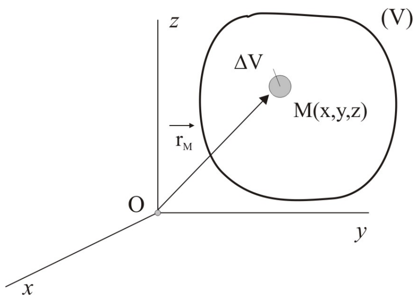
7. Dinamika robota-osnovne postavke,zakoni

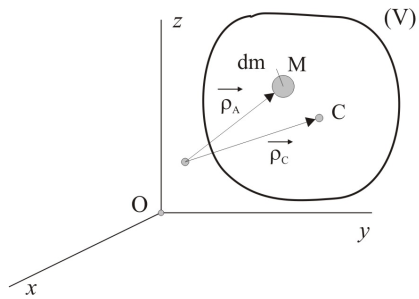
7.1 Neki elementi geometrije masa

7.1.1 Gustina

Srednja gustina materijalnog tela (V) definisana je sledećim izrazom



Slika 7.1



Slika 7.2

$$\rho_s = \frac{\Delta m}{\Delta V}. \tag{7.1}$$

Granična vrednost -

$$\rho = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta V} = \frac{dm}{dV}, \tag{7.2}$$

naziva se *gustina* u datoj tački *M.*

Nadalje-

$$\rho = \rho(\vec{r}_M) = \rho(x, y, z). \tag{7.3}$$

Kažemo da je telo (V) homogeno ako je ispunjen uslov

$$\rho(x, y, z) = const. \tag{7.4}$$

u protivnom telo (V) je nehomogeno.

7.1.2 Masa

Analogno masa m , tela (V) (vidi sl. 7.1)

$$m = \int_{(V)} \rho(x,y,z)dV \ , \tag{7.5}$$

pri čemu je trostruki integral sračunat po oblasti (V) materijalnog tela.

U slučaju sistema n tela $(V_1),(V_2),...,(V_n)$, masa $m_1, m_2,..., m_n$, respektivno, masa m sistema tela određena je izrazom

$$m = \sum_{i=1}^{n} m_i \ . \tag{7.6}$$

7.1.3 Centar inercije (središte masa)

Centar inercije (C) tela (V),mase m, (vidi sl.7.2) u odnosu na proizvoljnu tačku A određen je izrazom koji je podsredstvom graničnog procesa izveden iz poznatog izraza za centar inercije (središte masa) sistema materijalnih tačaka:

$$m\vec{\rho}_C = \int_{(V)} \vec{\rho}_A dm \ , \tag{7.7}$$

ili

$$\vec{\rho}_C = \frac{\int_{(V)} \vec{\rho}_A dm}{\int_{(V)} dm} \tag{7.8}$$

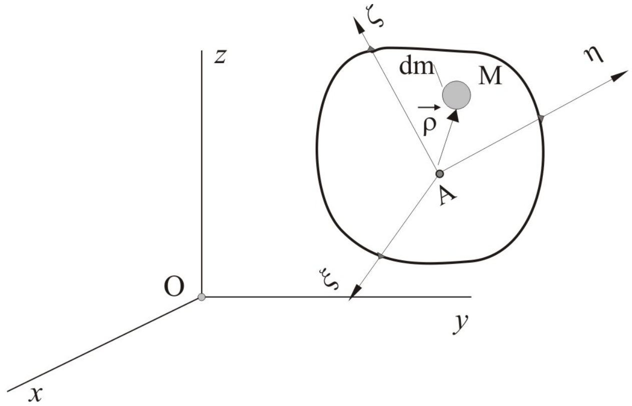
U slučaju sistema tela $(V_1),(V_2),...,(V_n)$, masa $m_1, m_2,..., m_n$,čiji centri inercije $C_1, C_2,..., C_n$ su određeni vektorima položaja (u odnosu na tačku A) $\vec{\rho}_1, \vec{\rho}_2,...\vec{\rho}_{Cn}$, respektivno, centar inercije (C) sistema dat je izrazom

$$\overrightarrow{AC} = \vec{\rho}_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{\rho}_{Ci}}{\sum_{i=1}^{n} m_i} \ , \tag{7.9}$$

