička energija tela koje rotira oko nepokretne ose $Oz = O\zeta$. – Koristimo izraz za kinetičku energiju tela koje rotira oko nepokretne tačke O: $E_K = \frac{1}{2}\vec{L}_O\cdot\vec{\omega}$, gde je sada (u ovom slučaju): $\vec{\omega} = \omega_z\vec{k} = \omega_\zeta\vec{\nu}$ i $\omega_z = \omega_\zeta = \dot{\varphi}$, tako da kinetička energija tela koje rotira oko nepokretne ose $Oz = O\zeta$ dobija oblik: $E_K = \frac{1}{2}\vec{L}_O\cdot\vec{k}\dot{\varphi} \Rightarrow E_K = \frac{1}{2}L_{Oz}\dot{\varphi}$. Vodeći računa da je moment količine kretanja tela koje rotira oko ose Oz: $L_{Oz} = J_{Oz}\dot{\varphi}$, kinetička energija tela glasi: $\boxed{E_K = \frac{1}{2}J_{Oz}\dot{\varphi}^2}$

d) Kinetička energija opšteg kretanja krutog tela. – Neka je poznata brzina pola translacije, centra mase tela, $\vec{v}_C = \vec{v}_C(t)$, i trenutna ugaona brzina tela oko pola translacije $\vec{\omega} = \dot{\vec{\psi}} + \dot{\vec{\theta}} + \dot{\vec{\varphi}}$, $\vec{\omega} = \vec{\omega}(t)$. Kinetička energija tačke M tela je: $d_m E_K = \frac{1}{2}dm\,v^2 = \frac{1}{2}dm(\vec{v}_C + \vec{v}_M^C)\cdot(\vec{v}_C + \vec{v}_M^C) \Rightarrow d_m E_K = \frac{1}{2}dm(v_C^2 + 2\vec{v}_C\cdot\vec{v}_M^C + \vec{v}_M^C\cdot\vec{v}_M^C)$, pa je kinetička energija opšteg kretanja tela:

$E_K = \int_m d_m E_K = \frac{1}{2}\int_m dm\,v_C^2 + \int_m dm\,\vec{v}_C\cdot\vec{v}_M^C + \frac{1}{2}\int_m dm\,\vec{v}_M^C\cdot\vec{v}_M^C = \frac{1}{2}v_C^2\int_m dm + \vec{v}_C\cdot\int_m dm\,\vec{\omega}\times\vec{\rho} + \frac{1}{2}\int_m dm\,\vec{v}_M^C\cdot\vec{v}_M^C$, gde je: $\int_m dm\,\vec{\omega}\times\vec{\rho} = \vec{\omega}\times\int_m dm\,\vec{\rho} = 0$ i $\vec{v}_M^C\cdot\vec{v}_M^C = (\vec{\omega}\times\vec{\rho})\cdot\vec{v}_M^C = (\vec{\rho}\times\vec{v}_M^C)\cdot\vec{\omega}$,

tj.: $E_K = \frac{1}{2}mv_C^2 + \frac{1}{2}\vec{\omega}\cdot\int_m dm(\vec{\rho}\times\vec{v}_M^C) \Rightarrow \boxed{E_K = \frac{1}{2}mv_C^2 + \frac{1}{2}\vec{L}_C\cdot\vec{\omega}}$.

U izrazu za kinetičku energiju opšteg kretanja prvi član: $E_K^{tran} = \frac{1}{2}mv_C^2$ predstavlja kinetičku energiju translatornog kretanja krutog tela pri opštem kretanju brzinom koja je jednaka brzini centra mase tela, a drugi član: $E_K^{rot} = \frac{1}{2}\vec{L}_C\cdot\vec{\omega}$ kinetičku energiju rotacije tela oko centra mase tela pri razmatranom kretanju. Izraz za kinetičku energiju opšteg kretanja tela preko generalisanih brzina ovog kretanja $(\dot{x}_C, \dot{y}_C, \dot{z}_C, \dot{\psi}, \dot{\theta}$ i $\dot{\varphi})$ je: $\boxed{E_K = \frac{1}{2}m(\dot{x}_C^2 + \dot{y}_C^2 + \dot{z}_C^2) + \frac{1}{2}(L_{C\xi}\omega_\xi + L_{C\eta}\omega_\eta + L_{C\zeta}\omega_\zeta)}$ gde je:

$\omega_\xi = \dot{\psi}\sin\theta\sin\varphi + \dot{\theta}\cos\varphi$, $\omega_\eta = \dot{\psi}\sin\theta\cos\varphi - \dot{\theta}\sin\varphi$ i $\omega_\zeta = \dot{\psi}\cos\theta + \dot{\varphi}$.

