



Машински факултет
УНИВЕРЗИТЕТА У БЕОГРАДУ

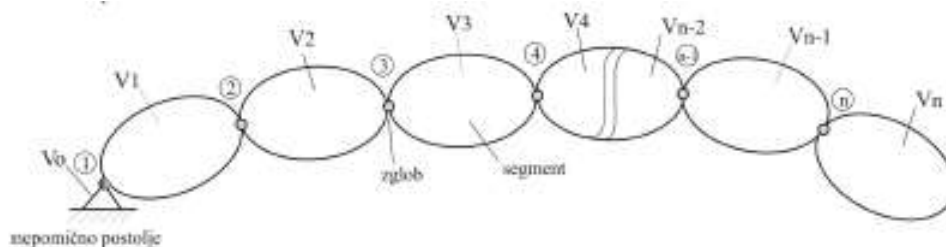
ОДАБРАНА ПОГЛАВЉА ИЗ МЕХАНИКЕ
ДОКТОРСКЕ СТУДИЈЕ
ОСНОВЕ МЕХАНИКЕ КРУТИХ ТЕЛА

Проф. Михаило Лазаревић,
Машински факултет, Универзитет у Београду



Увод у механику система крутих тела

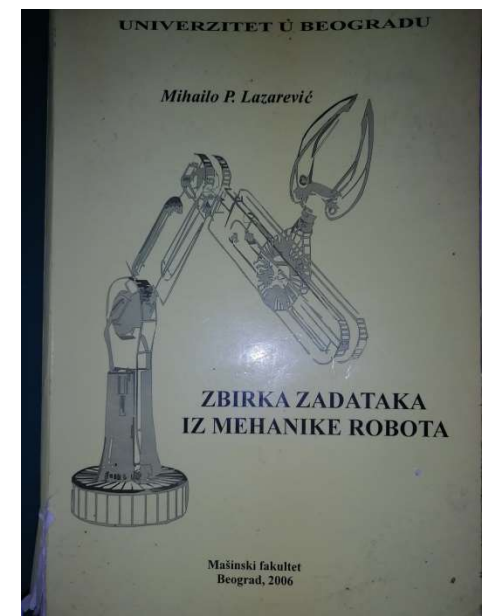
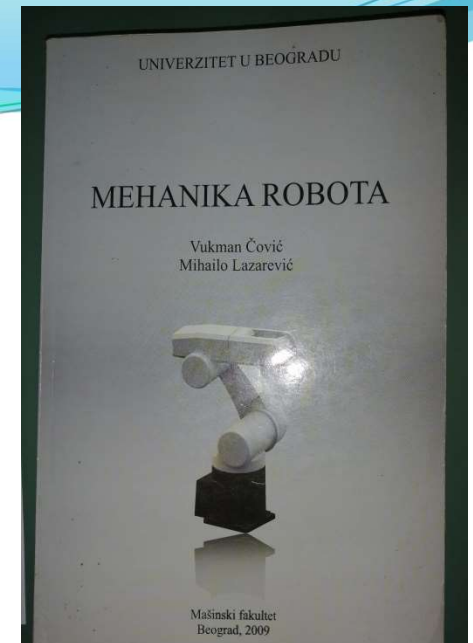
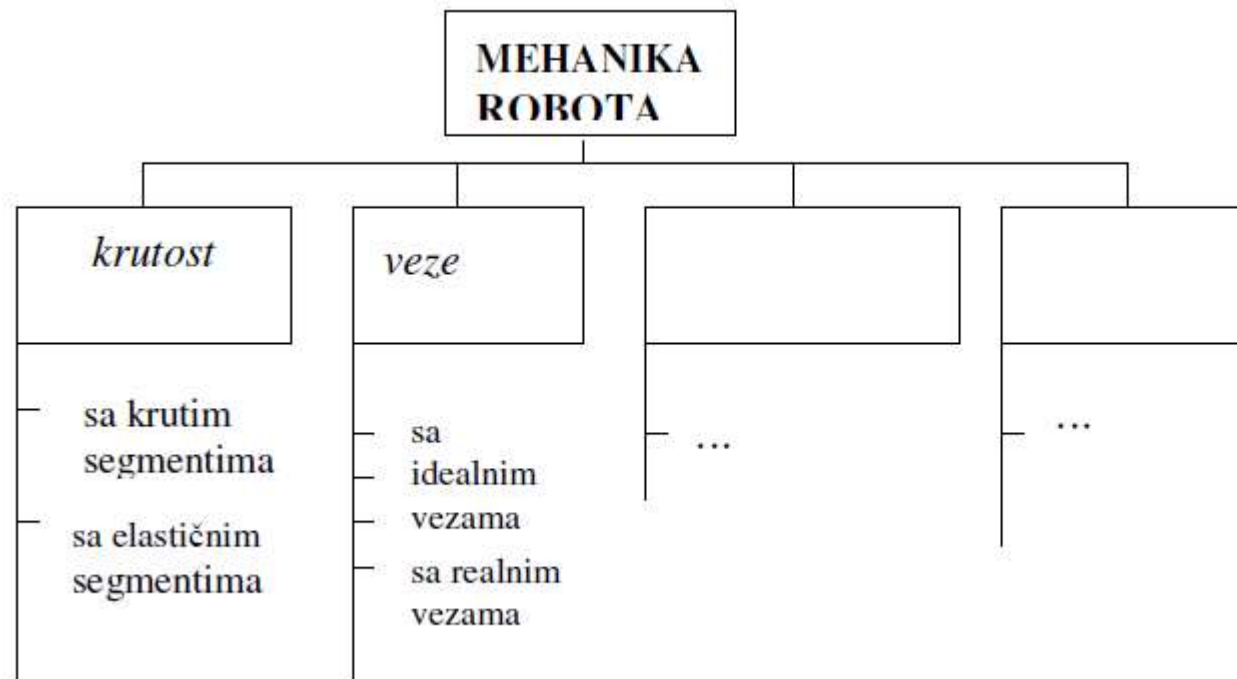
- Методологија формирања и решавања диференцијалних једначина кретања система тела, изложена овде, може да примени у области сложених механизма у машинству, транспортних машина и уредјаја, друмских и шинских возила, роботике и ваздухоплова).
- Из тог разлога овде ће технички систем, као механички систем, бити представљен системом тела при чему коначан број тела у систему није ограничен.
- Разматрани систем тела је у општем случају везан, али се разматрање веза поједностављује њиховом **декомпозицијом**.



Механика система крутих тела

Кинематика+динамика

Mehanika robota → kinematika + dinamika



Kratak istorijat, osnovne postavke

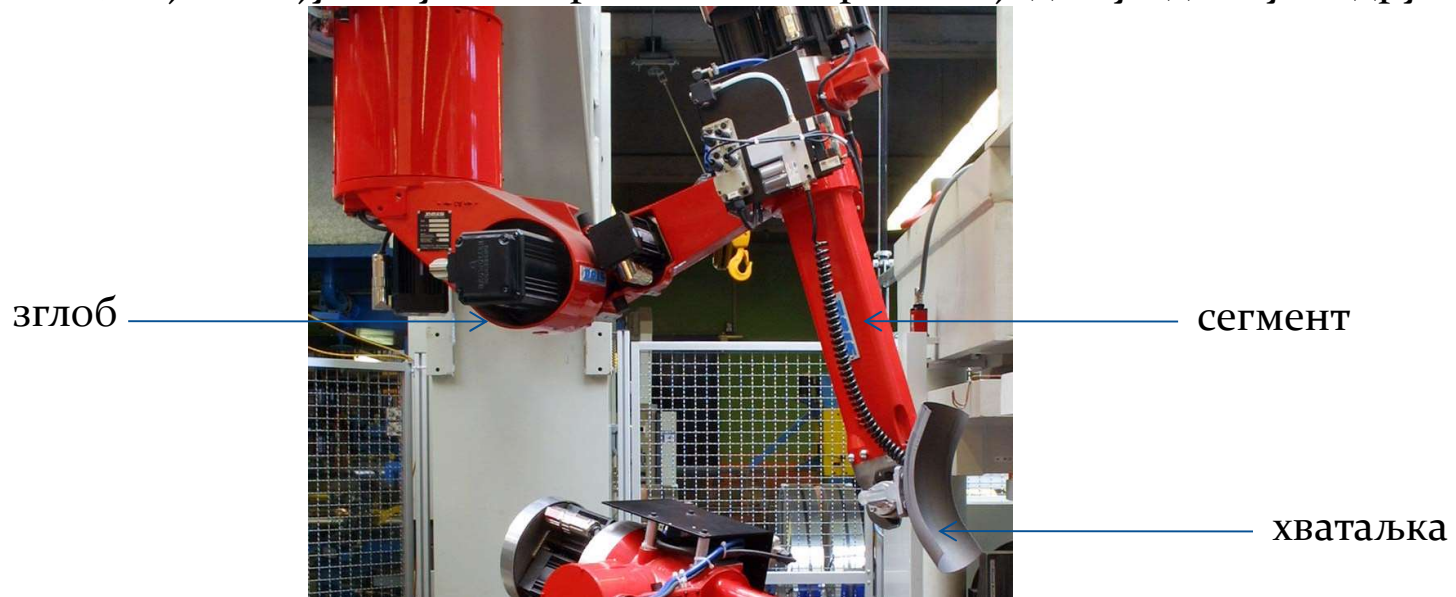
Može se reći da robotika ima svoje početke još u doba renesanse. Oko 1500 godine Leonardo da Vinci izradio je mehaničkog lava u čast Luja XII. Kada je kralj ušao u dvoranu za prijem u Milanu, lav se pokrenuo, rastvorio grudni koš i kralju pokazao grb Francuske. Takvi mehanički automati postali su aktuelni sledeća četiri veka, pa ipak, teko početkom XX veka reč “ROBOT” je ušla u engleski jezik kada je 1923 godine prevedena češka drama RUR (Rossumovi univerzalni roboti) filozofa Karela Čapeka. Izraz “ROBOT” izveden je od češke reči *robota* koja znači prisilan rad. Iako bi tvorevine u drami danas pre bile nazvane androidima nego robotima, ta je pogrešna upotreba reči i do danas ostala univerzalna.

tako na primer, američki institut za robote (Robot Institute of America - RIA) je definisao robot kao *reprogramabilni multifunkcionalni manipulator projektovan da pomera materijal, delove, alate ili specijalne uređaje korišćenjem različitih programa kretanja pri izvršavanju različitih zadataka.*

Са аспекта управљања, робот представља нелинеарни, нестационарни, вишеструко преносни динамички систем.


Механичка структура роботског система

- Механичка структура, састављена од сегмената међусобно повезаних зглобовима, који имају могућност релативног кретања један у односу на други.



Reis Robotics Inc., USA

- Сваком зглобу робота одговара у највећем броју случајева по један мотор. Мотор генерише силу/момент којима се зглобови доводе у релативно кретање, а самим тим и робота као целине.



Robotski sistem (RS) je mehanički objekat (sistem) koji pripada sistemu tela (ali ne proizvoljno) i to sistemu krutih (ili elastičnih) tela. Dalje, RS je neprozvoljan skup tela i to vezanih tako da obrazovan kinematički par određene klase. Te veze nazivamo zglobovima odnosno predstavljaju relacije između tela koje ograničavaju broj stepeni slobode (SS) datog robotskog sistema. One se mogu napisati u analitičkom obliku i to za svaku vezu. Veze su pri tom takve da uočena dva segmenta RS predstavljaju kinematički sistem neke klase. Prema tome,

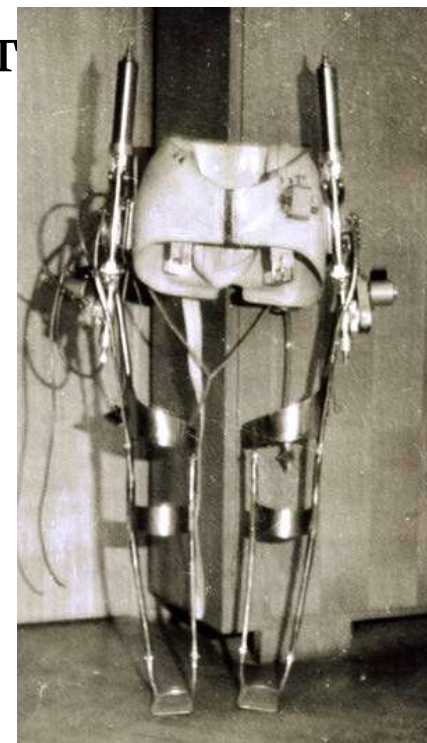
Robotski sistem predstavlja sistem tela vezanih zglobovima pri čemu između tela postoji kinematički par određene klase.