7.1.3 Tenzor inercije tela (V)

Razmotrimo telo (V) (segment robotskog sistema, sl.7.3) u proizvoljnom položaju u odnosu na pravougli Dekartov koordinatni sistem *Oxyz*. Neka je konfiguracija tela (V) u odnosu na *Oxyz* određena konfiguracijom pravouglog Dekartovog koordinatnog sistema $A\xi\eta\zeta$, $A \in (V)$. Uočimo tačku $M \in (V)$ koja se nalazi u unutrašnjosti oblasti zapremine dV kojoj odgovara masa dm. Položaj tačke M u odnosu na $A\xi\eta\zeta$ određen je izrazom

$$\{\vec{\rho}\}^T = (\xi, \quad \eta, \quad \zeta), \tag{7.10}$$



Slika 7.3

a dualni objekat prethodnog vektora dat je poznatim izrazom

$$\left[\rho^d\right] = \begin{bmatrix} 0 & -\zeta & \eta \\ \zeta & 0 & -\xi \\ -\eta & \xi & 0 \end{bmatrix}. \tag{7.11}$$

Tenzor inercije tela (V), dat u odnosu na $A\xi\eta\zeta$,definisan je sledećom relacijom

$$\left[J_A\right] \overset{def}{=} -\int_{(V)} \left[\rho^d\right]^2 dm, \tag{7.12}$$

odakle je očigledno da važi

$$\left[J_A\right] \in R^{3\times 3} \tag{7.13}$$

i da je matrica $\left[J_A\right]$ simetrična. Objekat $\left[J_A\right]$ naziva se *tenzorom* jer podleže zakonu transformacija tenzora pri koordinatnim

osobine dualnih objekata, $\Rightarrow$

$$\left[\rho^d\right]^2 = \{\rho\}(\vec{\rho}) - \rho^2[I], \quad [I] \in R^{3\times 3} \tag{7.14}$$

odakle sledi

$$\left[J_A\right] = \int_{(V)} \left[\rho^2[I] - \{\rho\}(\vec{\rho})\right] dm\,. \tag{7.15}$$

$$\rho^2[I]=\begin{bmatrix}\xi^2+\eta^2+\zeta^2 & 0 & 0\\ 0 & \xi^2+\eta^2+\zeta^2 & 0\\ 0 & 0 & \xi^2+\eta^2+\zeta^2\end{bmatrix} \tag{7.16}$$

$$\{\vec{\rho}\}(\vec{\rho})=\begin{bmatrix}\xi^2 & \xi\eta & \xi\zeta\\ \eta\xi & \eta^2 & \eta\zeta\\ \zeta\xi & \zeta\eta & \zeta^2\end{bmatrix} \tag{7.17}$$

izraz (7.15) dobija koordinatnu formu

$$[J_A]=\int_{(V)}\begin{bmatrix}\eta^2+\zeta^2 & -\xi\eta & -\xi\zeta\\ -\eta\xi & \zeta^2+\xi^2 & -\eta\zeta\\ -\zeta\xi & -\zeta\eta & \xi^2+\eta^2\end{bmatrix}dm\,, \tag{7.18}$$

ili

$$[J_A]=\begin{bmatrix}\int_{(v)}(\eta^2+\zeta^2)dm & -\int_{(v)}(\xi\eta)dm & -\int_{(v)}(\xi\zeta)dm\\ -\int_{(v)}(\eta\xi)dm & \int_{(v)}(\zeta^2+\xi^2)dm & -\int_{(v)}(\eta\zeta)dm\\ -\int_{(v)}(\zeta\xi)dm & -\int_{(v)}(\zeta\eta)dm & \int_{(v)}(\eta^2+\xi^2)dm\end{bmatrix}. \tag{7.19}$$

