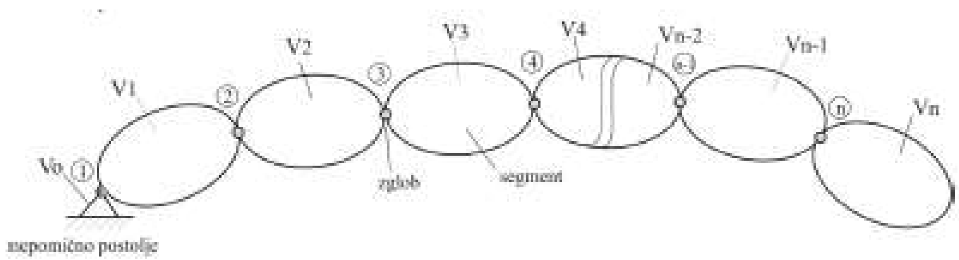
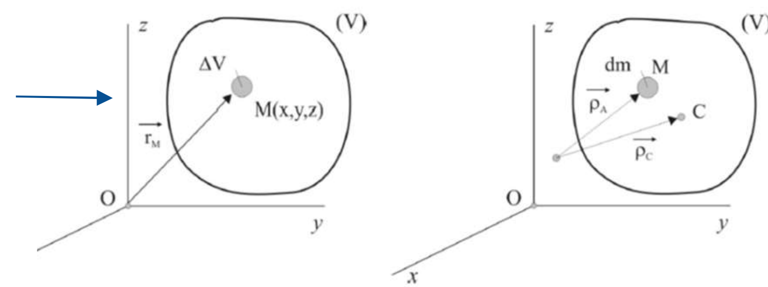
Машински факултет
УНИВЕРЗИТЕТА У БЕОГРАДУ

Динамика роботског система- основни појмови, количина кретања [Vi] сегмента -Кс, и момент количине кретања [Vi] –Lc, кинетичка енергија [Vi]-Ек

Проф. Михаило Лазаревић,
Машински факултет,Универзитет у Београду

Неки елементи геометрије маса





А)Густина ρ *у датој тачки М*

$$\rho = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta V} = \frac{dm}{dV},$$

$$\boxed{\rho = \rho(\vec{r}_M) = \rho(x, y, z)}$$

Тело (V) хомогено ако је $\rho(x, y, z) = const.$

Б) Маса m

$$\boxed{m = \int\limits_{(V)} dm = \int\limits_{(V)} \rho(x, y, z)\, dV}$$

Троструки интеграл срачунат по области (V) материјалног тела

У случају система од n тела (V1),...,(Vn) маса m1,m2,...,mn респективно маса целог РС m одређена је са

$$m = \sum_{i=1}^{n} m_i \, .$$

Ц) Центар инерције [Vi] (средиште маса)
У односу на произвољну тачку А је (види претходну слику)

$$\vec{\rho}_C = \frac{\int\limits_{(V)} \vec{\rho}_A dm}{\int\limits_{(V)} dm}$$

Ако се узме да је А=О (тј у односу на коорд. почетак непокретног коор. система xyz $A \equiv O$

$$\boxed{A \equiv O} \Rightarrow \quad \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} = \vec{r}_C = x_C\vec{i} + y_C\vec{j} + z_C\vec{k} = \frac{\int\limits_{(V)} \vec{r} dm}{\int\limits_{(V)} dm} = \frac{\int\limits_{(V)} \vec{r} dm}{m} \Rightarrow$$

$$x_C = \frac{\int\limits_{(V)} x dm}{m}, \quad y_C = \frac{\int\limits_{(V)} y dm}{m}, z_C = \frac{\int\limits_{(V)} z dm}{m}$$