Шездесетих година 20. века за потребе војске САД (Hardiman)

шездесетих година

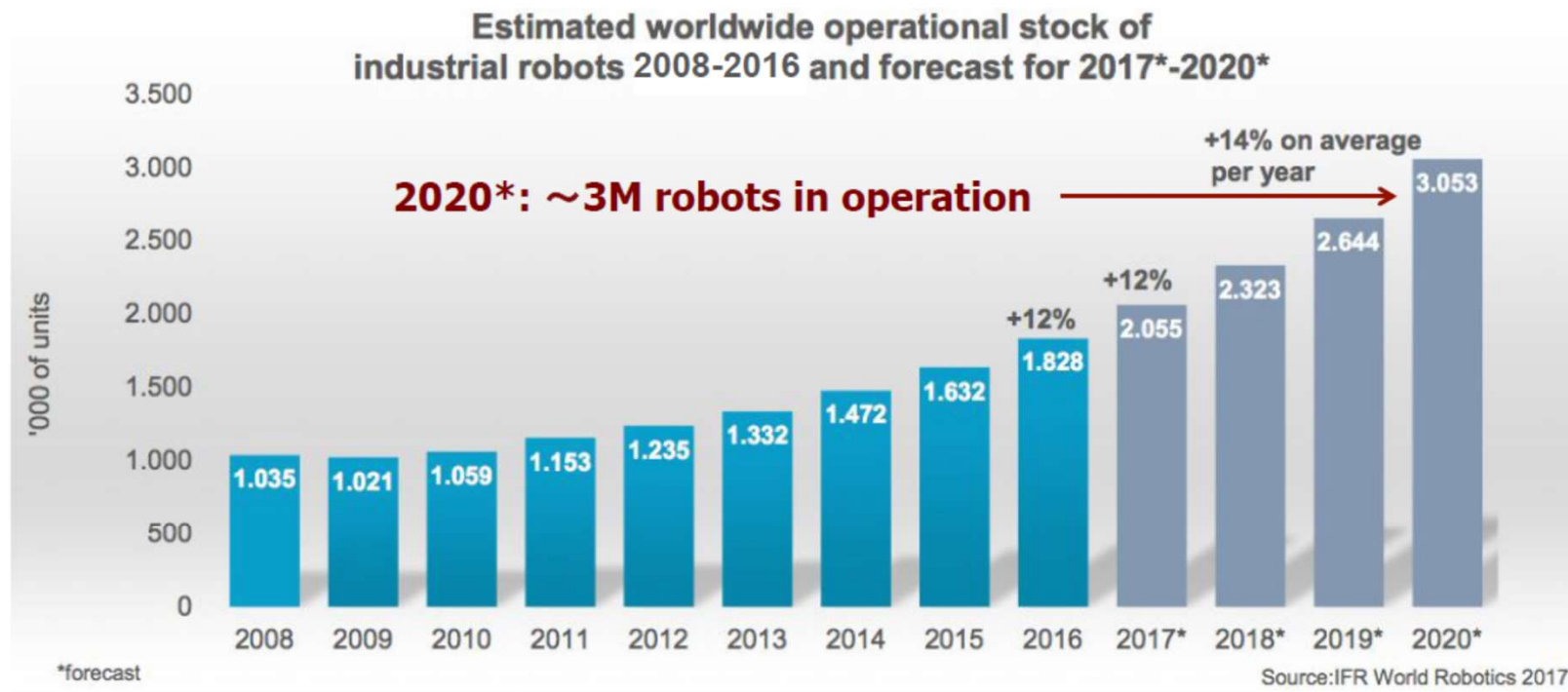
Институт „Михајло Пупин” Београд

први егзоскелет за доње екстремит



Diffusion

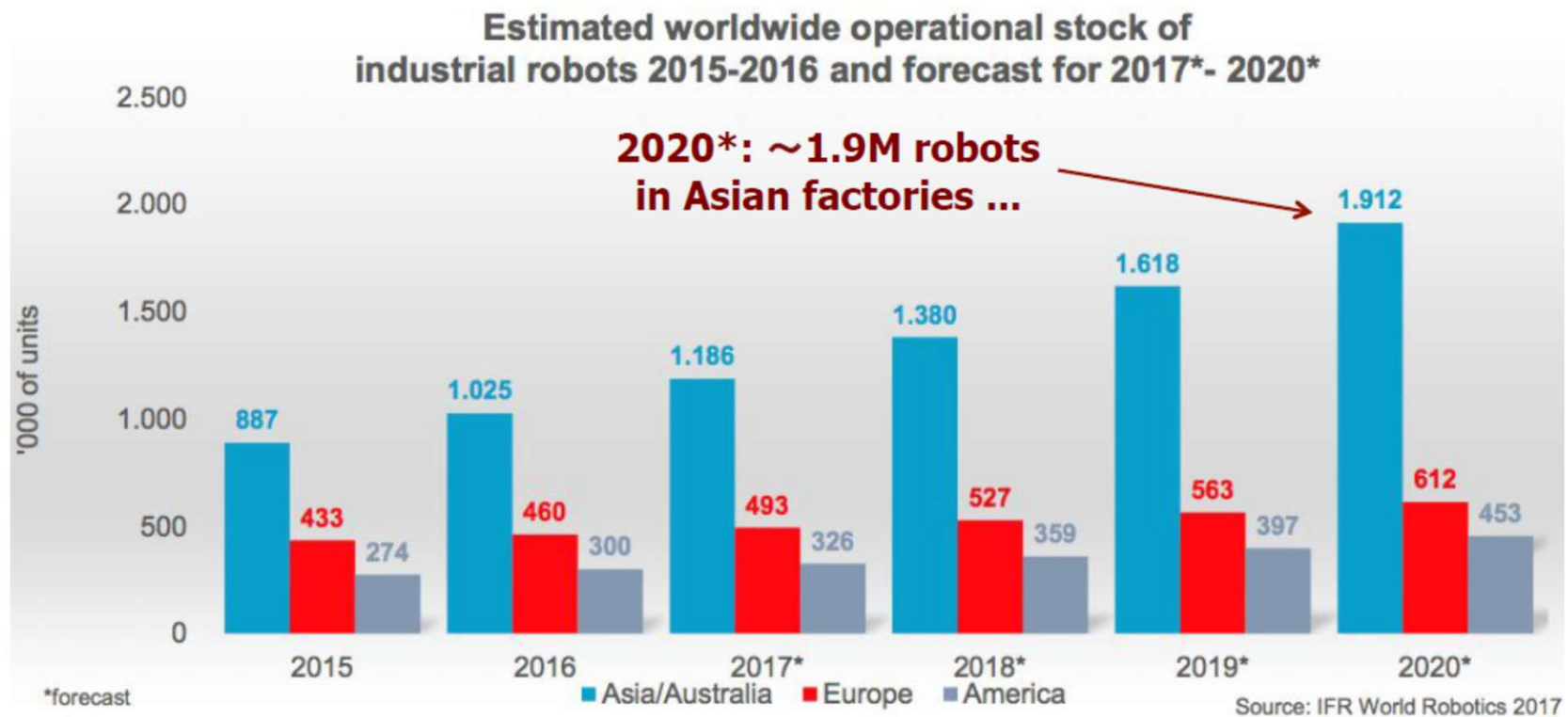
industrial robots in operation worldwide



(as reference: industrial robots in stock in 1973 = 3K, in 1983 = 66K)
length of robot service life is estimated in 12-15 years

Diffusion

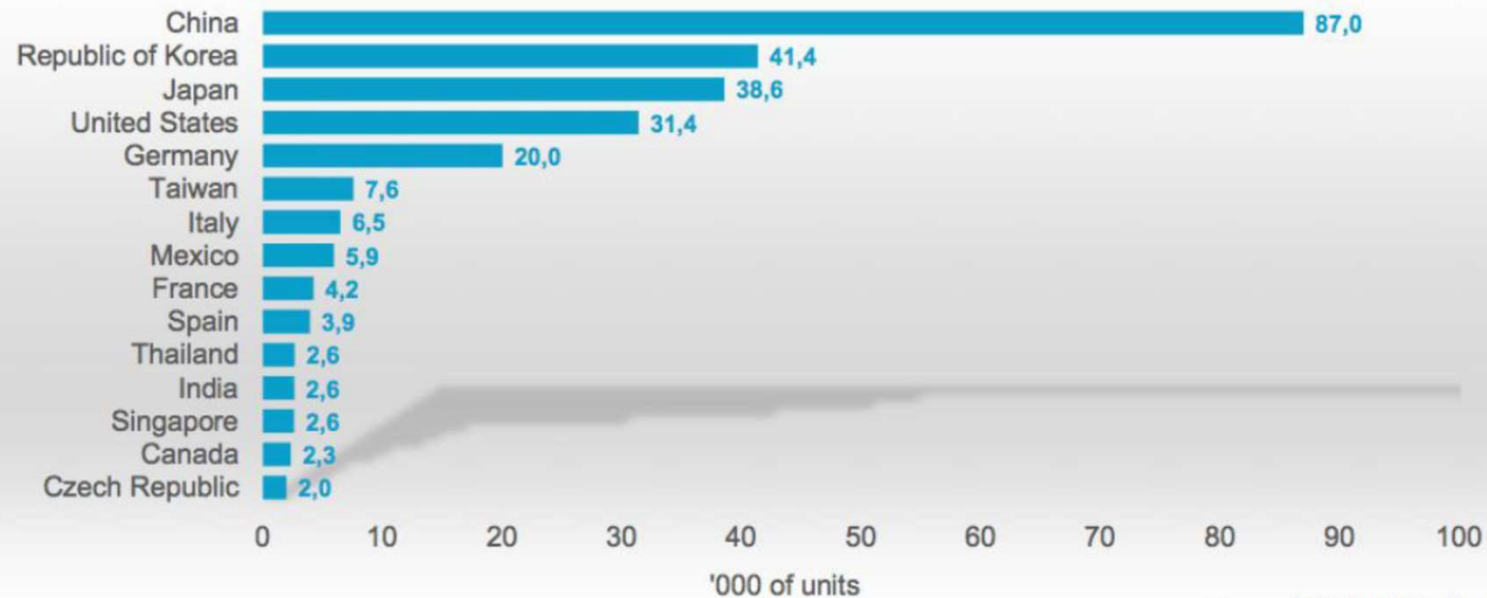
industrial robots in operation by world area



... out of which almost 1M operating in China!