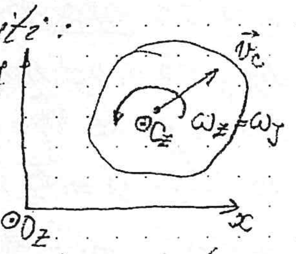
U slučaju kada su ose $C\xi$, $C\eta$, $C\zeta$ glavne centralne ose inercije tela: $J_{\xi\eta}^C = J_{\eta\zeta}^C = J_{\zeta\xi}^C = 0$;

$L_{C\xi} = J_{C\xi}\omega_\xi$, $L_{C\eta} = J_{C\eta}\omega_\eta$ i $L_{C\zeta} = J_{C\zeta}\omega_\zeta$ i

$E_K = \frac{1}{2}m(\dot{x}_C^2 + \dot{y}_C^2 + \dot{z}_C^2) + \frac{1}{2}(J_{C\xi}\omega_\xi^2 + J_{C\eta}\omega_\eta^2 + J_{C\zeta}\omega_\zeta^2)$,

gde su $J_{C\xi}$, $J_{C\eta}$ i $J_{C\zeta}$ glavni centralni momenti inercije tela.

e) Kinetička energija tela koje vrši ravno kretanje. – Za kruto telo čije se ravno kretanje može predstaviti kretanjem njegovog preseka $\mathcal{S}$ koji sadrži centar mase tela C, u ravni Oxy nepokretnog DKS $Oxyz$ i čije je kretanje određeno brzinom pola translacije, tačke C: $\dot{x}_C = \dot{x}_C(t)$ i $\dot{y}_C = \dot{y}_C(t)$ i ugaonom brzinom rotacije oko translatorno pokretne ose $C_z = C_\zeta$: $\omega_z = \omega_\zeta = \dot{\varphi}(t)$, kinetička energija će, prema izrazu za kinetičku energiju tela koje vrši opšte kretanje: $E_K = \frac{1}{2} m v_C^2 + \frac{1}{2} \vec{L}_C \cdot \vec{\omega}$, iznositi:



$E_K = \frac{1}{2} m v_C^2 + \frac{1}{2} L_{C_z} \omega_z$,

odnosno:

$$\boxed{E_K = \frac{1}{2} m v_C^2 + \frac{1}{2} J_{C_z} \omega_z^2} \Rightarrow \boxed{E_k = \frac{1}{2} m (\dot{x}_C^2 + \dot{y}_C^2) + \frac{1}{2} J_{C_z} \dot{\varphi}^2}$$

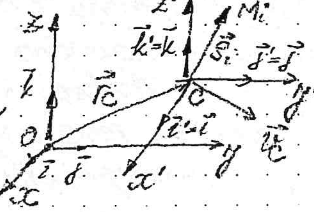
Član: $E_K^{tran} = \frac{1}{2} m v_C^2 = \frac{1}{2} m (\dot{x}_C^2 + \dot{y}_C^2)$ predstavlja kinetičku energiju translatornog kretanja tela pri njegovom ravnom kretanju, a član: $E_K^{rot} = \frac{1}{2} J_{C_z} \omega_z^2 = \frac{1}{2} J_{C_z} \dot{\varphi}^2$ kinetičku energiju rotacije tela oko ose $C_z = C_\zeta$ pri njegovom ravnom kretanju.

