Универзитет у Београду

Машински факултет

Механика робота

Вежбе - шеста недеља

Београд, 2023.

NR

Задатак 12 Одредити вектор угаоног убрзања трећег роботског сегмента, ако су познати следећи подаци:

$$\begin{aligned}
q^i &= 0,2 \cdot i \;[\mathrm{rad}]\,, \\
\dot{q}^i &= 0,3 \cdot i \left[\frac{\mathrm{rad}}{s}\right], \qquad i = 1,2,3 \\
\ddot{q}^i &= 0,4 \cdot i \left[\frac{\mathrm{rad}}{s}\right],
\end{aligned}$$

као и матрице трансформације $[A_{0,1}]$, $[A_{1,2}]$, $[A_{2,3}]$, $[A_{0,2}]$, $[A_{0,3}]$ и $[A_{1,3}]$. Матрице трансформације:

$$[A_{0,1}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos q^1 & \sin q^1 \\ 0 & -\sin q^1 & \cos q^1 \end{bmatrix}$$

$$[A_{1,2}] = \begin{bmatrix} \cos q^2 & \sin q^2 & 0 \\ -\sin q^2 & \cos q^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[A_{2,3}] = \begin{bmatrix} \cos q^3 & 0 & \sin q^3 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin q^3 & 0 & \cos q^3 \end{bmatrix}$$

$$[A_{0,2}] = [A_{0,1}]\,[A_{1,2}] = \begin{bmatrix} 0,9211 & 0,3894 & 0 \\ -0,3816 & 0,9027 & 0,1987 \\ 0,0774 & -0,1830 & 0,98 \end{bmatrix}$$

$$[A_{1,3}] = [A_{1,2}]\,[A_{2,3}] = \begin{bmatrix} 0,7599 & 0,3894 & 0,5204 \\ -0,3213 & 0,9211 & -0,22 \\ -0,565 & 0 & 0,825 \end{bmatrix}$$

$$[A_{0,3}] = [A_{0,1}]\,[A_{1,2}]\,[A_{2,3}] = \begin{bmatrix} 0,7599 & 0,3894 & 0,5204 \\ -0,4271 & 0,9027 & -0,0517 \\ -0,4899 & -0,1830 & 0,8522 \end{bmatrix}$$

Решење:

Вектор угаоног убрзања одређен је на следећи начин:

$$\boxed{\vec{\varepsilon}_i = \sum_{\alpha=1}^{i} \overline{\xi}_\alpha \vec{e}_\alpha \ddot{q}^\alpha + \sum_{\alpha=1}^{i} \sum_{\beta=1}^{\alpha} \overline{\xi}_\alpha \overline{\xi}_\beta \left(\vec{e}_\beta \times \vec{e}_\alpha\right) \dot{q}^\alpha \dot{q}^\beta}$$

Ради смањења обима једначина, можемо одмах констатовати да важи:

$$\overline{\xi}_1 = \overline{\xi}_2 = \overline{\xi}_3 = 1$$

Дакле, за угаоно убрзање трећег роботског сегмента следи:

$$\begin{aligned}
\vec{\varepsilon}_3 &= \sum_{\alpha=1}^{3} \vec{e}_\alpha \ddot{q}^\alpha + \sum_{\alpha=1}^{3}\sum_{\beta=1}^{\alpha} \left(\vec{e}_\beta \times \vec{e}_\alpha\right) \dot{q}^\alpha \dot{q}^\beta \\
&= \vec{e}_1 \ddot{q}^1 + \vec{e}_2 \ddot{q}^2 + \vec{e}_3 \ddot{q}^3 \\
&+ \overline{\xi}_1 \overline{\xi}_1 \left(\vec{e}_1 \times \vec{e}_1\right) \dot{q}^1 \dot{q}^1 \\
&+ \overline{\xi}_2 \overline{\xi}_1 \left(\vec{e}_1 \times \vec{e}_2\right) \dot{q}^2 \dot{q}^1 + \overline{\xi}_2 \overline{\xi}_2 \left(\vec{e}_2 \times \vec{e}_2\right) \dot{q}^2 \dot{q}^2 \\
&+ \overline{\xi}_3 \overline{\xi}_1 \left(\vec{e}_1 \times \vec{e}_3\right) \dot{q}^3 \dot{q}^1 + \overline{\xi}_3 \overline{\xi}_2 \left(\vec{e}_2 \times \vec{e}_3\right) \dot{q}^3 \dot{q}^2 + \overline{\xi}_3 \overline{\xi}_3 \left(\vec{e}_3 \times \vec{e}_3\right) \dot{q}^3 \dot{q}^3
\end{aligned}$$