Annual supply new installations in top markets (countries)

Estimated worldwide annual supply of industrial robots
15 largest markets 2016



Source: IFR World Robotics 2017

in 2016: 5 markets account for 75% of total supply

Robot manipulator kinematics



Kuka 150_2
(series 2000)
open kinematic chain
(rigid bodies
connected by joints)



Comau
Smart H4
closed kinematic chain



Fanuc
F-200iB
parallel kinematics

SCARA-type robots



Mitsubishi RP
(repeatability 5 micron,
payload 5 kg)



Mitsubishi RH
(workspace 850 mm,
velocity 5 m/s)



Bosch Turbo

SCARA (Selective Compliant Arm for Robotic Assembly)

- 4 degrees of freedom (= joints): 3 revolute + 1 prismatic (vertical) axes
- compliant in horizontal plane for micro-assembly and pick-and-place

Other types of robots

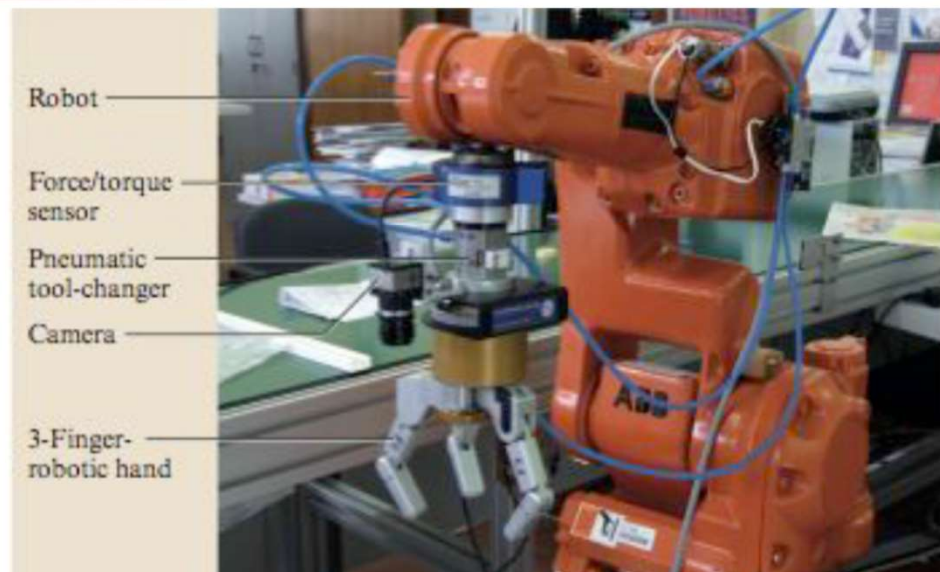


Comau Mast
gantry robot
(payload up to 560 kg)



ABB Flexpicker
(150 pick-and-place
operations/minute)

Robot end-effector sensors and tools

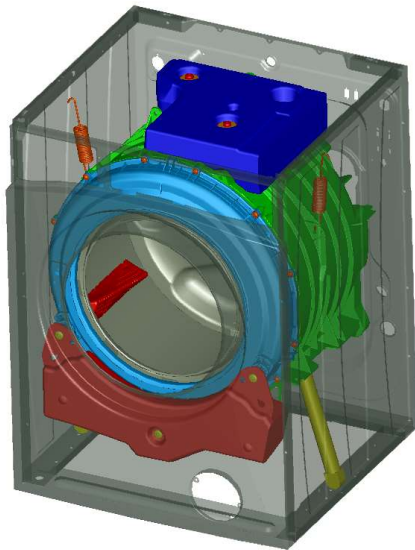


POLJOPRIVREDA / PROIZVODNJA



POLJOPRIVREDA / PROIZVODNJA

projekat univerzalne robotske platforme HORTIBOT, Aarhus University, Danska



MEDICINA
rehabilitacioni robot u sali za fizikalnu terapiju



MEDICINA
hirurški robot u operacionoj sali



ŽIVOTNI PROSTOR
od kancelarije do kuhije u pametnim zgradama



ŽIVOTNI PROSTOR
trajektorija kretanja robotskog usisivača prašine



BEZBEDNOST / PRIRODNE KATASTROFE
.... zemljotres, požar, eksplozije, poplave, cunami, ...

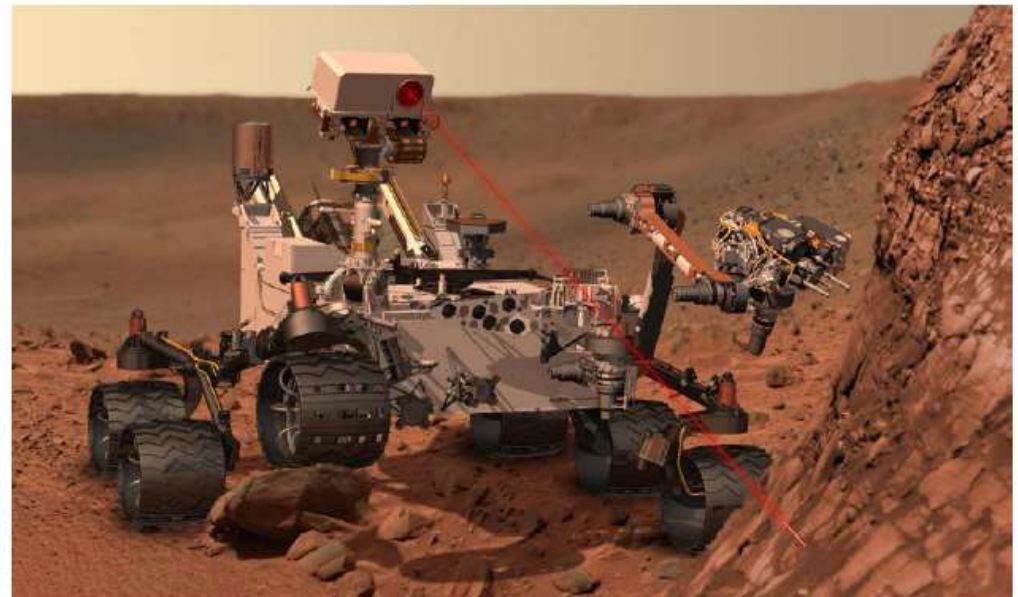


CYBERSPACE ROBOTICS

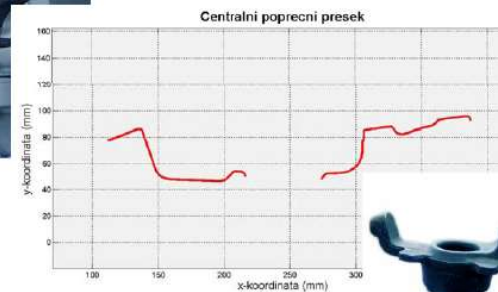
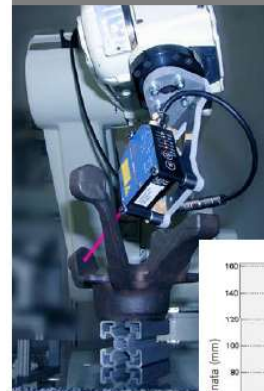
roboti koji postoje u apstraktnom informacionom prostoru Interneta

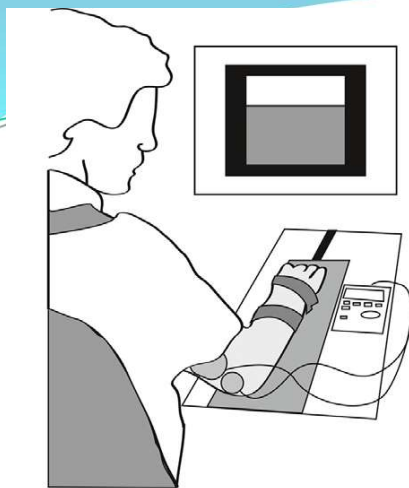


ISTRAŽIVANJE
istraživanje svemira, okeana, ...



ROBOTSKO MERENJE I SKENIRANJE





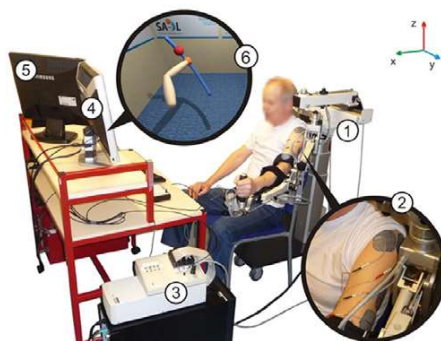
a



b



c



d

g. 6.11 The components the workstation. (1) Task display; (2) SaeboMAS arm support; (3) Surface electrodes and arrays on anterior deltoid, triceps and wrist extensor muscles; (4) Kinect; (5) goniometer; (6) control algorithm hardware and software; (7) operator monitor; (8) stop button

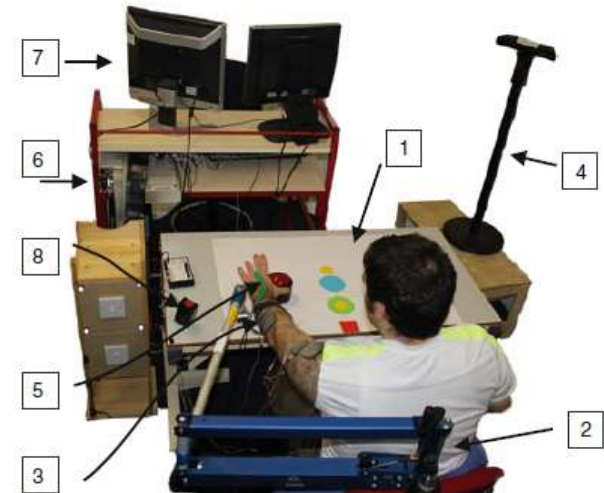
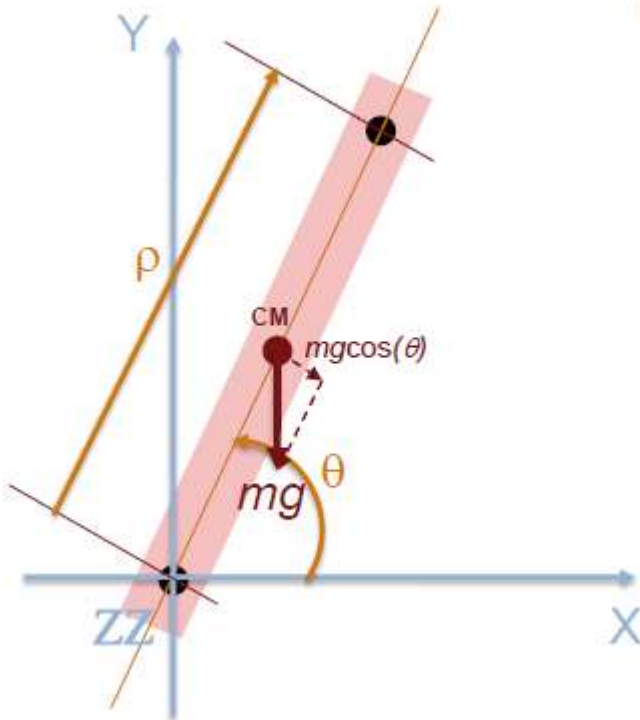
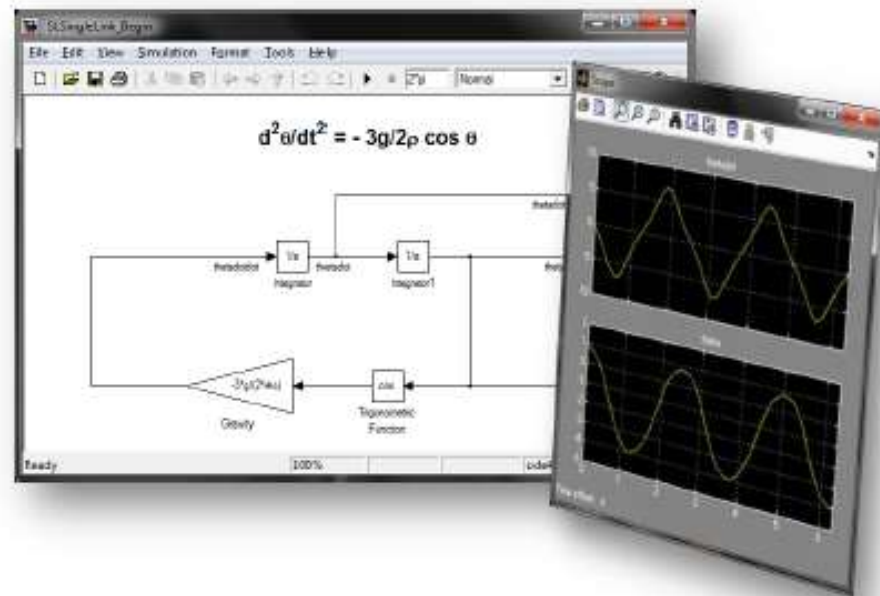


Fig. 3. Hybrid robotic rehabilitation system for reaching movements. (a) SMART device combined with FES (figure adapted from [28]). (b) BAT training based on two parallel bar and FES (figure adapted from [29]). (c) Planar end-effector workstation combined with FES [30,33] . (d) Unconstrained 3D workstation based on ArmeoSpring exoskeleton [31] .