Napomena. – član $\vec{L}_C \cdot \vec{\omega}$ u izrazu za kinetičku energiju opšteg kretanja, s obzirom da je moment količine kretanja tela za centar mase tela, $\vec{L}_C$, dat matričnom jednačinom: $\begin{bmatrix} L_{C\xi} \\ L_{C\eta} \\ L_{C\zeta} \end{bmatrix} = [J^C]^{3\times3} \begin{bmatrix} \omega_\xi \\ \omega_\eta \\ \omega_\zeta \end{bmatrix}$, može se, takođe, dati u matričnom obliku:

$$\boxed{\vec{L}_C \cdot \vec{\omega}} = [\omega_\xi \; \omega_\eta \; \omega_\zeta]^{1\times3} \cdot [J^C]^{3\times3} \cdot \begin{bmatrix} \omega_\xi \\ \omega_\eta \\ \omega_\zeta \end{bmatrix}^{3\times1}.$$

Isto važi i za član $\vec{L}_O \cdot \vec{\omega}$ u izrazu za kinetičku energiju sfernog kretanja krutog tela: $\boxed{\vec{L}_O \cdot \vec{\omega}} = [\omega_\xi \; \omega_\eta \; \omega_\zeta]^{1\times3} \cdot [J^O]^{3\times3} \cdot \begin{bmatrix} \omega_\xi \\ \omega_\eta \\ \omega_\zeta \end{bmatrix}^{3\times1}$.

Kenigova teorema. – Ako se kretanje materijalnog sistema N tačaka M_i u odnosu na nepokretan DKS $Oxyz$ posmatrano kao složeno kretanje određeno: prenosnim kretanjem materijalnog sistema u translatorno pokretnom DKS $Cx'y'z'$ čija je brzina jednaka brzini centra mase C tog materijalnog sistema, $\vec{v}_C = \vec{v}_C(t)$ i čije su ose paralelne osama nepokretnog ($\vec{i}' = \vec{i}$, $\vec{j}' = \vec{j}$, $\vec{k}' = \vec{k}$) i relativnim kretanjem tačaka M_i tog materijalnog sistema u odnosu na DKS $Cx'y'z'$, onda će kinetička energija materijalnog sistema iznositi:



$E_K = \frac{1}{2} \sum_i m_i \vec{v}_i \cdot \vec{v}_i = \frac{1}{2} \sum_i m_i (\vec{v}_C + \dot{\vec{s}}_i) \cdot (\vec{v}_C + \dot{\vec{s}}_i)$,

gde je $\vec{v}_i^{\,p} = \vec{v}_C$ prenosna brzina tačke M_i materijalnog sistema, a $\vec{v}_i^{\,r} = \dot{\vec{s}}_i$ njena relativna brzina ($\vec{s}_i = \overrightarrow{CM_i}$).

Imajući u vidu da je $\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{s}_i = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{s}_i = 0 \Rightarrow \boxed{\sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\vec{s}}_i = 0}$, izraz za kinetičku energiju materijalnog sistema dobija oblik:

$$E_K = \frac{1}{2} m v_C^2 + \frac{1}{2} \sum_i m_i \dot{\vec{s}}_i \cdot \dot{\vec{s}}_i \Rightarrow \boxed{E_K = \frac{1}{2} m v_C^2 + \frac{1}{2} \sum_i m_i (\vec{v}_i^{\,r})^2}$$

Kenigova teorema, s obzirom na ovaj izraz za kinetičku energiju materijalnog sistema, glasi: kinetička energija materijalnog sistema jednaka je zbiru kinetičke energije prenosnog kretanja mat. sistema u translatorno pokretnom DKS vezanom za centar mase mat. sistema: $E_K^p = \frac{1}{2} m v_C^2$ i kinetičke energije relativnog kretanja mat. sistema u odnosu na taj DKS: $E_k^r = \frac{1}{2}\sum_i m_i (v_i^r)^2$.

Izrazi za kinetičku energiju tela koje vrši opšte, odnosno, ravno kretanje predstavljaju specijalne slučajeve Kenigove teoreme, jer je tada: $\dot{\vec{s}}_i = \vec{\omega}\times\vec{s}_i$ i
$\dot{\vec{s}}_i \cdot \dot{\vec{s}}_i = (\vec{\omega}\times\vec{s}_i)\cdot\dot{\vec{s}}_i = (\vec{s}_i\times\dot{\vec{s}}_i)\cdot\vec{\omega}$.