odakle je očigledno da dijagonalni elementi gornje matrice predstavljaju aksijalne momente inercije J_ξ, J_η, J_ζ, tela (V) u odnosu na ose O_ξ, O_η, O_ζ, respektivno, a ostali elementi predstavljaju odgovarajuće centrifugalne momente inercije (proizvode inercije) $J_{\xi\eta}, J_{\eta\zeta}, J_{\zeta\xi}$, ($J_{\xi\eta}=J_{\eta\xi}$ itd.) sa promenjenim znakom, tako da možemo da napišemo

$$[J_A]=\begin{bmatrix}J_\xi & -J_{\xi\eta} & -J_{\xi\zeta}\\ -J_{\eta\xi} & J_\eta & -J_{\eta\zeta}\\ -J_{\zeta\xi} & -J_{\zeta\eta} & J_\zeta\end{bmatrix}. \tag{7.20}$$

Očigledno je da se u prethodnom razmatranju ništa suštinski ne menja ako ose A_ξ, A_η, A_ζ, zamenimo osama $O_{(1)}, O_{(2)}, O_{(3)}$ koje su orijentisane sistemom ortogonalnih jediničnih vektora $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$. U poslednjem slučaju možemo da napišemo

$$\left[J_A\right]=\begin{bmatrix} J_1 & -J_{12} & -J_{13} \\ -J_{21} & J_2 & -J_{23} \\ -J_{31} & -J_{32} & J_3 \end{bmatrix}. \tag{7.21}$$

gde je smisao uvedenih oznaka očigledan. Radi preciznog određivanja na koji se koordinatni sistem odnosi tenzor inercije tenzor iz izraza (7.18) mogao biti označen na sledeći način

$$\left[J_{A_{\xi\eta\zeta}}\right]. \tag{7.22}$$

Međutim, kada je u pitanju tenzor inercije koji je određen na prethodno precizno definisan koordinatni sistem (što će biti čest slučaj u narednim izlaganjima) može se iz izraza za tenzor inercije izostaviti oznaka koordinantnih osa.

7.1.4 Transformacija tenzora inercije pri rotaciji koordinatnog sistema

Razmotrimo telo (V) (*robotski segment*) za koje je određen tenzor inercije $\left[J_{A\xi\eta\zeta}\right]$ u odnosu na pravougli Dekartov koordinatni sistem $A_{\xi\eta\zeta}$. Odredimo tenzor inercije J_{Axyz} u odnosu na pravougli Dekartov koordinatni sistem A_{xyz} koji se jednom konačnom rotacijom može dovesti do poklapanja sa koordinatnim sistemom $A_{\xi\eta\zeta}$ (položaj tela pri tome se ne menja). Uzimajući u obzir izraz (7.15) možemo da napišemo

$$\left[J_{A_{\xi\eta\zeta}}\right]=\int_{(V)}\left[\left(\xi\ \eta\ \zeta\right)\begin{Bmatrix}\xi\\ \eta\\ \zeta\end{Bmatrix}\left[I\right]-\begin{Bmatrix}\xi\\ \eta\\ \zeta\end{Bmatrix}\left(\xi\ \eta\ \zeta\right)\right]dm, \tag{7.23}$$

$$\left[J_{A_{xyz}}\right]=\int_{(V)}\left[\left(x\ y\ z\right)\begin{Bmatrix}x\\ y\\ z\end{Bmatrix}\left[I\right]-\begin{Bmatrix}x\\ y\\ z\end{Bmatrix}\left(x\ y\ z\right)\right]dm, \tag{7.24}$$

odakle, s obzirom na zakon transformacija koordinata

$$\begin{Bmatrix}x\\ y\\ z\end{Bmatrix}=\left[A\right]\begin{Bmatrix}\xi\\ \eta\\ \zeta\end{Bmatrix}, \tag{7.25}$$

i očigledni relaciju

$$(\xi\ \eta\ \zeta)[A]^T[A]\begin{Bmatrix}\xi\\ \eta\\ \zeta\end{Bmatrix}[I]=[A]^T(\xi\ \eta\ \zeta)\begin{Bmatrix}\xi\\ \eta\\ \zeta\end{Bmatrix}[I][A], \tag{7.26}$$