Примена СИМУЛИНК -окружења

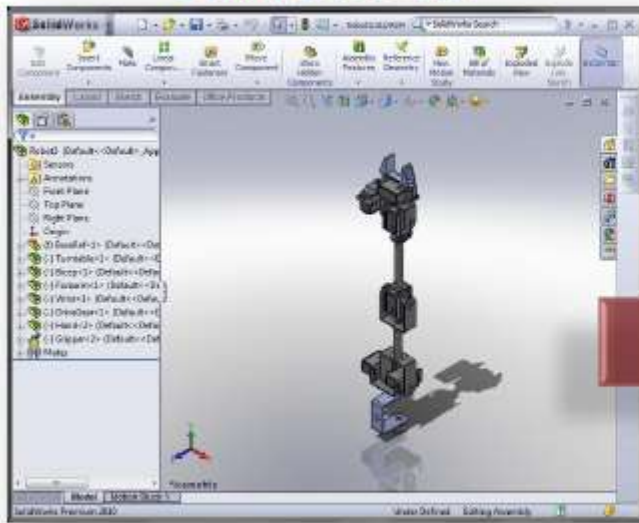


$$\ddot{\theta} = -\frac{3g}{2\rho} \cos\theta$$

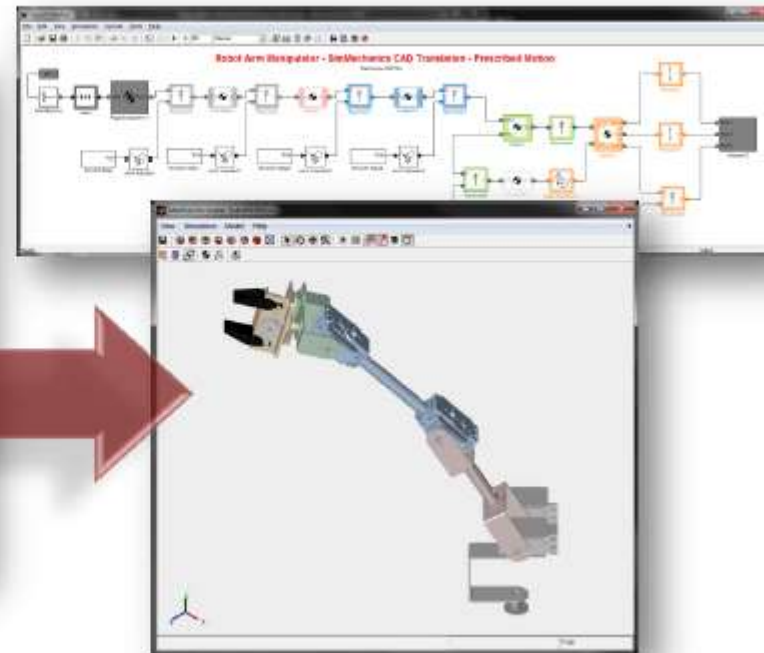


модел који је направљен применом CAD програма

SolidWorks Model



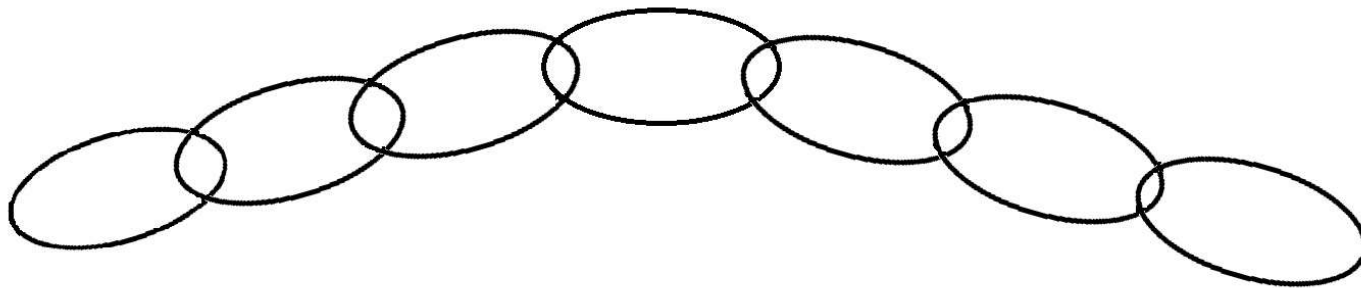
SimMechanics Model



“Сопствени” модел робота применом Родриговог приступа

- Динамички систем је систем крутих тела међусобно повезаних у кинематски ланац
- Везе у ланцу су идеалне, холономне и стационарне
- Сви сегменти роботског система су хомогена и идеално крута тела

Моделирање
динамике система
крутих тела и развој
софтвера који
аутоматизује тај
процес



Моделирање система крутих тела

Моделирање кинематике
датог система

- Геометрија, позиција, брзина

Моделирање динамике
датог система

- Убрзања, силе

Резултати развоја кода за аутоматско добијање диференцијалних једначина система крутих тела

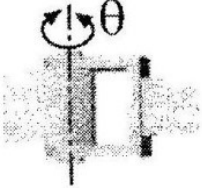
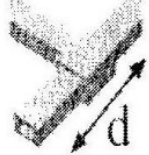
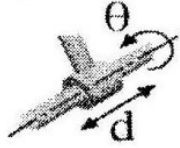

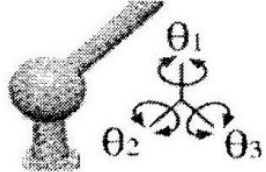
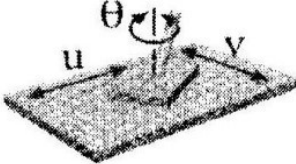
Могућност добијања диференцијалних једначина у коваријантном облику и свих параметара кинематике и динамике система крутих тела у затвореном облику

- Коришћењем Symbolic Toolbox-а добијају се величине у најопштијем облику без обзира на ред, конфигурацију или карактеристике система

Могућност решавања диференцијалних једначина кретања у затвореном облику

- Решавање се не мора одвијати за сваку бројну вредност поново, већ се добијају решења а бројне вредности се замњеују у њих

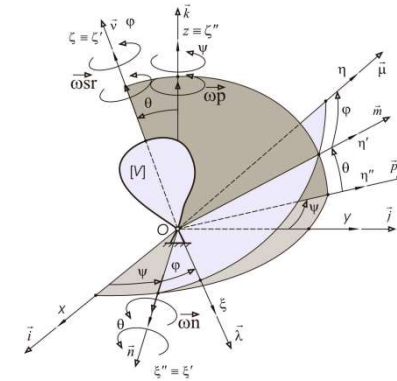
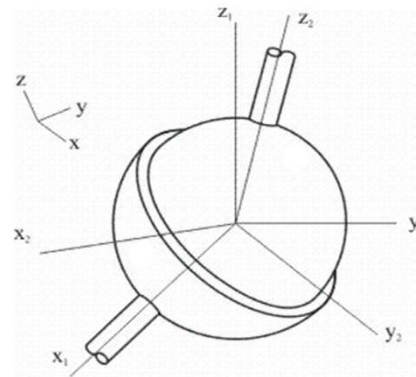
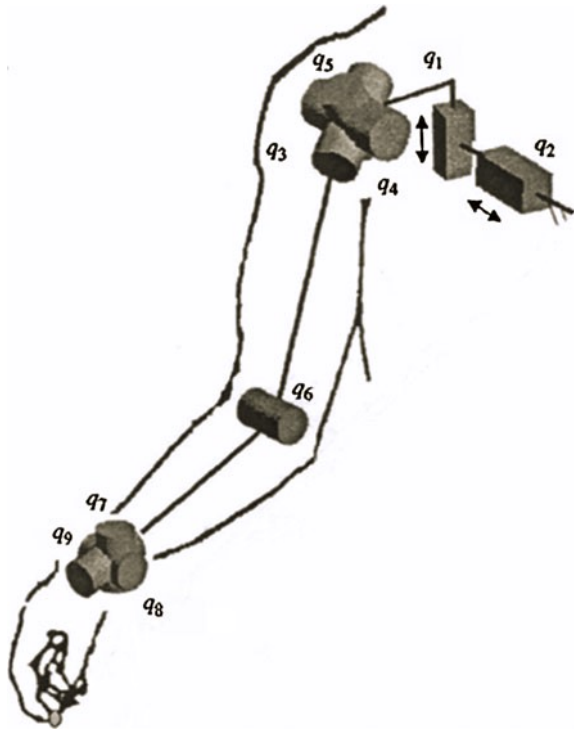
Примери кинематских парова

klasa kinem. para	broj stepeni slobode		
V	1		
IV	2		
III	3		

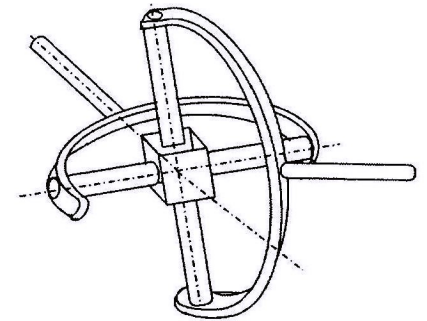
9 степени слободе (7 ротација и 2 транслација)

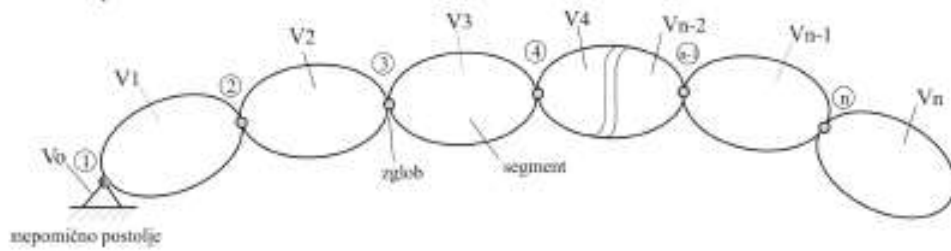
- ручни зглоб (флексија/екстензија, пронација/супинација, радијална/улнарна девијација)
- лакат (флексија/екстензија)
- раме (флексија/екстензија, абдукција/адукција, медијална/латерална

-Раме: сферни зглоб, декомпозиција фиктивно тело без масе + тело у коме је сконцентрисана целокупна маса система

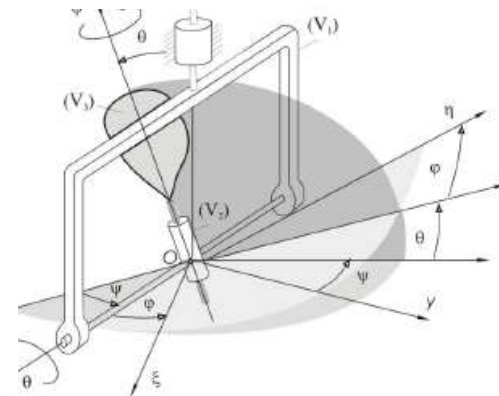
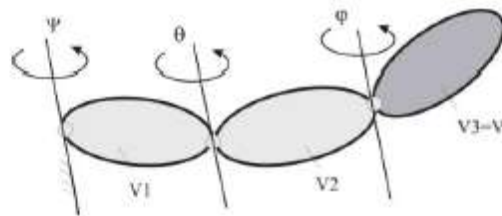
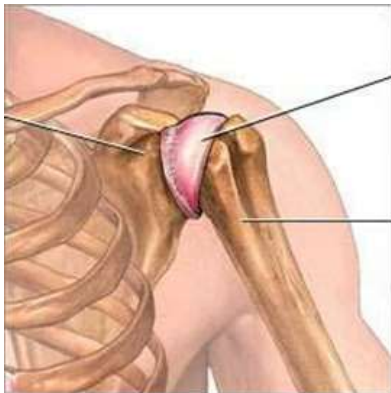


Ручни зглоб: Кардано-Хуков зглоб декомпозиција (за 2 сс)