Ако се узме да је А=С (тј у односу на коорд. почетак покретног коор. система који је везан за средиште маса [Vi] сегмента

$$\boxed{A = C} \Rightarrow \quad \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CC} = \vec{\rho}_C = \vec{0} == \frac{\int\limits_{(V)} \vec{\rho} dm}{m} \Rightarrow$$

$$\boxed{\int_{(V)} \vec{\rho} dm = 0 \ (**)}$$

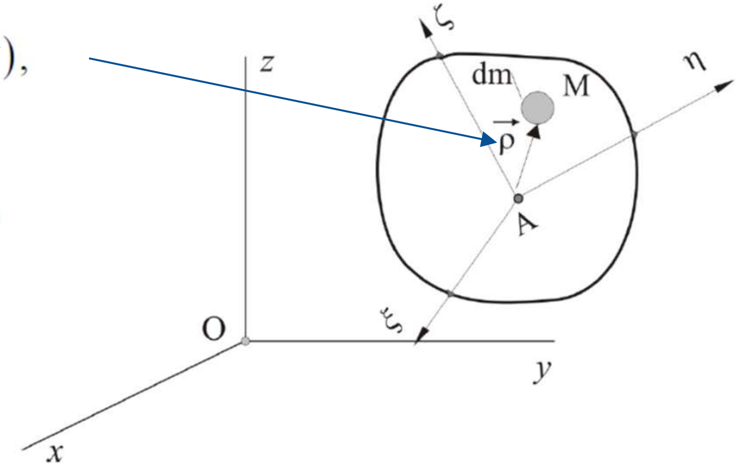
Д) Тензор инерције тела Vi $[J_A]$

Разматра се општи случај тј . израчунава се тензор инерције датог тела [Vi] у односу на произвољно изабрану тачку А

На основу дефиниције дуалног објекта има се

$$\{\vec{\rho}\}^T = (\xi, \quad \eta, \quad \zeta),$$

$$\left[\rho^d\right] = \begin{bmatrix} 0 & -\zeta & \eta \\ \zeta & 0 & -\xi \\ -\eta & \xi & 0 \end{bmatrix}.$$



Дефиниције за тензор инерције је дат са

$$\boxed{\left[J_A\right] \overset{def}{=} -\int_{(V)} \left[\rho^d\right]^2 dm,}$$

На основу особине дуалног објекта следи:

$$\left[\rho^d\right]^2 = \{\rho\}(\vec{\rho}) - \rho^2[I], \quad [I] \in R^{3\times 3}$$

$$\left[J_A\right] = \int_{(V)} \left[\rho^2[I] - \{\rho\}(\vec{\rho})\right] dm .$$

$$-\left[\rho^{d}\right]^{2}=\begin{bmatrix}\zeta^{2}+\eta^{2} & -\xi\eta & -\xi\zeta\\ -\eta\xi & \xi^{2}+\zeta^{2} & -\eta\zeta\\ -\zeta\xi & -\zeta\eta & \xi^{2}+\eta^{2}\end{bmatrix}$$

$$[J_{A}]=\begin{bmatrix}\int\limits_{(v)}(\eta^{2}+\zeta^{2})dm & -\int\limits_{(v)}(\xi\eta)dm & -\int\limits_{(v)}(\xi\zeta)dm\\ -\int\limits_{(v)}(\eta\xi)dm & \int\limits_{(v)}(\zeta^{2}+\xi^{2})dm & -\int\limits_{(v)}(\eta\zeta)dm\\ -\int\limits_{(v)}(\zeta\xi)dm & -\int\limits_{(v)}(\zeta\eta)dm & \int\limits_{(v)}(\eta^{2}+\xi^{2})dm\end{bmatrix}.$$

$$\boxed{[J_{A}]=\begin{bmatrix}J_{\xi} & -J_{\xi\eta} & -J_{\xi\zeta}\\ -J_{\eta\xi} & J_{\eta} & -J_{\eta\zeta}\\ -J_{\zeta\xi} & -J_{\zeta\eta} & J_{\zeta}\end{bmatrix}.}$$

Дијагонални чланови представљају аксијалне моменте инерције у односу на . осе , $O_{\xi}, O_{\eta}, O_{\zeta}$, док су вандијагонални центрифугални моменти инерције

Ако се узме да је А=С (тј у односу на коорд. почетак покретног коор. система који је везан за средиште маса [Vi] сегмента

$$\boxed{[J_{C}]=-\int\limits_{(V)}\left[\rho_{c}^{d}\right]^{2}dm}$$

Објекат $[J_A]$ се назива ТЕНЗОРОМ јер подлеже <u>закону трансформација тензора</u> при координатним особинама дуалних објеката