С обзиром на то да је векторски производ вектора са самим собом једнак нули, претходни израз постаје:

$$\begin{aligned}
\vec{\varepsilon}_3 &= \vec{e}_1 \ddot{q}^1 + \vec{e}_2 \ddot{q}^2 + \vec{e}_3 \ddot{q}^3 \\
&+ \overline{\xi}_2 \overline{\xi}_1 \left(\vec{e}_1 \times \vec{e}_2\right) \dot{q}^2 \dot{q}^1 + \overline{\xi}_3 \overline{\xi}_1 \left(\vec{e}_1 \times \vec{e}_3\right) \dot{q}^3 \dot{q}^1 + \overline{\xi}_3 \overline{\xi}_2 \left(\vec{e}_2 \times \vec{e}_3\right) \dot{q}^3 \dot{q}^2
\end{aligned}$$

Угаоно убрзање можемо одредити у односу на непокретни координатни систем:

$$\begin{aligned}
\vec{\varepsilon}_3^{(0)} &= \vec{e}_1^{(0)} \ddot{q}^1 + \vec{e}_2^{(0)} \ddot{q}^2 + \vec{e}_3^{(0)} \ddot{q}^3 \\
&+ \overline{\xi}_2 \overline{\xi}_1 \left(\vec{e}_1^{(0)} \times \vec{e}_2^{(0)}\right) \dot{q}^2 \dot{q}^1 + \overline{\xi}_3 \overline{\xi}_1 \left(\vec{e}_1^{(0)} \times \vec{e}_3^{(0)}\right) \dot{q}^3 \dot{q}^1 + \overline{\xi}_3 \overline{\xi}_2 \left(\vec{e}_2^{(0)} \times \vec{e}_3^{(0)}\right) \dot{q}^3 \dot{q}^2
\end{aligned}$$

Дакле, потребно је одредити одговарајуће јединичне векторе оса ротације, њихове пројекције на непокретни координатни систем, као и неопходне векторске производе. Јединичне векторе можемо одредити на основу матрица трансформације, при чему треба посебно водити рачуна о њиховим смеровима:

$$[A_{0,1}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos q^1 & \sin q^1 \\ 0 & -\sin q^1 & \cos q^1 \end{bmatrix} \Rightarrow \vec{e}_1^{(1)} = \begin{Bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$[A_{1,2}] = \begin{bmatrix} \cos q^2 & \sin q^2 & 0 \\ -\sin q^2 & \cos q^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \vec{e}_2^{(2)} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{Bmatrix}$$

$$[A_{2,3}] = \begin{bmatrix} \cos q^3 & 0 & \sin q^3 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin q^3 & 0 & \cos q^3 \end{bmatrix} \Rightarrow \vec{e}_3^{(3)} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Сада их можемо трансформисати у односу на непокретни координатни систем:

$$\vec{e}_1^{(0)} = [A_{0,1}]\,\vec{e}_1^{(1)} = \begin{Bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\vec{e}_2^{(0)} = [A_{0,2}]\,\vec{e}_2^{(2)} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -0,1987 \\ -0,98 \end{Bmatrix}$$

$$\vec{e}_3^{(0)} = [A_{0,3}]\,\vec{e}_3^{(3)} = \begin{Bmatrix} 0,3894 \\ 0,9027 \\ -0,1830 \end{Bmatrix}$$

Тражени векторски производи су:

$$\vec{e}_1^{(0)} \times \vec{e}_2^{(0)} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -0,98 \\ 0,1987 \end{Bmatrix}$$

$$\vec{e}_1^{(0)} \times \vec{e}_3^{(0)} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -0,1830 \\ -0,9027 \end{Bmatrix}$$

$$\vec{e}_2^{(0)} \times \vec{e}_3^{(0)} = \begin{Bmatrix} 0,9211 \\ -0,3816 \\ 0,0774 \end{Bmatrix}$$

Коначно, угаоно убрзање трећег роботског сегмента је:

$$\vec{\varepsilon}_3^{(0)} = \begin{Bmatrix} 0,5647 \\ 0,4924 \\ -1,1698 \end{Bmatrix}$$