<u>Zakon promene kinetičke energije materijalne tačke</u>. - Ako levu i desnu stranu dif. jednačine kretanja tačke M_i mase m_i: $m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} = \vec{F}_{ri}$, skalarno pomnožimo vektorom brzine tačke $\vec{v}_i = \vec{v}_i(t)$, dobija se jednačina:

$$m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt}\cdot\vec{v}_i = \vec{F}_{ri}\cdot\vec{v}_i, \qquad (1)$$

gde je: $m_i \frac{d\vec{v}_i\cdot\vec{v}_i}{dt} = \frac{1}{2} m_i \frac{d}{dt}(\vec{v}_i\cdot\vec{v}_i) \Rightarrow m_i \frac{d\vec{v}_i\cdot\vec{v}_i}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} m_i v_i^2\right)$, tj. $\boxed{\frac{m_i d\vec{v}_i\cdot\vec{v}_i}{dt} = \frac{dE_{ki}}{dt}}$ (2)

$\left(\frac{d}{dt}(\vec{v}_i\cdot\vec{v}_i) = 2\vec{v}_i\cdot\frac{d\vec{v}_i}{dt}\right)$ i $\boxed{P_i = \vec{F}_{ri}\cdot\vec{v}_i}$ (3) - snaga rezultante sistema sila koji deluje na tačku M_i, a koja je jednaka sumi snaga sila tog sistema.

S obzirom na (2) i (3) jednačina (1) se može napisati u formi <u>zakona promene kinetičke energije E_{ki} posmatrane tačke</u>:

$$\boxed{\frac{dE_{ki}}{dt} = P_i}, \qquad (4)$$

gde je: $P_i = P(\vec{F}_{ri})$ i $E_{ki} = \frac{1}{2} m_i v_i^2$ i $P_i = P_i(t, q_\alpha, \dot{q}_\alpha)$, $E_{ki} = E_{ki}(q_\alpha, \dot{q}_\alpha)$ za $q_\alpha = q_\alpha(t)$,

Prema (3) zakon promene kinetičke energije tačke M_i glasi: izvod kinetičke energije tačke po vremenu (brzina promene kinetičke energije tačke) jednak je sumi (određen je) snaga sila koje deluju na nju.

Vodeći računa o tome da je: $\delta A_i = P_i dt$, tj. $\delta A_i = \vec{F}_{ri}\cdot d\vec{r}_i$ jednačina (4) se može, dalje, dati u obliku:

$$\boxed{dE_{ki} = \delta A_i}, \qquad (5)$$

gde je: $\delta A_i = \delta A(\vec{F}_{ri}) = \vec{F}_{ri}\cdot d\vec{r}_i$ - elementarni rad sistema sila koji deluje na tačku M_i na njenom elementarnom stvarnom pomeranju $d\vec{r}_i$ u bilo kom trenutku t i za interval vremena beskonačno male dužine $[t, t+dt]$. Ovaj rad jednak je sumi elementarnih radova sila sistema koji deluje na tačku M_i na istom elementarnom pomeranju te tačke, $d\vec{r}_i$.

Jednačina (5) predstavlja <u>zakon promene kinetičke energije tačke u diferencijalnom obliku</u>: Promena kinetičke energije u bilo kom trenutku t, $E_{ki} = E_{ki}(t)$ na intervalu vremena beskonačno male dužine dt: $dE_{ki} \approx E_{ki}(t+dt) - E_{ki}(t)$, jednaka je sumi elementarnih radova sila koje deluju na tu tačku, a na njenom elementarnom pomeranju $d\vec{r}_i$

Integracijom leve i desne jednačine (5) dobija se zakon promene kinetičke energije u integrabilnom obliku. U tom cilju potrebno je posmatrati konačno pomeranje tačke M_i iz položaja M_{io} na trajektoriji kome odgovara trenutak vremena t_o kada je njena kinetička energija $E_{kio} = E_{ki}(t_o)$ u položaj M_i na trajektoriji kome odgovara trenutak t i kada je kinetička energija tačke $E_k = E_k(t)$, pri čemu je posmatrani interval vremena $[t_o, t]$ konačne dužine. Pod navedenim uslovom integral jednačine (5) je:

$$\int_{E_{kio}=E_{ki}(t_o)}^{E_{ki}=E_{ki}(t)} dE_{ki} = \int_{M_oM} \delta A_i \Rightarrow \boxed{E_{ki}(t) - E_{ki}(t_o) = A_{M_{io}-M_i}} \qquad (6)$$

$$\boxed{\frac{1}{2} m_i v_i^2 - \frac{1}{2} m_i v_{io}^2 = A_{M_{io}-M_i}}$$

u posmatranom intervalu vremena

Jednačina (6) predstavlja zakon promene kinetičke energije tačke M_i u integralnom (konačnom) obliku: promena kinetičke energije tačke na konačnom pomeranju tačke u intervalu vremena $[t_0, t]$ konačne dužine jednaka je radu svih sila koje deluju na tačku, a na tom konačnom pomeranju.