<u>Трансформација тензора инерције при ротацији координатног система</u>

Нека је познат $\left[J_{A\xi\eta\zeta}\right]$ *потребно је одредити* $\left[J_{A_{xyz}}\right]$ *у односу на непокретни координатни систем xyz .*

$$\left[J_{A_{\xi\eta\zeta}}\right]=\int\limits_{(V)}\left[(\xi\ \eta\ \zeta)\begin{Bmatrix}\xi\\ \eta\\ \zeta\end{Bmatrix}[I]-\begin{Bmatrix}\xi\\ \eta\\ \zeta\end{Bmatrix}(\xi\ \eta\ \zeta)\right]dm\,,\qquad \left[J_{A_{xyz}}\right]=\int\limits_{(V)}\left[(x\ y\ z)\begin{Bmatrix}x\\ y\\ z\end{Bmatrix}[I]-\begin{Bmatrix}x\\ y\\ z\end{Bmatrix}(x\ y\ z)\right]dm\,,$$

На основу закона транформација координата

$$\begin{Bmatrix}x\\ y\\ z\end{Bmatrix}=[A]\begin{Bmatrix}\xi\\ \eta\\ \zeta\end{Bmatrix},$$

$$(\xi\ \eta\ \zeta)[A]^T[A]\begin{Bmatrix}\xi\\ \eta\\ \zeta\end{Bmatrix}[I]=[A]^T(\xi\ \eta\ \zeta)\begin{Bmatrix}\xi\\ \eta\\ \zeta\end{Bmatrix}[I][A],$$

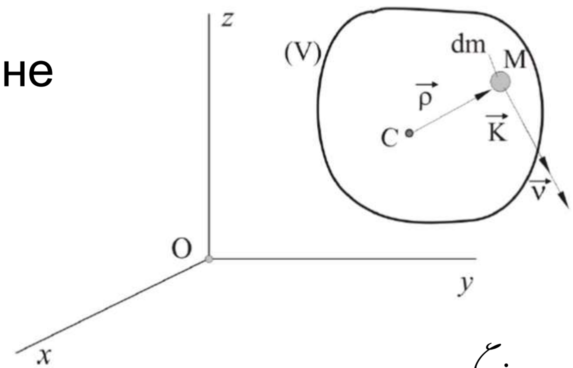
$$\boxed{\left[J_{Axyz}\right]=[A]\left[J_{A\zeta\eta\zeta}\right][A]^T,}$$

Овај израз представља **закон трансформације коваријантног тензора другог реда при трансформацији координата облика**

Количина кретања сегмента Vi-K_C

Диференцијал количина кретања елементарне масе **dm** износи

$$d\vec{K}_i = \vec{v}_{Mi} dm_i$$



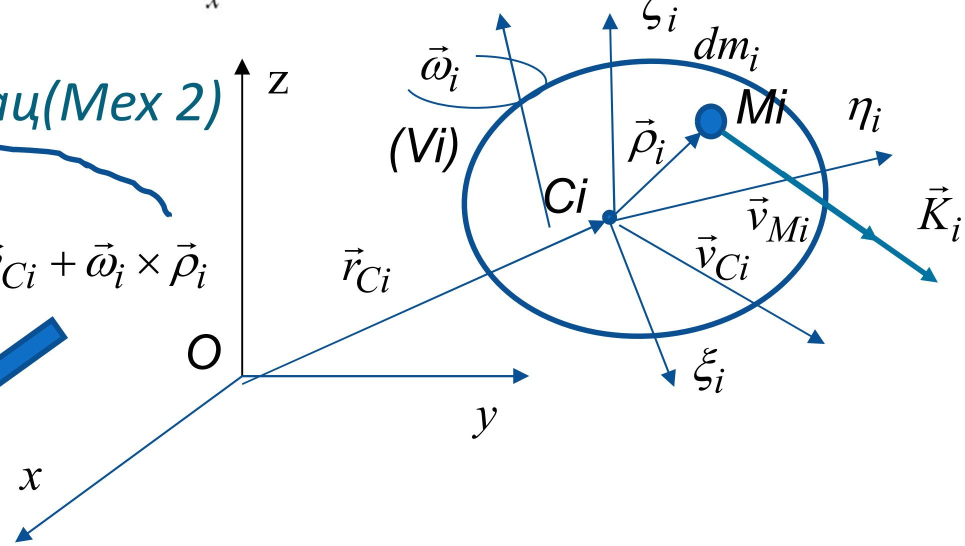
У односу на покретни $C_i \xi_i \eta_i \zeta_i$ *координатни систем*