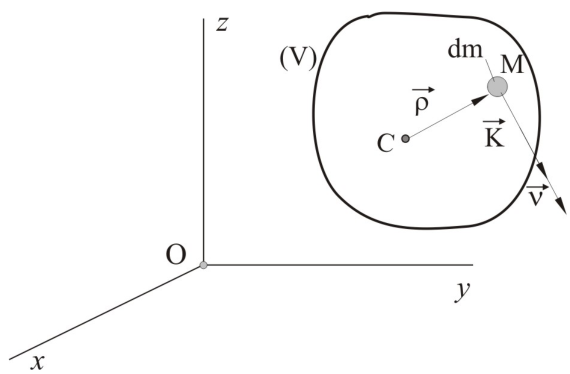
sledi

$$[J_{Axyz}]=[A][J_{A\zeta\eta\zeta}][A]^T, \tag{7.27}$$

Poslednji izraz predstavlja zakon trasformacije kovarijantnog tenzora drugog reda pri transformaciji koordinata oblika (7.25). Iz tog razloga matrica (7.12) naziva se *tenzor inercije.*

7.2 Količina kretanja krutog tela.Zakon o promeni količine kretanja krutog tela

Razmatramo telo (V) u proizvoljnoj konfiguraciji (sl.7.4)



Slika 7.4

Količina kretanja elementarne mase dm iznosi

$$d\vec{K}=\vec{v}dm, \tag{7.28}$$

a količina kretanja tela (V) iznosi

$$\vec{K}=\int_{(V)}\vec{v}dm. \tag{7.29}$$

$$\vec{v}=\vec{v}_C+\vec{v}_M^C. \tag{7.30}$$

gde je C -centar inercije tela V,a $\vec{V}_M^C$ brzina tačke M u odnosu na C,sledi

$$\vec{K}=m\vec{v}_C+\int_{(V)}\vec{v}_M^C dm. \tag{7.31}$$

Uzimajući u obzir da je ($\vec{\omega}$ - ugaona brzina krutog tela (V))

$$\vec{v}_M^C = \vec{\omega} \times \vec{\rho}\,. \tag{7.32}$$

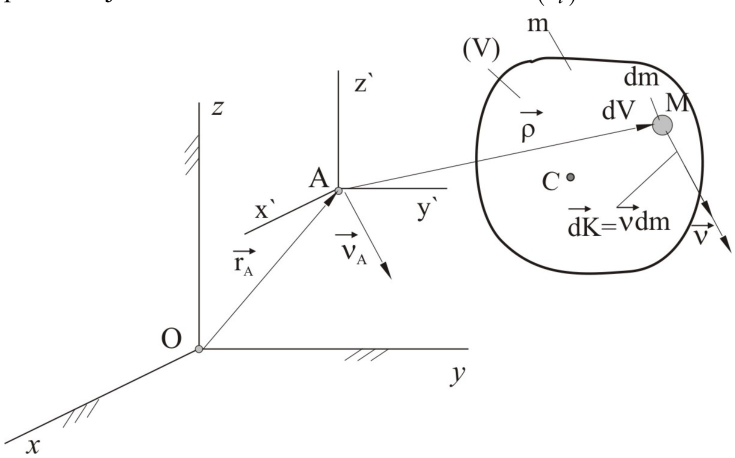
$$\vec{\omega} \times \int_{(V)} \vec{\rho} dm\,. \tag{7.33}$$

$$\vec{\omega} \times \int_{(V)} \vec{\rho} dm = \vec{\omega} \times m\vec{\rho}_C = 0\,, \tag{7.34}$$

dobijamo

$$\vec{K} = m\vec{v}_C \tag{7.35}$$

Uočimo tačku A (vidi sl.7.5) koja u opštem slučaju ne pripada telu (V) i pokretna je. Elementarni kinetički moment tela (V_i) za tačku A iznosi