Iz zakona (teoreme) o promeni kinetičke energije tačke sledi:

- ako je rad sila koje deluju na tačku pozitivan, tada se kinetička energija tačke povećava $(v > v_0)$
- ako je rad sila koje deluju na tačku negativan, tada se kinetička energija tačke smanjuje $(v < v_0)$
- ako je rad sila koje deluju na tačku jednak nuli, tada se kinetička energija tačke ne menja $(v = v_0)$.

Pri analizi sila koje deluju na materijalnu tačku M_i treba voditi računa o tome da se za $N=1$, tj. u slučaju jedne materijalne tačke $M_1 = M$ mase m, sistem sila koji deluju na nju sastoji samo od aktivnih sila i reakcija spoljašnjih veza, tako da je u (4), (5) i (6):

$$\vec{F}_{r_i} = \vec{F}_r^{S.R.V} + \vec{F}_r^{a}, \quad \delta A_i = \delta A = \delta A^{S.R.V} + \delta A^{a}; \quad P_i = P = P^{S.R.V} + P^{a} \quad i \qquad (7)$$

$$A_{M_0-M} = A_{M_0-M}^{S.R.V} + A_{M_0-M}^{a} \quad i \quad E_{k_i} = E_k = \frac{1}{2} m v^2;$$

Ako su u tom slučaju spoljašnje veze idealne zakoni (4), (5) i (6) imaju oblik:

$$\frac{dE_k}{dt} = P^a, \quad dE_k = \delta A^a \quad i \quad E_k - E_{k_0} = A_{M_0-M}^{a}, \qquad (8)$$

jer je: $P^{S.R.V} = 0$, $\delta A^{S.R.V} = 0$ i $A_{M_0-M}^{S.R.V} = 0$.

U slučaju neidealnih spoljašnjih veza, sile trenja kao reakcije spoljašnjih veza se moraju uzeti u obzir, tj. njihove snage i radovi se moraju dodati desnim stranama jednačina (8).

Ako su, pak, spoljašnje veze koje ograničavaju kretanje posmatrane materijalne tačke idealne, a aktivne sile koje deluju na nju potencijalne (stacionarne), tj. konzervativne, pri čemu je potencijalna energija tačke u stacionarnom polju tih sila: $E_p = E_p(x, y, z)$), jednačine (8) glase:

$$\frac{dE_k}{dt} = -\frac{dE_p}{dt}, \quad dE_k = -dE_p \quad i \quad E_k - E_{k_0} = -(E_p - E_{p_0}), \qquad (9)$$

jer je: $\delta A^a = \delta A^p = -dE_p$.

Iz zakona (teoreme) o promeni kinetičke energije materijalne tačke u integralnom obliku (3.-ća jednačina u (9)) sledi da je:

$$E_k - E_{k_0} = -(E_p - E_{p_0}) \Rightarrow E_k + E_p = E_{k_0} + E_{p_0} \Rightarrow E(t) = E(t_0), \qquad (10)$$

gde je: $E(t) = E_k(t) + E_p(t)$ - ukupna mehanička energija tačke M.

Jednačina (10) predstavlja zakon održanja mehaničke energije tačke: pri kretanju tačke po idealnim stacionarnim, geometrijskim zadržavajućim vezama u polju potencijalnih, konzervativnih (stacionarnih) sila, ukupna mehanička energija tačke se održava: $E = E_k(t) + E_p(t) = const$.