$$\vec{\rho}_i = \begin{Bmatrix} \xi_i \\ \eta_i \\ \zeta_i \end{Bmatrix} = const$$

Ојлеров образац(Мех 2)

$$\vec{v}_{Mi} = \vec{v}_i = \frac{d\vec{r}_{Mi}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\vec{r}_{Ci} + \vec{\rho}_i\right) = \vec{v}_{Ci} + \frac{d\vec{\rho}_i}{dt} = \vec{v}_{Ci} + \vec{\omega}_i \times \vec{\rho}_i$$

$$d\vec{K}_i = \vec{v}_{Mi} dm_i = \left(\vec{v}_{Ci} + \vec{\omega}_i \times \vec{\rho}_i\right) dm_i$$



Количина кретања за цело тело тј сегмент [Vi] износи

$$\vec{K}_i = \int_{(V_i)} d\vec{K}_i = \int_{(V_i)} (\vec{v}_{Ci} + \vec{\omega}_i \times \vec{\rho}_i)\, dm_i = \int_{(V_i)} (\vec{v}_{Ci})\, dm_i + \int_{(V_i)} (\vec{\omega}_i \times \vec{\rho}_i)\, dm_i =$$

$$= \vec{v}_{Ci} \int_{(V_i)} dm_i + \vec{\omega}_i \times \int_{(V_i)} (\vec{\rho}_i)\, dm_i =$$

Узимајући у обзир да је $\vec{\omega}_i$ угаона брзина целог тела, тј карактеристика целог тела тј не зависи $\int_{(Vi)} (.)$ и „излази“ ван интеграла. Слично важи и за $\vec{v}_{Ci}$

$$m_i \overrightarrow{C_i C_i} = m_i \vec{0} = \int_{(V_i)} (\vec{\rho}_i)\, dm_i = 0$$

Количина кретања [Vi]

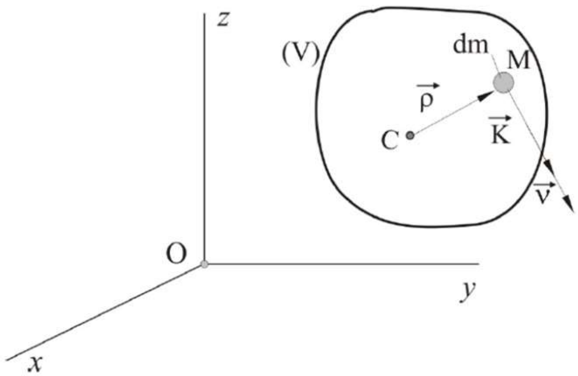
$$\vec{K}_i = m_i \vec{v}_{Ci} + \vec{\omega}_i \times \underbrace{\int_{(V_i)} (\vec{\rho}_i)\, dm_i}_{0} = m_i \vec{v}_{Ci} \Rightarrow \boxed{\vec{K}_i = m_i \vec{v}_{Ci}}$$