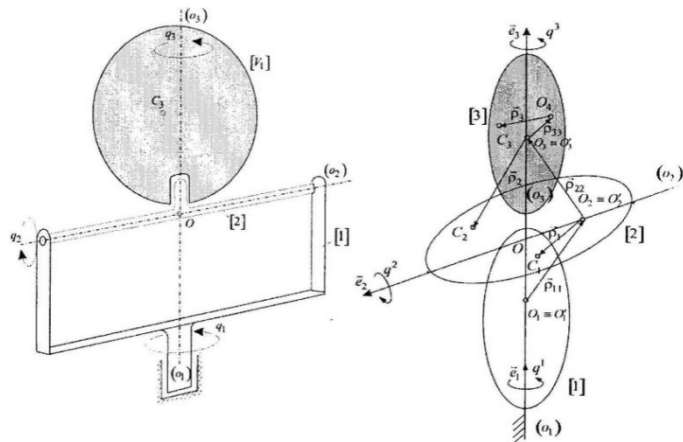


Primer dekompozije



sl.12

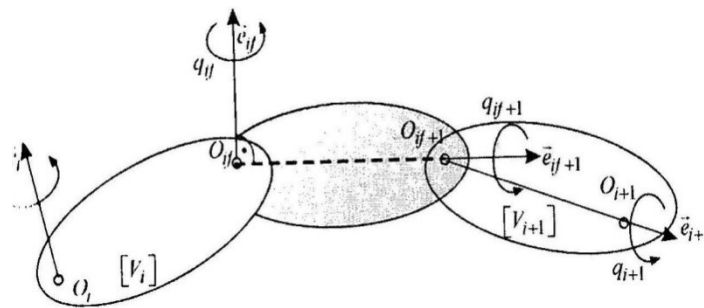
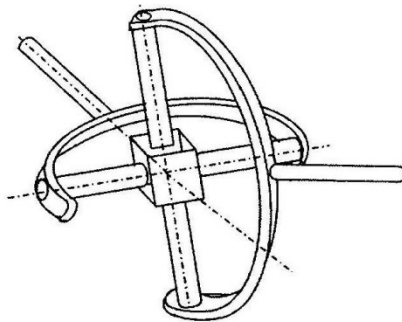
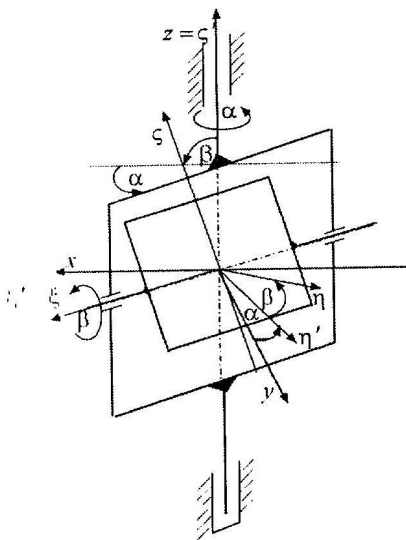
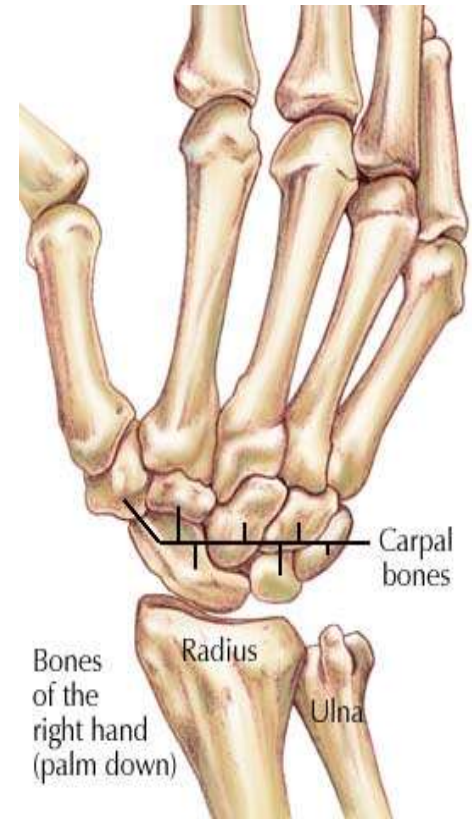
$$[A] = \begin{bmatrix} c\psi c\phi - s\psi c\theta s\phi & -c\psi s\phi - s\psi c\theta c\phi & s\psi s\theta \\ s\psi c\phi - c\psi c\theta s\phi & -s\psi s\phi - c\psi c\theta c\phi & -c\psi s\theta \\ s\theta s\phi & s\theta c\phi & c\theta \end{bmatrix}$$



Декомпозиција зглобова

- Ручни зглоб
 - Кардано-Хуков зглоб
2СС

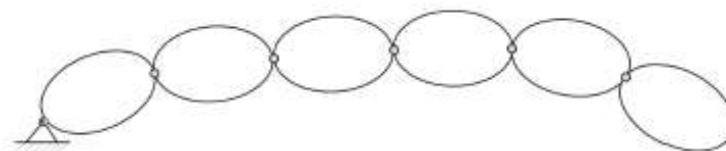
$$[A] = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\cos \beta \sin \alpha & \sin \alpha \sin \beta \\ \sin \alpha & \cos \beta & -\cos \alpha \sin \beta \\ 0 & \sin \beta & \cos \beta \end{bmatrix}$$



Кинематички ланци

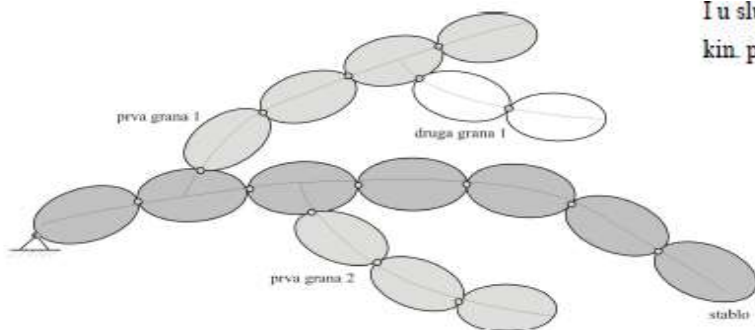
- Отворен кинематички ланац без гранања

a) kinematički lanac bez grananja (*i on predstavlja naš osnovni model*)



U slučaju otvorenog kin. lanca bez grananja $n_{zz} = n$

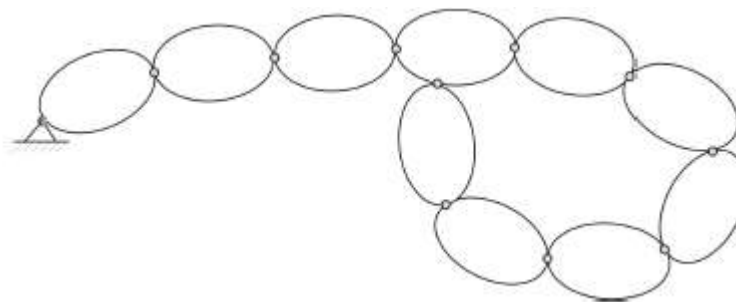
- Кинематички ланац са гранањем са структуром тополошког дрвета

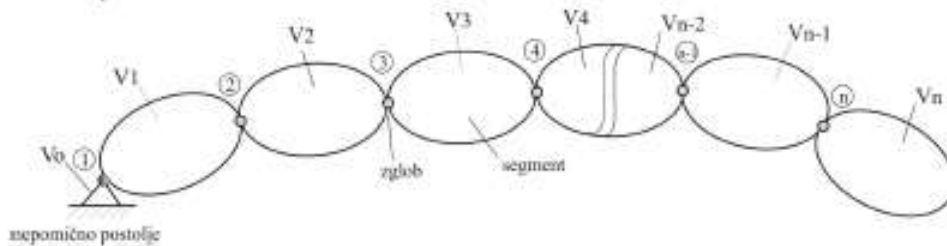


I u slučaju otvorenog kin. lanca sa grananjem takodje je $n_{zz} = n$ (pod uslovom kin. parova V klase)

- Затворени кинематички ланац

Kod zatvorenog kin.lanca je $n_{zz} \neq n$.Zatvoreni lanac presecamo tako da on postaje , u opštem slučaju otvoreni kin. lanac sa grananjem.





Uvodi se parametar veze $\xi_i, \bar{\xi}_i = 1 - \xi_i, i = 1, 2, \dots, n$

$$\xi_i = \begin{cases} 1, & i - \text{ti zglob je prizmatican} \\ 0, & i - \text{ti zglob je cilindricni} \end{cases}, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

$$\begin{Bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \dots \\ \xi_n \end{Bmatrix} \in R^{n \times 1}, \quad \begin{Bmatrix} \bar{\xi}_1 \\ \bar{\xi}_2 \\ \dots \\ \bar{\xi}_n \end{Bmatrix} \in R^{n \times 1}$$

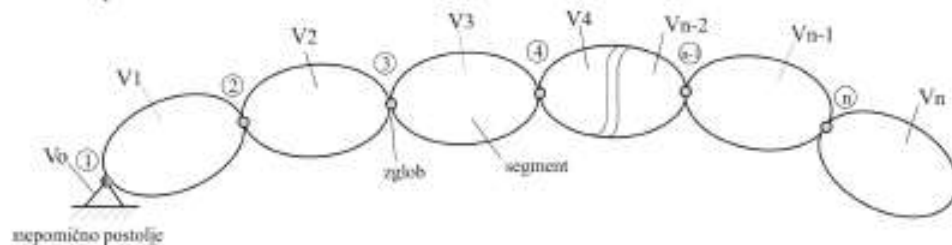
$$\bar{\xi}_i = \begin{cases} 1, & i - \text{ti zglob je cilindricni (R)} \\ 0, & i - \text{ti zglob je prizmatican (T)} \end{cases}, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

primer $\{\xi_i\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow$ Robotski sistem ima strukturu RTRR

Улазни параметри система крутих тела:

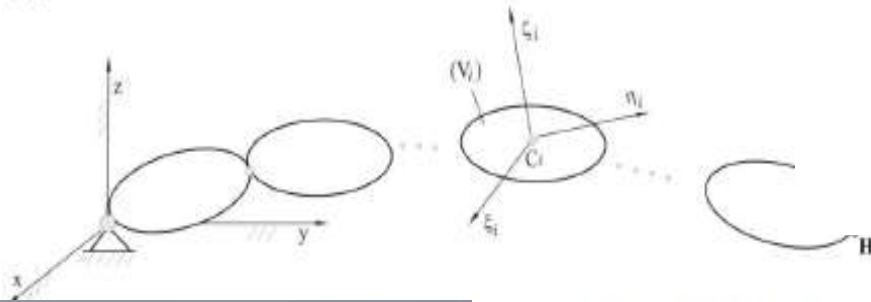
- Број степени слободe $n_{ss} = n$
- Структура и типови веза *holonomne skleronomne veze.*
- Геометрија система
- Распоред маса

Конфигурацију основног система тела (q^1, \dots, q^n)

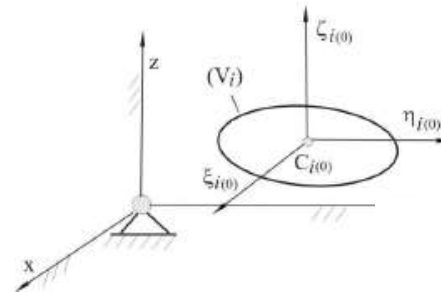


Референтна конфигурација

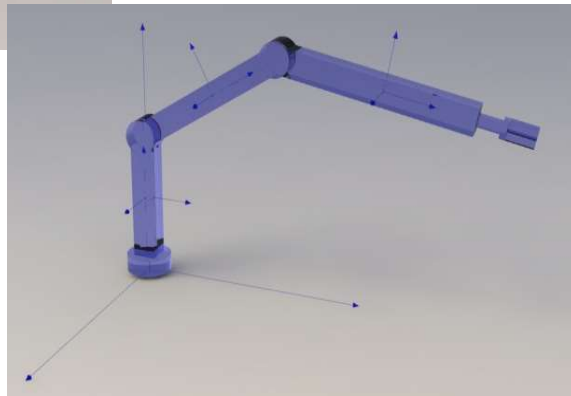
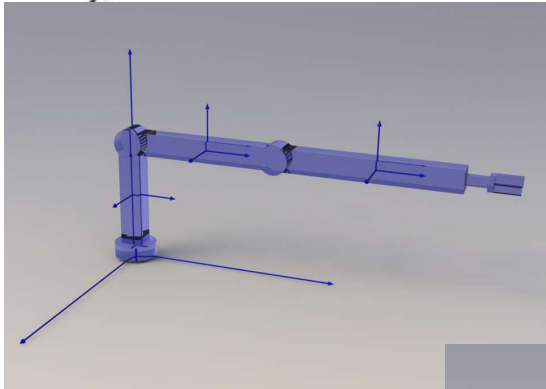
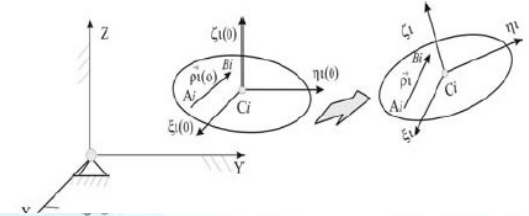
(V_i).