Zakon (teorema) promene kinetičke energije materijalnog sistema.-

Posmatra se kretanje materijalnog sistema N tačaka, M_i masa m_i. Promena stanja kretanja tačaka tog sistema na bilo kom intervalu vremena $[t, t+dt]$, tj. usled njihovog ESP pomeranja $d\vec{r}_i$ na tom intervalu vremena, opisana je zakonima promene kinetičke energije tačaka u diferencijalnom obliku (5): $dE_{Ki} = \delta A_i$; gde je: $\delta A_i = \vec{F}_{Ri} \cdot d\vec{r}_i$, odnosno, $\delta A_i = \delta A_i^{a} + \delta A_i^{S.R.V} + \delta A_i^{U.R.V}$. U tom smislu zakoni promene kinetičke energije u diferencijalnom obliku za tačke materijalnog sistema, glase:

$$dE_{Ki} = \delta A_i^{a} + \delta A_i^{S.R.V} + \delta A_i^{U.R.V}, \quad i = 1, 2 \dots N \qquad (11)$$

Nakon sabiranja svih N jednačina dobija se zakon (teorema) promene kinetičke energije materijalnog sistema u diferencijalnom obliku:

$$\boxed{dE_K = \delta A} \Rightarrow \boxed{dE_K = \delta A^{a} + \delta A^{S.R.V} + \delta A^{U.R.V}} \qquad (12)$$

gde je: $E_K = \sum_{i=1}^{N} E_{Ki}$ - kinetička energija materijalnog sistema, $\delta A = \sum_{i=1}^{N} \delta A_i$ - elementarni rad svih sila (aktivnih, spoljašnjih i unutrašnjih reakcija veza) koje deluju na materijalni sistem, a na elementarnom stvarnom pomeranju materijalnog sistema $d\vec{r}_i$, $i = 1, \dots, N$ u posmatranom intervalu vremena $[t, t+dt]$ i za koji važi:

$$\delta A = \delta A^{a} + \delta A^{S.R.V} + \delta A^{U.R.V}, \quad \delta A^{a; S.R.V; U.R.V} = \sum_{i=1}^{N} \delta A_i^{a; S.R.V; U.R.V}$$

Zakon (12) glasi: Promena kinetičke energije materijalnog sistema u bilo kom trenutku t, $E_K = E_K(t)$, na intervalu vremena beskonačno male dužine dt: $dE_K \approx E_K(t+dt) - E_K(t)$, jednaka je elementarnom radu sistema sila koji deluje na taj materijalni sistem, a na njegovom elementarnom pomeranju, $d\vec{r}_i$, $i=1..N$, u posmatranom intervalu vremena. Zakon promene kinetičke energije u diferencijalnom obliku povezuje veličine stanja materijalnog sistema u dva bliska vremenska trenutka: t i $t+dt$.

Ako levu i desnu stranu zakona promene kinetičke energije materijalnog sistema (12) na intervalu vremena $[t, t+dt]$ podelimo sa dužinom tog intervala, dt, dobićemo zakon promene kinetičke energije u obliku:

$$\boxed{\frac{dE_K}{dt} = P}, \quad \boxed{\frac{dE_K}{dt} = P^{a} + P^{S.R.V} + P^{U.R.V}} \qquad (13)$$

gde je: $P = \frac{\delta A}{dt}$ i $P = \sum_{i=1}^{N} \frac{\delta A_i}{dt}$, tj. $P = \sum_{i=1}^{N} P_i = \sum_i \vec{F}_{Ri} \cdot \vec{v}_i$, snaga sila koje deluju na materijalni sistem u trenutku t i koja je jednaka sumi snaga tih sila.

Zakon promene kinetičke energije materijalnog sistema u integralnom obliku, kao zakon promene kinetičke energije materijalnog sistema na konačnom pomeranju tog materijalnog sistema u intervalu vremena konačne dužine $[t_0, t]$, pri kome tačke M_i sistema prelaze iz položaja M_{i0} u trenutku t_0 u krajnje položaje M_i u trenutku t, može se dobiti sabiranjem zakona promene kinetičke energije tačaka M_i, $i=1..N$ u integralnom obliku na posmatranom intervalu vremena $[t_0, t]$, ( ). Naime, kako je

$$E_{Ki} - E_{Ki0} = A_{M_{i0}-M_i} \Rightarrow E_{Ki} - E_{Ki0} = A^{a}_{M_{i0}-M_i} + A^{S.R.V}_{M_{i0}-M_i} + A^{U.R.V}_{M_{i0}-M_i},$$

to se nakon sabiranja ovih N jednačina, dobija zakon promene kinetičke energije materijalnog sistema na njegovom konačnom pomeranju u intervalu vremena $[t_0, t]$:

$$\boxed{E_K - E_{K0} = A_{0-1}} \Rightarrow \boxed{E_K - E_{K0} = A^{a}_{0-1} + A^{S.R.V}_{0-1} + A^{U.R.V}_{0-1}}, \qquad (14)$$