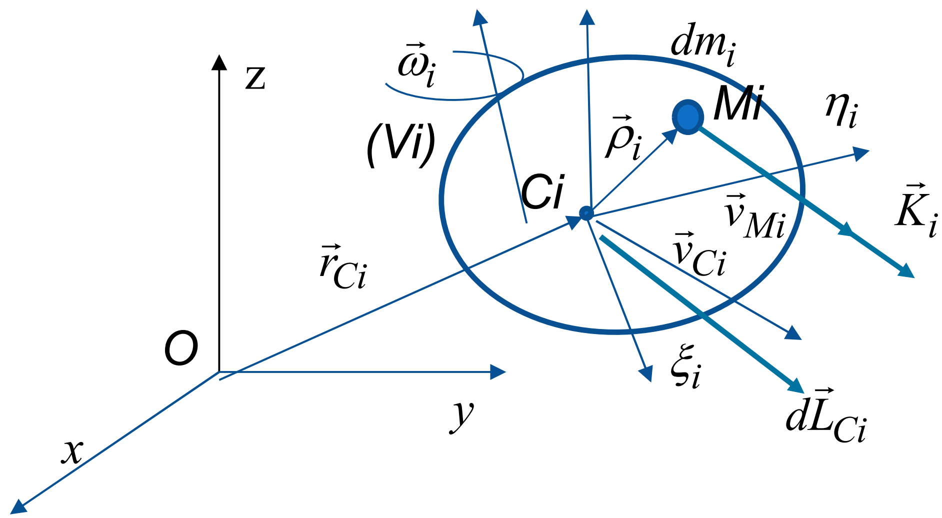
$$\vec{K}_i = m_i \sum_{\alpha=1}^{n} \vec{T}_{\alpha(i)} \dot{q}^{\alpha}$$

Ако се искористи израз за брзину преко квазибазних вектора и генералисаних брзина (видети део из кинемтике робота)

Момент количине кретања сегмента [Vi]-Lci

Овде се одређује Lci у односу на центар маса C_i, у хандоуту је приказан и изведен општији случај L_A





Диференцијал момента количине кретања (кинетички момент) tela Vi за тачку C -средиште маса је:

$$d\vec{L}_{Ci} = \vec{\rho}_i \times d\vec{K}_i = \vec{\rho}_i \times \vec{v}_{Mi} dm_i$$

$$\vec{L}_{Ci} = \int\limits_{(V_i)} d\vec{L}_{Ci} = \int\limits_{(V_i)} \vec{\rho}_i \times (\vec{v}_{Ci} + \vec{\omega}_i \times \vec{\rho}_i) dm_i = \int\limits_{(V_i)} \vec{\rho}_i \times (\vec{v}_{Ci}) dm_i + \int\limits_{(V_i)} \vec{\rho}_i \times (\vec{\omega}_i \times \vec{\rho}_i) dm_i =$$

$$= \cancelto{0}{\left(\int\limits_{(V_i)} \vec{\rho}_i dm_i \right)} \times \vec{v}_{Ci} - \int\limits_{(V_i)} \vec{\rho}_i \times (\vec{\rho}_i \times \vec{\omega}_i) dm_i =$$

На основу особина дуалног објекта и векторског производа има се:

$$\vec{\rho}_i \times \{\vec{\omega}_i \times \vec{\rho}_i\} = \left[\rho_i^d\right]\{\vec{\omega}_i \times \vec{\rho}_i\} = -\left[\rho_i^d\right]\{\vec{\rho}_i \times \vec{\omega}_i\} = -\left[\rho_i^d\right]\left[\rho_i^d\right]\{\omega_i\} =$$

$$= -\left[\rho_i^d\right]^2\{\omega_i\}$$

$$\begin{Bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{Bmatrix} \rightarrow vektor \quad kolona, \quad (. \quad . \quad .) \rightarrow vektor \ vrsta$$

$$\{L_{Ci}\} = -\int_{(V_i)} \left[\rho_i^d\right]^2 \{\omega_i\}\, dm_i = \left(-\int_{(V_i)} \left[\rho_i^d\right]^2 dm_i\right)\{\omega_i\} = \left[J_{Ci}\right]\{\omega_i\}$$