Slika 7.5

$$d\vec{L}_A = \vec{\rho} \times d\vec{K} = \vec{\rho} \times \vec{v} dm\,, \tag{7.50}$$

kako je

$$\vec{v}_M = \vec{v} = \vec{v}_A + \vec{v}_r\,, \tag{7.51}$$

gde je:

$\vec{v}_A$ - brzina translacije koordinatnog sistema $Ax'y'z'$ (u toku translacije - $Ox \| Ax'$, $Oy \| Ay'$, $Oz \| Az'$, koordinatni sistem $Oxyz$ je inercijalan), $\vec{v}_r$ - brzina tačke M (unutrašnje tačke elementa dV_i) u odnosu na translatorno pokretni koordinatni sistem $Ax'y'z'$, sledi da je

$$d\vec{L}_A = \vec{\rho} \times \vec{v}_A dm + \vec{\rho} \times \vec{v}_r dm\,. \tag{7.52}$$

i

$$\vec{L}_A = -\vec{v}_A \times \int_{(V_i)} \vec{\rho} dm + \int_{(V_i)} \vec{\rho} \times \vec{v}_r dm . \tag{7.53}$$

Poslednja relacija može da se napiše i u obliku

$$\vec{L}_A = m\vec{\rho}_C \times \vec{v}_A + \vec{L}_{Ar} , \tag{7.54}$$

gde je $\vec{\rho}_C$ - vektor položaja centra inercije tela (V) u odnosu na tačku A i gde je

$$\vec{L}_{Ar} = \int_{(V_i)} \vec{\rho} \times \vec{v}_r dm , \tag{7.55}$$

Očgledno je da važi

$$\vec{v}_r = \dot{\vec{\rho}} = \frac{d}{dt}(\rho \vec{\rho}_o) \Rightarrow \vec{v}_r = \dot{\rho}\vec{\rho}_o + \rho \frac{d\vec{\rho}_o}{dt} , \tag{7.56}$$

pri čemu je $\vec{\rho}_o$ - jedinični vektor vektora $\vec{\rho}$, a ρ -intezitet vektora $\vec{\rho}$. Pošto važi

$$\frac{d\vec{\rho}_o}{dt} = \vec{\Omega} \times \vec{\rho}_o \tag{7.57}$$

gde je $\vec{\Omega}$ - ugaona brzina rotacije vektora $\vec{\rho}_o$ pri njegovom relativnom sfernom kretanju u odnosu na tačku O, sledi relacija

$$\vec{\rho} \times \vec{v}_r = \vec{\rho} \times \left(\vec{\Omega} \times \vec{\rho}\right), \tag{7.58}$$

odakle dobijamo izraze

$$\vec{L}_{Ar} = \int_{(V)} \vec{\rho} \times \left(\vec{\Omega} \times \vec{\rho}\right) dm , \tag{7.59}$$

$$\vec{L}_A = m\vec{\rho}_C \times \vec{v}_A + \int_{(V_i)} \vec{\rho} \times \left(\vec{\Omega} \times \vec{\rho}\right) dm \tag{7.60}$$

Uzimajući u obzir da je

$$\left\{\vec{\rho} \times \left(\vec{\Omega} \times \vec{\rho}\right)\right\} = -\left[\rho^d\right]^2 \left\{\vec{\Omega}\right\}, \tag{7.61}$$

Izraz (7.60) dobija u matričnoj notaciji oblik (vidi tenzor inercije (7.12))

$$\left\{\vec{L}_A\right\} = m\left\{\vec{\rho}_C \times \vec{v}_A\right\} + \left[J_A\right]\left\{\vec{\Omega}\right\}, \tag{7.62}$$

gde je $\left[J_A\right]$ -tenzor inercije tela (V) čije su koordinate date u pravouglom Dekartovom koordinatnom sistemu sa koordinatnim početkom *A*. Specijalno, ako $A \in [V]$ biće