gde su: $E_{K0} = E_K(t_0)$ i $E_K = E_K(t)$ - početna kinetička energija i kinetička energija materijalnog sistema na kraju posmatranog intervala vremena, respektivno, i

$$A_{0-1} = \sum_i A_{M_{i0}-M_i} \quad i \quad A^{a; S.R.V; U.R.V}_{0-1} = \sum A^{a; S.R.V; U.R.V}_{M_{i0}-M_i},$$

rad aktivnih sila, spoljašnjih i unutrašnjih reakcija veza koje deluju na materijalni sistem, tj. na tačke M_i materijalnog sistema, kao napadne tačke ovih sila, a na konačnom pomeranju materijalnog sistema u intervalu vremena $[t_0, t]$.

Prema (14): Promena kinetičke energije materijalnog sistema na intervalu vremena $[t_0, t]$; $\Delta E_k = E_k(t) - E_k(t_0)$, jednaka je radu sistema sila koji deluje na taj materijalni sistem, a na njegovom konačnom pomeranju u intervalu vremena $[t_0, t]$.
Ovaj zakon uspostavlja vezu između veličina stanja materijalnog stanja u trenucima t_0, „0" $(\vec{r}_{i0}, \vec{v}_{i0})$, i t, „1" $(\vec{r}_i(t), \vec{v}_i(t))$.

Jednačina (14) može se dobiti i integracijom jednačine (12) na konačnom pomeranju materijalnog sistema u intervalu vremena $[t_0, t]$.

Ako je materijalni sistem neizmenljiv u smislu da se veze (spoljašnje i unutrašnje) ne realizuju pomoću elastičnih mehaničkih elemenata (npr. linearnih opruga), kao i da su idealne geometrijske stacionarne zadržavajuće, važi: $\delta A^{S.R.V} = 0$ i $\delta A^{U.R.V} = 0$, tj. $A_{0-1}^{S.R.V} = 0$ i $A_{0-1}^{U.R.V} = 0$, pa zakoni promene kinetičke energije materijalnih sistema (12), (13) i (14) imaju oblik:

$$dE_k = \delta A^a; \quad \frac{dE_k}{dt} = P^a \quad i \quad E_k - E_{k0} = A_{0-1}^a \qquad (15)$$

Ako su neke veze realne geometrijske stacionarne zadržavajuće, sa trenjem, bilo da je reč o trenju klizanja ili trenju kotrljanja, a sistem je izmenljiv tj. sa elastičnim mehaničkim elementima, tada se radu aktivnih sila moraju pridodati radovi sila trenja i elastičnih sila, pa (12), (13) i (14) glase:

$$dE_k = \delta A^a + \delta A^{el} + \delta A^{tr} \Rightarrow \frac{dE_k}{dt} = P^a + P^{el} + P^{tr} \quad i \quad E_k - E_{k0} = A_{0-1}^a + A_{0-1}^{el} + A_{0-1}^{tr} \qquad (16)$$

Ako su sve veze materijalnog sistema idealne, pri čemu je sistem izmenljiv, sa elastičnim mehaničkim elementima, a kreće se u polju stacionarnih potencijalnih (konzervativnih) aktivnih sila, tako da je: $\boxed{\delta A^{tr} = 0}$ $\boxed{\delta A^{el} = -dE_p^{el}}$ i $\boxed{\delta A^a = -dE_p^a}$, zakoni (12), (13) i (14) imaju oblik:

$$dE_k = -dE_p, \quad \frac{dE_k}{dt} = -\frac{dE_p}{dt} \quad i \quad E_k - E_{k0} = -(E_p - E_{p0}), \qquad (17)$$

gde su: $E_p = E_p^{el} + E_p^a$ - ukupna potencijalna energija materijalnog sistema, a E_p^{el} i E_p^a - potencijalne energije materijalnog sistema u stacionarnim poljima elastičnih i potencijalnih aktivnih sila.
Treća jednačina (17) predstavlja zakon održanja ukupne mehaničke energije materijalnog sistema, $E = E_k + E_p$, i može se napisati u obliku:

$$E_k + E_p = E_{k0} + E_{p0} \Rightarrow E = E_k + E_p = const \qquad (18)$$