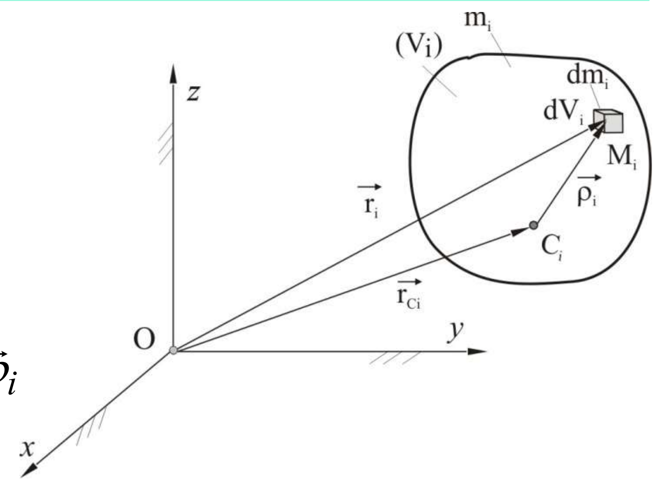
$$\boxed{\{L_{Ci}\} = \left[J_{Ci}\right]\{\omega_i\}}$$

У развијеној форми у односу на покретни координатни систем је облика

$$\begin{Bmatrix} L_{C\xi i} \\ L_{C\eta_i} \\ L_{C\zeta_i} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{C\xi i} & -J_{C\xi\eta i} & -J_{C\xi\zeta i} \\ -J_{C\eta\xi i} & J_{C\eta i} & -J_{C\eta\zeta i} \\ -J_{C\zeta\xi i} & -J_{C\zeta\eta i} & J_{C\zeta i} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \omega_{\xi_i} \\ \omega_{\eta_i} \\ \omega_{\zeta i} \end{Bmatrix}$$

Кинетичка енергија [Vi] роботског сегмента- *Eki*

Диференцијал кинетичке енергије сегмента Vi , диференцијала масе dm_i је облика



$$dE_{k(i)} = \frac{1}{2} dm_i \, v_{M_i}^2$$

$$\vec{v}_{Mi} = \vec{v}_i = \frac{d\vec{r}_{Mi}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\vec{r}_{Ci} + \vec{\rho}_i\right) = \vec{v}_{Ci} + \frac{d\vec{\rho}_i}{dt} = \vec{v}_{Ci} + \vec{\omega}_i \times \vec{\rho}_i$$

$$E_{ki} = \int_{(Vi)} dE_{ki} = \frac{1}{2} \int_{(Vi)} v_{M_i}^2 dm_i$$

$$E_{ki} = \frac{1}{2} \int_{(V_i)} \left(\vec{v}_{C_i} + \vec{\omega}_i \times \vec{\rho}_i\right) \cdot \left\{\vec{v}_{C_i} + \vec{\omega}_i \times \vec{\rho}_i\right\} dm_i$$

$$E_{k(i)} = \frac{1}{2} \int_{(V_i)} \left(\vec{v}_{C_i}\right) \cdot \left\{\vec{v}_{C_i}\right\} dm_i + \frac{1}{2} \int_{(V_i)} \left(\vec{\omega}_i \times \vec{\rho}_i\right) \cdot \left\{\vec{v}_{C_i}\right\} dm_i$$

$$+ \frac{1}{2} \int_{(V_i)} \left(\vec{v}_{C_i}\right) \left\{\vec{\omega}_i \times \vec{\rho}_i\right\} \cdot dm_i + \frac{1}{2} \int_{(V_i)} \left(\vec{\omega}_i \times \vec{\rho}_i\right) \left\{\vec{\omega}_i \times \vec{\rho}_i\right\} \cdot dm_i$$

$$E_{k(i)} = \frac{1}{2}\int\limits_{(V_i)} v_{Ci}^2 dm_i + \cancel{\frac{2}{2}}\int\limits_{(V_i)} \left(\vec{v}_{C_i}\right)\cdot\left\{\vec{\omega}_i \times \vec{\rho}_i\right\}\cdot dm_i + \frac{1}{2}\int\limits_{(V_i)} \left(\vec{\omega}_i \times \vec{\rho}_i\right)\left\{\vec{\omega}_i \times \vec{\rho}_i\right\}\cdot dm_i$$

1

$$\left\{\begin{matrix}\cdot\\ \cdot\\ \cdot\end{matrix}\right\} \rightarrow vektor \;\; kolona, \; (. \;\; . \;\; .) \rightarrow vektor \; vrsta$$