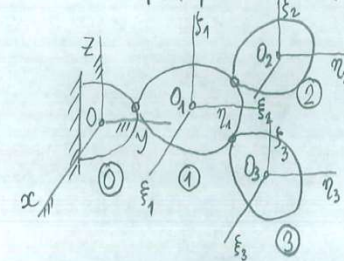
$$\{\bar{p}_i\} = [A_{i,0}] \{\bar{p}_i(0)\}$$



sl.18



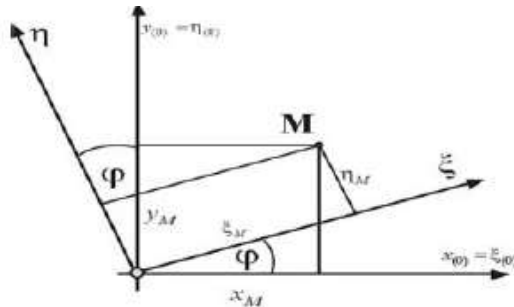
*** референтна конфигурација



Референтна конфигурација: све генерализоване координате су једнаке нули, тј. $q^1=0, q^2=0, q^3=0$ односно осе локалних координатних система $O_i \xi_i \eta_i \zeta_i$ су паралелне са осима непокретног система $Ox y z$.

координате вектора \vec{u} у систему безазног за тело (сегмент) \mathcal{U} :
 $\{\vec{u}^{(i)}\}$ - матрица колона, $(\vec{u}^{(i)})$ - матрица брета; $(\vec{u}^{(i)}) = \{\vec{u}^{(i)}\}^T$

Ортогоналне трансформације координата



$$x_M = \xi_M \cos \varphi - \sin \varphi \eta_M,$$

$$y_M = \xi_M \sin \varphi + \cos \varphi \eta_M$$

ротација око Oz

$$\begin{Bmatrix} x_M \\ y_M \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \xi_M \\ \eta_M \end{Bmatrix} = [A]_{2D} \begin{Bmatrix} \xi_M \\ \eta_M \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} x_M \\ y_M \\ z_M \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \xi_M \\ \eta_M \\ \varsigma_M \end{Bmatrix} = [A]_{3D} \begin{Bmatrix} \xi_M \\ \eta_M \\ \varsigma_M \end{Bmatrix}$$

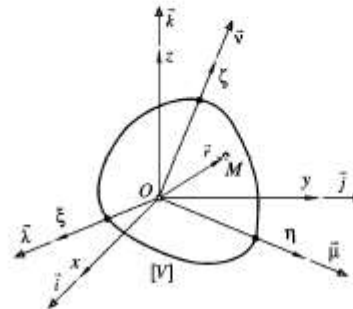
Ортогоналне трансформације координата

$\vec{r}_{Oxyz} = [A] \vec{r}_{O\xi\eta\varsigma}$ или у развијеном облику

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = [A] \begin{Bmatrix} \xi \\ \eta \\ \varsigma \end{Bmatrix}$$

Матрица трансформације $[A]$ представља ортогоналну матрицу тј. важи

$$[A] = \begin{bmatrix} \vec{\lambda} \cdot \vec{i} & \vec{\mu} \cdot \vec{i} & \vec{v} \cdot \vec{i} \\ \vec{\lambda} \cdot \vec{j} & \vec{\mu} \cdot \vec{j} & \vec{v} \cdot \vec{j} \\ \vec{\lambda} \cdot \vec{k} & \vec{\mu} \cdot \vec{k} & \vec{v} \cdot \vec{k} \end{bmatrix}, [A]^{-1} = [A]^T$$



Примери одређивања матрица трансформације

$$\begin{aligned}x &= \xi \vec{\lambda} \cdot \vec{i} + \eta \vec{\mu} \cdot \vec{i} + \zeta \vec{\nu} \cdot \vec{i}, \\y &= \xi \vec{\lambda} \cdot \vec{j} + \eta \vec{\mu} \cdot \vec{j} + \zeta \vec{\nu} \cdot \vec{j}, \\z &= \xi \vec{\lambda} \cdot \vec{k} + \eta \vec{\mu} \cdot \vec{k} + \zeta \vec{\nu} \cdot \vec{k},\end{aligned}$$

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = [A] \begin{Bmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{Bmatrix}$$

$$[A] = \begin{bmatrix} \vec{\lambda} \cdot \vec{i} & \vec{\mu} \cdot \vec{i} & \vec{\nu} \cdot \vec{i} \\ \vec{\lambda} \cdot \vec{j} & \vec{\mu} \cdot \vec{j} & \vec{\nu} \cdot \vec{j} \\ \vec{\lambda} \cdot \vec{k} & \vec{\mu} \cdot \vec{k} & \vec{\nu} \cdot \vec{k} \end{bmatrix}$$

$$[A] = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{bmatrix}$$

$$f^1 = \alpha_{11}^2 + \alpha_{21}^2 + \alpha_{31}^2 - 1 = 0,$$

$$f^2 = \alpha_{12}^2 + \alpha_{22}^2 + \alpha_{32}^2 - 1 = 0,$$

$$f^3 = \alpha_{13}^2 + \alpha_{23}^2 + \alpha_{33}^2 - 1 = 0,$$

$$f^4 = \alpha_{11}\alpha_{12} + \alpha_{21}\alpha_{22} + \alpha_{31}\alpha_{32} = 0,$$

$$f^5 = \alpha_{12}\alpha_{13} + \alpha_{22}\alpha_{23} + \alpha_{32}\alpha_{33} = 0,$$

$$f^6 = \alpha_{13}\alpha_{11} + \alpha_{23}\alpha_{21} + \alpha_{33}\alpha_{31} = 0.$$

$$\alpha_{21} = \vec{\lambda} \cdot \vec{j} = \cos \angle(\vec{\lambda}, \vec{j})$$

$$\det[A] = (\vec{\lambda} \times \vec{\mu}) \cdot \vec{\nu} = 1$$

matrica transformacije $[A]$ je nesingularna

- Matrica $[A]$ predstavlja *matricu transformacije* koordinata tačke M iz koordinatnog sistema $O\xi\eta\zeta$ u koordinatni sistem $Oxyz$.

$$\begin{cases} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{cases} = [A]^{-1} \begin{cases} x \\ y \\ z \end{cases},$$



$$\begin{cases} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{cases} = [A]^T \begin{cases} x \\ y \\ z \end{cases}$$



$$[A]^{-1} = [A]^T,$$



$$\begin{aligned} \xi &= x\vec{\lambda} \cdot \vec{i} + y\vec{\lambda} \cdot \vec{j} + z\vec{\lambda} \cdot \vec{k}, \\ \eta &= x\vec{\mu} \cdot \vec{i} + y\vec{\mu} \cdot \vec{j} + z\vec{\mu} \cdot \vec{k}, \\ \zeta &= x\vec{v} \cdot \vec{i} + y\vec{v} \cdot \vec{j} + z\vec{v} \cdot \vec{k}, \end{aligned}$$



$$[B] = [A]^T \Leftrightarrow [A] = [B]^T.$$

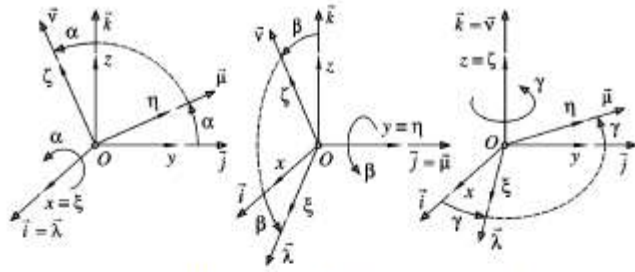
$$[A][A]^{-1} = [B]^T [B] \Rightarrow [B]^{-1} = [B]^T.$$



$$\begin{cases} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{cases} = [B] \begin{cases} x \\ y \\ z \end{cases}$$



$$[B] = \begin{bmatrix} \vec{\lambda} \cdot \vec{i} & \vec{\lambda} \cdot \vec{j} & \vec{\lambda} \cdot \vec{k} \\ \vec{\mu} \cdot \vec{i} & \vec{\mu} \cdot \vec{j} & \vec{\mu} \cdot \vec{k} \\ \vec{v} \cdot \vec{i} & \vec{v} \cdot \vec{j} & \vec{v} \cdot \vec{k} \end{bmatrix}.$$



$$[A_{x,\alpha=30^\circ}] = \begin{bmatrix} \cos 0 & \cos(\pi/2) & \cos(\pi/2) \\ \cos(\pi/2) & \cos \alpha & \cos(\pi/2 + \alpha) \\ \cos(\pi/2) & \cos(\pi/2 - \alpha) & \cos \alpha \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$$

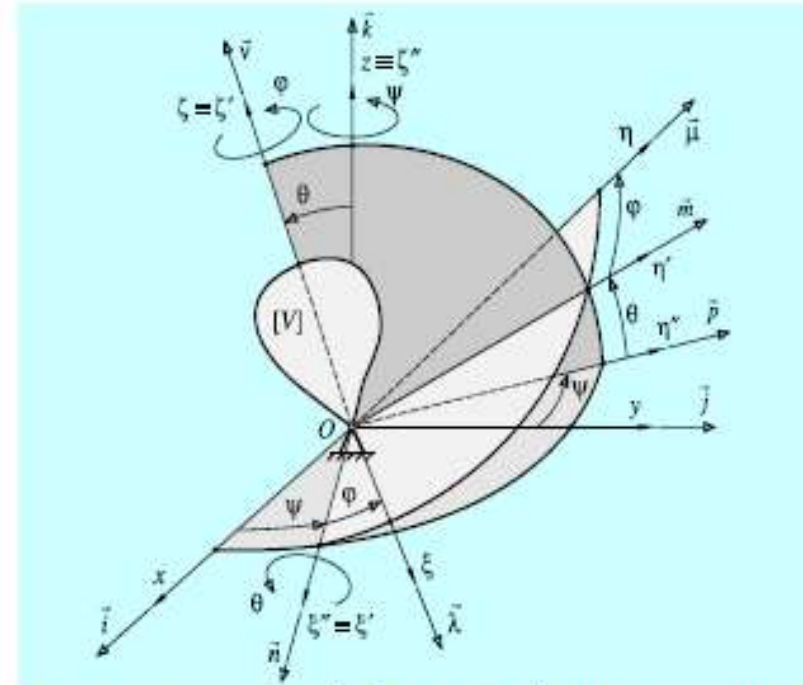
$$[A_{y,\beta=45^\circ}] = \begin{bmatrix} \cos \beta & \cos(\pi/2) & \cos(\pi/2 - \beta) \\ \cos(\pi/2) & \cos 0 & \cos(\pi/2) \\ \cos(\pi/2 + \beta) & \cos(\pi/2) & \cos \beta \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos \beta & 0 & \sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \beta & 0 & \cos \beta \end{bmatrix}$$

$$[A_{z,\gamma=60^\circ}] = \begin{bmatrix} \cos \gamma & \cos(\pi/2 + \gamma) & \cos(\pi/2) \\ \cos(\pi/2 - \gamma) & \cos \gamma & \cos(\pi/2) \\ \cos(\pi/2) & \cos(\pi/2) & \cos 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos \gamma & -\sin \gamma & 0 \\ \sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Матрица трансформације координата за случај сферног кретања крутог тела чији положај одређују Ојлерови углови



Нека круто тело [V] врши сферно кретање у односу на тачку O која представља координатни почетак Декартовог координатног система $O\xi\eta\zeta$ везаног за круто тело. У референтној конфигурацији назначеној индексом (0) описани координатни систем поклапа са непокретним координатним системом $Oxyz$. Узимајући да је произвољна конфигурација

1 ротација ψ

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = [A_\psi] \begin{Bmatrix} \xi'' \\ \eta'' \\ \zeta'' \end{Bmatrix}, \quad [A_\psi] = \begin{bmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2 ротација θ

$$\begin{Bmatrix} \xi'' \\ \eta'' \\ \zeta'' \end{Bmatrix} = [A_\theta] \begin{Bmatrix} \xi' \\ \eta' \\ \zeta' \end{Bmatrix}, \quad [A_\theta] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

3 ротација φ

$$\begin{Bmatrix} \xi' \\ \eta' \\ \zeta' \end{Bmatrix} = [A_\varphi] \begin{Bmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{Bmatrix}, \quad [A_\varphi] = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Из претходних израза директно следи да је:

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = [A] \begin{Bmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{Bmatrix},$$

где је одговарајућа матрица

$$[A] = [A_\psi][A_\theta][A_\varphi]$$

и она представља матрицу трансформације координата тачке M датих у координатном систему $O\xi\eta\zeta$ у координатни систем $Oxyz$.