$$\vec{\Omega} \equiv \vec{\omega} , \tag{7.63}$$

gde je $\vec{\omega}$ ugaona brzina krutog tela (V). Tada izraz (7.62) ima oblik

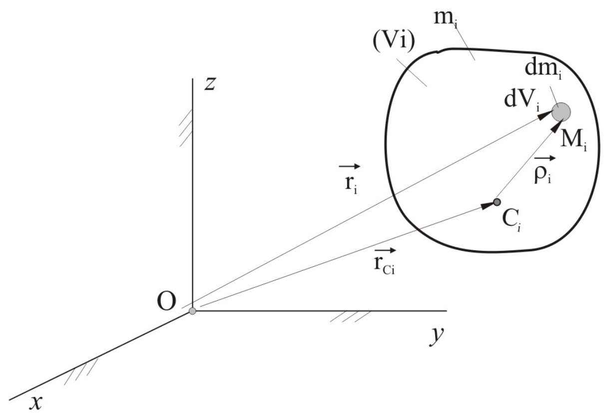
$$\{\vec{L}_A\} = m\{\vec{\rho}_C \times \vec{v}_A\} + [J_A]\{\vec{\omega}\}, \tag{7.64}$$

koji se u slučaju $A \equiv C$ svodi na formu

$$\{\vec{L}_C\} = [J_C]\{\vec{\omega}\}. \tag{7.65}$$

7.3 Kinetička energija robotskog sistema

Razmatramo robotski sistem sa n segmenata $(V_1),(V_2),...,(V_n)$ koji oblik otvorenog kinematičkog lanca bez grananja. Diferencijal kinetičke energije robotskog segmenta (V_i), mase m_i, iznosi (vidi sl. 7.6)



Slika 7.6

$$dE_{ki} = \frac{1}{2} dm v_{Mi}^2 , \tag{7.92}$$

gde je brzina unutrašnje tačke M_i elementarne zapremine dV_i, kojoj odgovara elementarna masa dm_i, jednaka (C_i-centar inercije segmenta (V_i), $\vec{\omega}_i$ -ugaona brzina segmenta (V_i)):

$$\vec{v}_{Mi} = \vec{v}_i = \vec{v}_{Ci} + \vec{\omega}_i \times \vec{\rho}_i . \tag{7.93}$$

Kinetička energija segmenta iznosi

$$E_{ki} = \frac{1}{2} \int_{(V_i)} (\vec{v}_{Ci} + \vec{\omega}_i \times \vec{\rho}_i) \cdot (\vec{v}_{Ci} + \vec{\omega}_i \times \vec{\rho}_i) dm_i . \tag{7.94}$$

Poslednji izraz može da se dovede na oblik

$$E_{ki} = \frac{1}{2} \vec{v}_{Ci}^2 \int_{(Vi)} dm_i + \vec{v}_{Ci} \times \vec{\omega}_i \int_{(Vi)} \vec{\rho}_i dm_i + \frac{1}{2} \int_{(Vi)} (\vec{\omega}_i \times \vec{\rho}_i)(\vec{\omega}_i \times \vec{\rho}_i) dm_i , \tag{7.95}$$

koji se, prema (7.5) i (7.7) (u izrazu (7.7) : $A \equiv C$) dalje transformiše na sledeći način:

$$E_{ki} = \frac{1}{2} m_i v_{Ci}^2 + \frac{1}{2} \int_{(Vi)} (\vec{\omega}_i \times \vec{\rho}_i)(\vec{\omega}_i \times \vec{\rho}_i) dm_i \tag{7.96}$$

Kako je

$$(\vec{\omega}_i \times \vec{\rho}_i)\cdot(\vec{\omega}_i \times \vec{\rho}_i) = (\vec{\omega}_i \times \vec{\rho}_i)\cdot\{\vec{\omega}_i \times \vec{\rho}_i\} = -(\omega_i)\left[\rho_i^d\right]^2\{\omega_i\}, \tag{7.97}$$

sledi da se (7.96) može napisati u formi:

$$E_{ki} = \frac{1}{2}m_i v_{Ci}^2 + \frac{1}{2}(\omega_i)[J_{ci}]\{\omega_i\}, \tag{7.98}$$

gde je $[J_{Ci}]$ tenzor inercije segmenta $(V_i\ )$.