Мешовити производ, не мења се ако циклично променимо места члановима

$$\left(\vec{v}_{C_i}\right)\cdot\left\{\vec{\omega}_i \times \vec{\rho}_i\right\} \;\; 1\,put \;\Rightarrow\; \left(\vec{\rho}_i\right)\cdot\left\{\vec{v}_{C_i} \times \vec{\omega}_i\right\}$$

$$E_{k(i)} = \frac{1}{2}\int\limits_{(V_i)} v_{Ci}^2 dm_i + \int\limits_{(V_i)} \left(\vec{\rho}_i\right)\cdot\left\{\vec{v}_{Ci} \times \vec{\omega}_i\right\}\cdot dm_i + \frac{1}{2}\int\limits_{(V_i)} \left(\vec{\omega}_i \times \vec{\rho}_i\right)\left\{\vec{\omega}_i \times \vec{\rho}_i\right\}\cdot dm_i$$

$$E_{k(i)} = \frac{1}{2} v_{Ci}^2 \int\limits_{(V_i)} dm_i + \left[\int\limits_{(V_i)} \left(\vec{\rho}_i\right) dm_i\right]\cdot\left\{\vec{v}_{Ci} \times \vec{\omega}_i\right\} + \frac{1}{2}\int\limits_{(V_i)} \left(\vec{\omega}_i \times \vec{\rho}_i\right)\left\{\vec{\omega}_i \times \vec{\rho}_i\right\} dm_i$$

m_i $\qquad\qquad\qquad\qquad$ 0

$$\boxed{E_{k(i)} = \frac{1}{2} m_i v_{C_i}^2 + \frac{1}{2}\int\limits_{(V_i)} \left(\vec{\omega}_i \times \vec{\rho}_i\right)\cdot\left\{\vec{\omega}_i \times \vec{\rho}_i\right\} dm_i}$$

$$(\vec{\omega}_i \times \vec{\rho}^{(i)}) \cdot (\vec{\omega}_i \times \vec{\rho}^{(i)}) = (\vec{\omega}_i \times \vec{\rho}^{(i)}) \{\vec{\omega}_i \times \vec{\rho}^{(i)}\} \quad \rightarrow \quad \{\vec{\omega}_i \times \vec{\rho}^{(i)}\} = -[\rho^{(i)d}]\{\vec{\omega}_i\}$$

$$(\vec{\omega}_i \times \vec{\rho}^{(i)}) = \{\vec{\omega}_i \times \vec{\rho}^{(i)}\}^T = (-[\rho^{(i)d}]\{\vec{\omega}_i\})^T = -\{\vec{\omega}_i\}^T[\rho^{(i)d}]^T = -(\vec{\omega}_i)(-[\rho^{(i)d}]) =$$

$$= (\vec{\omega}_i)[\rho^{(i)d}]$$

$$(\vec{\omega}_i \times \vec{\rho}^{(i)}) \cdot (\vec{\omega}_i \times \vec{\rho}^{(i)}) = -(\vec{\omega}_i)[\rho^{(i)d}][\rho^{(i)d}]\{\vec{\omega}_i\} = -(\vec{\omega}_i)[\rho^{(i)d}]^2\{\vec{\omega}_i\}$$

$$E_{k(i)} = \frac{1}{2} m_i v_{C_i}^2 - \frac{1}{2} \int_{(V_i)} (\vec{\omega}_i) \cdot \left[\rho_i^d\right]^2 \{\vec{\omega}_{ii}\}\, dm_i$$

$$[J_{Ci}]$$

$$E_{k(i)} = \frac{1}{2} m_i v_{C_i}^2 + \frac{1}{2} (\vec{\omega}_i) \left(\int_{(V_i)} -\left[\rho_i^d\right]^2 dm_i \right) \{\vec{\omega}_i\}$$

$$E_{k(i)} = \frac{1}{2} m_i v_{C_i}^2 + \frac{1}{2} (\vec{\omega}_i) \left[J_{C_i}\right] \{\vec{\omega}_i\}$$

Eктранслације $E_{ktr(i)} = \frac{1}{2} m_i v_{C_i}^2$

Eкротације $E_{krot(i)} = \frac{1}{2} (\vec{\omega}_i) \left[J_{C_i}\right] \{\vec{\omega}_i\}$