Трансформација координата вектора \vec{a} датог у локалном коорд. систему i -тог тела ($\{a^{(i)}\}$) из j -тог је дата са:

$$\{a^{(i)}\} = [A_{i,j}] \{a^{(j)}\}, \quad [A_{i,j}]^{-1} = [A_{j,i}]^T$$

$$\vec{e}_\psi = \vec{k} \Rightarrow \{\vec{e}_\psi\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

$$\vec{e}_\theta = \vec{n} \Rightarrow \{\vec{e}_\theta\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\vec{e}_\varphi = \vec{v} \Rightarrow \{\vec{e}_\varphi\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

Пример сложених матрица трансформације:

$$\begin{Bmatrix} x_H \\ y_H \\ z_H \end{Bmatrix} = [A_{r0,1}] [A_{r1,2}] \dots [A_{r_{m-1},n}] \begin{Bmatrix} \xi_n \\ \eta_n \\ \zeta_n \end{Bmatrix} =$$
$$[A_{r0,k}] = [A_{r0,1}] [A_{r1,2}] \dots [A_{r_{m-1},n}]$$

Дуални објекти

- антисиметрична

$$\{\vec{a}\} = \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix} \longrightarrow [a^d] = \begin{bmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[a^d]^T = -[a^d] \quad [a^d]^2 = \{\vec{a}\}(\vec{a}) - a^2 [I]$$

$$[a^d]^2 = \begin{bmatrix} -a_3^2 - a_2^2 & a_1 a_2 & a_1 a_3 \\ a_2 a_1 & -a_3^2 - a_1^2 & a_2 a_3 \\ a_3 a_1 & a_3 a_2 & -a_1^2 - a_2^2 \end{bmatrix} \quad \vec{a} = \vec{e}$$

- Векторски производ и дуални објект

$$\{\vec{a} \times \vec{b}\} = \begin{Bmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{Bmatrix}$$

$$[a^d] \{\vec{b}\} = \begin{Bmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{Bmatrix}$$



$$\{\vec{a} \times \vec{b}\} = [a^d] \{\vec{b}\}$$

$$[e^d]^{2i-1} = (-1)^{i-1} [e^d],$$

$$[e^d]^{2i} = (-1)^{i-1} [e^d]^2, \quad i=1,2,3,\dots$$

$$[a^d] \{\vec{b}\} = -[b^d] \{\vec{a}\}$$

- Определить значения объектов $[e^d], [e^d]^2, [e^d]^5, [e^d]^6$ относительно вектора $\vec{e}_z = \vec{k} = (0 \ 0 \ 1)^T$.

$$[e_z^d] = \begin{bmatrix} 0 & -e_3 & e_2 \\ e_3 & 0 & -e_1 \\ -e_2 & e_1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad [e_z^d]^2 = \begin{bmatrix} -e_3^2 e_2^2 & e_1 e_2 & e_1 e_3 \\ e_2 e_1 & -e_3^2 e_1^2 & e_2 e_3 \\ e_3 e_1 & e_3 e_2 & -e_1^2 e_2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[e^d]^{2i-1} = (-1)^{i-1} [e^d], \quad [e^d]^{2i} = (-1)^{i-1} [e^d]^2; \quad i=1, 2, 3, \dots$$

$$[e_z^d]^5 = [e_z^d]^{2 \cdot 3 - 1} = (-1)^{3-1} [e_z^d] = [e_z^d] = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad i=3$$

$$[e_z^d]^6 = [e_z^d]^{2 \cdot 3} = (-1)^{3-1} [e_z^d]^2 = [e_z^d]^2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad i=3$$

Veze između ugaone brzine, ugaonog ubrzanja i matrice transformacije u slučaju sfernog kretanja tela

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = [A] \begin{Bmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{Bmatrix}$$

$$\{\vec{v}\} = [\omega^d] \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix}$$

$$\{\vec{v}\} = [\omega^d][A] \begin{Bmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{Bmatrix} = \frac{d[A]}{dt} \begin{Bmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{Bmatrix}$$

$$\xi, \eta, \zeta = \text{const}$$

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times O\vec{M}$$

$$\{\vec{v}\} = \begin{Bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{Bmatrix} = \frac{d[A]}{dt} \begin{Bmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\alpha}_{11} & \dot{\alpha}_{12} & \dot{\alpha}_{13} \\ \dot{\alpha}_{21} & \dot{\alpha}_{22} & \dot{\alpha}_{23} \\ \dot{\alpha}_{31} & \dot{\alpha}_{32} & \dot{\alpha}_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \alpha_{31} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \alpha_{32} \\ \alpha_{13} & \alpha_{23} & \alpha_{33} \end{bmatrix}$$

$$\left[\frac{d[A]}{dt} - [\omega^d][A] \right] \begin{Bmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{Bmatrix} = 0$$

$$[\omega^d] = \frac{d[A]}{dt} [A]^T$$

$$\begin{aligned} \omega_x &= \dot{\alpha}_{31}\alpha_{21} + \dot{\alpha}_{32}\alpha_{22} + \dot{\alpha}_{33}\alpha_{23}, \\ \omega_y &= \dot{\alpha}_{11}\alpha_{31} + \dot{\alpha}_{12}\alpha_{32} + \dot{\alpha}_{13}\alpha_{33}, \\ \omega_z &= \dot{\alpha}_{21}\alpha_{11} + \dot{\alpha}_{22}\alpha_{12} + \dot{\alpha}_{23}\alpha_{13}. \end{aligned}$$

$$\begin{Bmatrix} \omega_\xi \\ \omega_\eta \\ \omega_\zeta \end{Bmatrix} = [A]^T \begin{Bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{Bmatrix}$$



$$\begin{aligned} \omega_\xi &= \alpha_{13}\dot{\alpha}_{12} + \alpha_{23}\dot{\alpha}_{22} + \alpha_{33}\dot{\alpha}_{32}, \\ \omega_\eta &= \alpha_{11}\dot{\alpha}_{13} + \alpha_{21}\dot{\alpha}_{23} + \alpha_{31}\dot{\alpha}_{33}, \\ \omega_\zeta &= \alpha_{12}\dot{\alpha}_{11} + \alpha_{22}\dot{\alpha}_{21} + \alpha_{32}\dot{\alpha}_{31}. \end{aligned}$$

- Vektor ugaonog ubrzanja krutog dela

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$$



$$\{\vec{\varepsilon}\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dot{\omega}_x \\ \dot{\omega}_y \\ \dot{\omega}_z \end{Bmatrix}$$

$$[\varepsilon^d] = [\dot{\omega}^d]$$

$$[\varepsilon^d] = \frac{d^2[A]}{dt^2}[A]^T + \frac{d[A]}{dt} \frac{d[A]^T}{dt}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -\varepsilon_z & \varepsilon_y \\ \varepsilon_z & 0 & -\varepsilon_x \\ -\varepsilon_y & \varepsilon_x & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ddot{\alpha}_{11} & \ddot{\alpha}_{12} & \ddot{\alpha}_{13} \\ \ddot{\alpha}_{21} & \ddot{\alpha}_{22} & \ddot{\alpha}_{23} \\ \ddot{\alpha}_{31} & \ddot{\alpha}_{32} & \ddot{\alpha}_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \alpha_{31} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \alpha_{32} \\ \alpha_{13} & \alpha_{23} & \alpha_{33} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dot{\alpha}_{11} & \dot{\alpha}_{12} & \dot{\alpha}_{13} \\ \dot{\alpha}_{21} & \dot{\alpha}_{22} & \dot{\alpha}_{23} \\ \dot{\alpha}_{31} & \dot{\alpha}_{32} & \dot{\alpha}_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\alpha}_{11} & \dot{\alpha}_{21} & \dot{\alpha}_{31} \\ \dot{\alpha}_{12} & \dot{\alpha}_{22} & \dot{\alpha}_{32} \\ \dot{\alpha}_{13} & \dot{\alpha}_{23} & \dot{\alpha}_{33} \end{bmatrix}$$



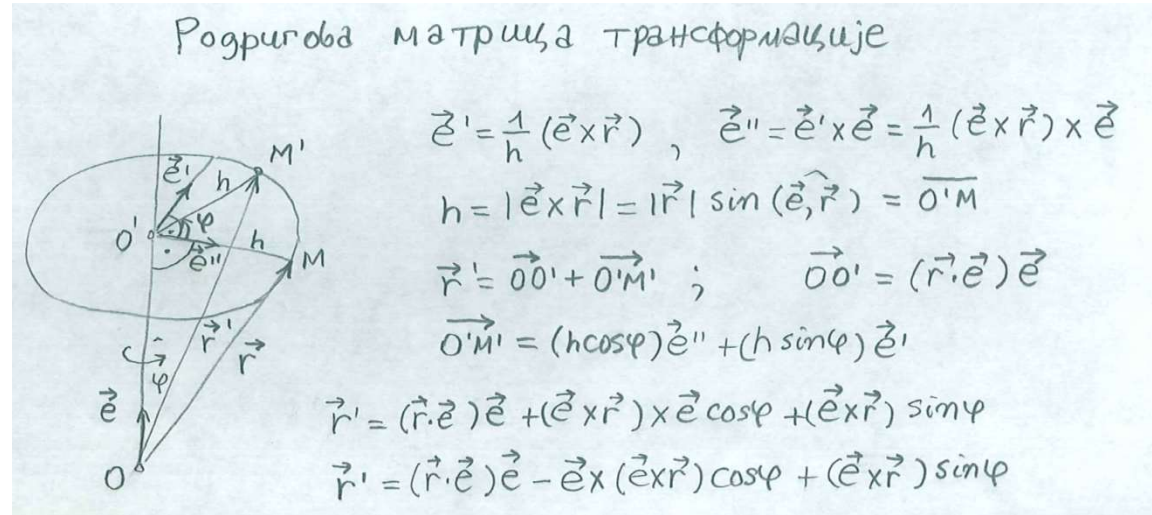
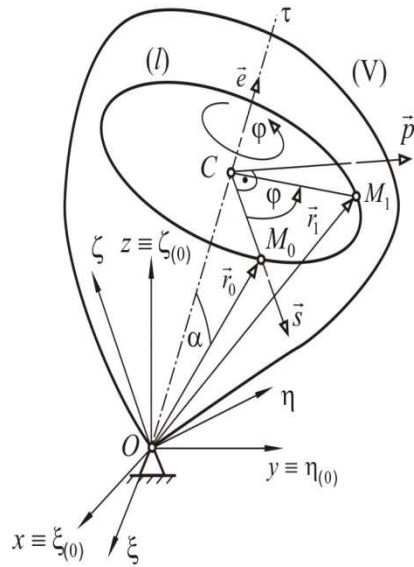
$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \ddot{\alpha}_{31}\alpha_{21} + \ddot{\alpha}_{32}\alpha_{22} + \ddot{\alpha}_{33}\alpha_{23} + \dot{\alpha}_{31}\dot{\alpha}_{21} + \dot{\alpha}_{32}\dot{\alpha}_{22} + \dot{\alpha}_{33}\dot{\alpha}_{23}, \\ \varepsilon_y &= \ddot{\alpha}_{11}\alpha_{31} + \ddot{\alpha}_{12}\alpha_{32} + \ddot{\alpha}_{13}\alpha_{33} + \dot{\alpha}_{11}\dot{\alpha}_{31} + \dot{\alpha}_{12}\dot{\alpha}_{32} + \dot{\alpha}_{13}\dot{\alpha}_{33}, \\ \varepsilon_z &= \ddot{\alpha}_{21}\alpha_{11} + \ddot{\alpha}_{22}\alpha_{12} + \ddot{\alpha}_{23}\alpha_{13} + \dot{\alpha}_{21}\dot{\alpha}_{11} + \dot{\alpha}_{22}\dot{\alpha}_{12} + \dot{\alpha}_{23}\dot{\alpha}_{13}. \end{aligned}$$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_\xi \\ \varepsilon_\eta \\ \varepsilon_\zeta \end{Bmatrix} = [A]^T \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \end{Bmatrix}$$



$$\begin{aligned} \varepsilon_\xi &= \dot{\alpha}_{13}\dot{\alpha}_{12} + \dot{\alpha}_{23}\dot{\alpha}_{22} + \dot{\alpha}_{33}\dot{\alpha}_{32} + \alpha_{13}\ddot{\alpha}_{12} + \alpha_{23}\ddot{\alpha}_{22} + \alpha_{33}\ddot{\alpha}_{32}, \\ \varepsilon_\eta &= \dot{\alpha}_{11}\dot{\alpha}_{13} + \dot{\alpha}_{21}\dot{\alpha}_{23} + \dot{\alpha}_{31}\dot{\alpha}_{33} + \alpha_{11}\ddot{\alpha}_{13} + \alpha_{21}\ddot{\alpha}_{23} + \alpha_{31}\ddot{\alpha}_{33}, \\ \varepsilon_\zeta &= \dot{\alpha}_{12}\dot{\alpha}_{11} + \dot{\alpha}_{22}\dot{\alpha}_{21} + \dot{\alpha}_{32}\dot{\alpha}_{31} + \alpha_{12}\ddot{\alpha}_{11} + \alpha_{22}\ddot{\alpha}_{21} + \alpha_{32}\ddot{\alpha}_{31}. \end{aligned}$$

Родригов образац, Родригова матрица трансформације



$$\{\vec{r}_0\} = \begin{Bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{Bmatrix}, \quad \{\vec{r}_1\} = \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} \quad \{\vec{r}_1\} = [A^r] \{\vec{r}_0\}$$

$$\vec{r}_1 = \vec{r}_0 - |\vec{e} \times \vec{r}_0| (1 - \cos \varphi) \vec{s} + |\vec{e} \times \vec{r}_0| (\sin \varphi) \vec{p}$$

$$\vec{r}_1 = \vec{r}_0 + (1 - \cos \varphi) \vec{e} \times (\vec{e} \times \vec{r}_0) + (\sin \varphi) \vec{e} \times \vec{r}_0$$

$$[A^r] = [I] + (1 - \cos \varphi) [e^d]^2 + \sin \varphi [e^d] \quad \overline{CM}_0 = \overline{CM}_1 = |\vec{e} \times \vec{r}_0| = h$$

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = [A^r] \begin{Bmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{Bmatrix}$$

• A)

$$[e^d][A^r] = [e^d] \cos \varphi + [e^d]^2 \sin \varphi,$$

$$\frac{\partial [A^r]}{\partial \varphi} = [e^d] \cos \varphi + [e^d]^2 \sin \varphi,$$

$$\vec{e} \times (\vec{e} \times \vec{r}) = \vec{e}(\vec{e} \cdot \vec{r}) - \vec{r}(\vec{e} \cdot \vec{e}) \quad (\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b}))$$

$$\vec{r}' = \vec{r} + \vec{e} \times (\vec{e} \times \vec{r})(1 - \cos\varphi) + (\vec{e} \times \vec{r}) \sin\varphi, \quad (\vec{e} \times ([e^d] \{r\})) = [e^d] \{r\})$$

$$\{r'\} = \{r\} + [e^d]^2 (1 - \cos\varphi) \{r\} + [e^d] \sin\varphi \{r\}$$

$$\{r'\} = [A_r] \{r\} \rightarrow [A_r] = [I] + [e^d]^2 (1 - \cos\varphi) + [e^d] \sin\varphi$$

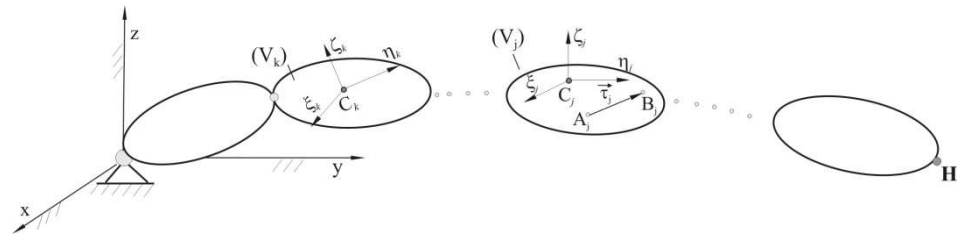
$$\Delta \vec{r} = \vec{r}' - \vec{r} = \vec{e} \times (\vec{e} \times \vec{r})(1 - \cos\Delta\varphi) + (\vec{e} \times \vec{r}) \sin\Delta\varphi$$

$$\frac{d\vec{r}}{d\varphi} = \lim_{\Delta\varphi \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta\varphi} = \vec{e} \times (\vec{e} \times \vec{r}) \lim_{\Delta\varphi \rightarrow 0} \frac{1 - \cos\Delta\varphi}{\Delta\varphi} + (\vec{e} \times \vec{r}) \lim_{\Delta\varphi \rightarrow 0} \frac{\sin\Delta\varphi}{\Delta\varphi} = \vec{e} \times \vec{r}$$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt} = (\vec{e} \times \vec{r}) \dot{\varphi} = (\dot{\varphi} \vec{e}) \times \vec{r} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

Матрице трансформације

- Ортогоналне матрице
- Родригова матрица
- Сложене матрице трансформације



$$[A_{k,j}] = [A_{k+1}^r][A_{k+2}^r] \dots [A_{j-1}^r][A_j^r] = \prod_{s=k+1}^{s=j} [A_s^r]$$

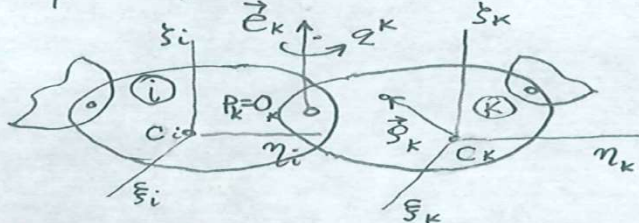
$$\det [A] = (\vec{\lambda} \times \vec{\mu}) \cdot \vec{\nu} = 1, \quad [A]^{-1} = [A]^T.$$

$$[A_r] = I + (1 - \cos \varphi) [e^d]^2 + \sin \varphi \cdot [e^d]$$

$$\{\vec{r}_1\} = [A_r] \{\vec{r}\}$$

$$[A_{k,j}^r] = [A_{k+1}^r][A_{k+2}^r] \dots [A_{j-1}^r][A_j^r].$$

* ротациони зглоб



$$\{\vec{e}_k^{(i)}\} = \{\vec{e}_k^{(k)}\}, (\xi_k = 0, \bar{\xi}_k = 1)$$

референтна конфигурација :

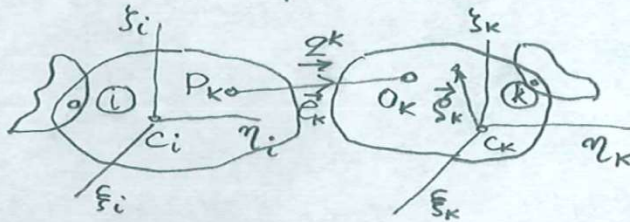
$$\{\vec{s}_k^{(i)}\} = \{\vec{s}_k^{(k)}\}$$

ротација за угло α^k око \vec{e}_k :

$$\{\vec{s}_k^{(i)}\} = [A_{rk}] \{\vec{s}_k^{(k)}\}$$

$$[A_{rk}] = [I] + [e^d]^2 (1 - \cos \alpha^k) + [e^d] \sin \alpha^k$$

** транслаторни (призматични) зглоб



$$\{\vec{s}_k^{(i)}\} = \{\vec{s}_k^{(k)}\}$$

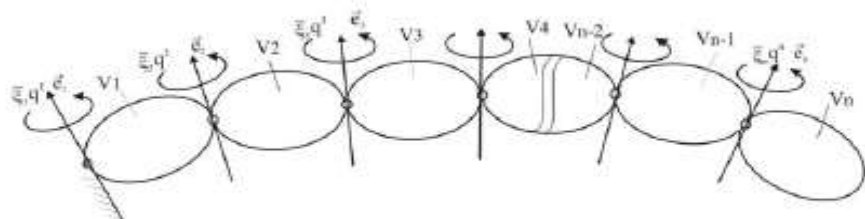
$$[A_{rk}] = [I]$$

$$\{\vec{e}_k^{(i)}\} = \{\vec{e}_k^{(k)}\}, (\xi_k = 1, \bar{\xi}_k = 0)$$

*** општи случај

$$[A_{rk}] = [I] + \bar{\xi}_k ([e^d]^2 (1 - \cos \alpha^k) + [e^d] \sin \alpha^k)$$

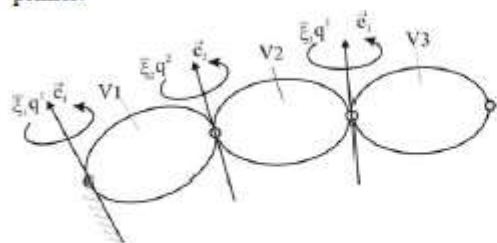
3.1 Složene matrice transformacija



$q^i, i=1,2,\dots,n$ - relativne koordinate osim prve
primer:

$$x = \omega^i e_i$$

primer:



zaustavlja se 1 i 2 segment a treći rotira oko sada nepokretne ose 3 za ugao q^3 i tako redom. Sistem je u početnom trenutku nalazio u referentnom položaju.

$$(V_3(0)) \xrightarrow{\bar{\xi} q^1} (V_3(I)),$$

$$(V_3(I)) \xrightarrow{\bar{\xi} q^2} (V_3(II)), \quad (V_3(0)) \text{ - referentni položaj, } (V_3) \text{ - proizvoljni položaj,}$$

$$(V_3(II)) \xrightarrow{\bar{\xi} q^3} (V_3).$$

Interesuju nas projekcije uočenog vektora na ose Ox, Oz, Oy (koje odgovaraju referentnoj konfiguraciji i to posle rotacije)

$$\{\bar{\rho}_3\} = \begin{Bmatrix} \xi_3(0) \\ \eta_3(0) \\ \varsigma_3(0) \end{Bmatrix} \text{ - referentna konfiguracija}$$

prva rotacija $\bar{\xi}_3 q^3$

$$\begin{Bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{Bmatrix} = [A_{R_3}] \begin{Bmatrix} \xi_3(0) \\ \eta_3(0) \\ \varsigma_3(0) \end{Bmatrix}$$

druga rotacija $\bar{\xi}_2 q^2$

$$\begin{Bmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{Bmatrix} = [A_{R_2}] \begin{Bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{Bmatrix} = [A_{R_2}] [A_{R_3}] \begin{Bmatrix} \xi_3(0) \\ \eta_3(0) \\ \varsigma_3(0) \end{Bmatrix}$$

treća rotacija $\bar{\xi}_1 q^1$

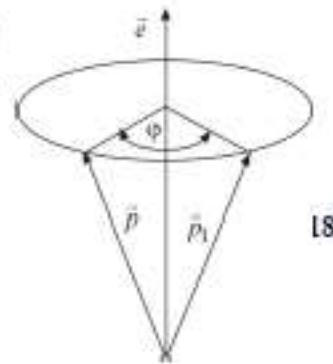
$$\begin{Bmatrix} x''' = x_3 \\ y''' = y_3 \\ z''' = z_3 \end{Bmatrix} = [A_{R_1}] \begin{Bmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{Bmatrix} = [A_{R_1}] [A_{R_2}] [A_{R_3}] \begin{Bmatrix} \xi_3(0) \\ \eta_3(0) \\ \varsigma_3(0) \end{Bmatrix} = [A_{0,3}] \begin{Bmatrix} \xi_3 \\ \eta_3 \\ \varsigma_3 \end{Bmatrix}$$

$[A_{0,3}]$ složena matrica transformacije

$$[A_{0,3}] = [A_{R_1}] [A_{R_2}] [A_{R_3}]$$

Пример

Пример. Познат је вектор $\vec{p} = (1 \ 0 \ 2)^T$. Одредити вектор \vec{p}_1 који се добија ротацијом вектора \vec{p} око осе



која је одређена јединичним вектором $\vec{e} = (1/\sqrt{3} \ -1/\sqrt{3} \ 1/\sqrt{3})^T$, за угао $\varphi = 60^\circ$.

На основу Rodrigovog obrasca има се:

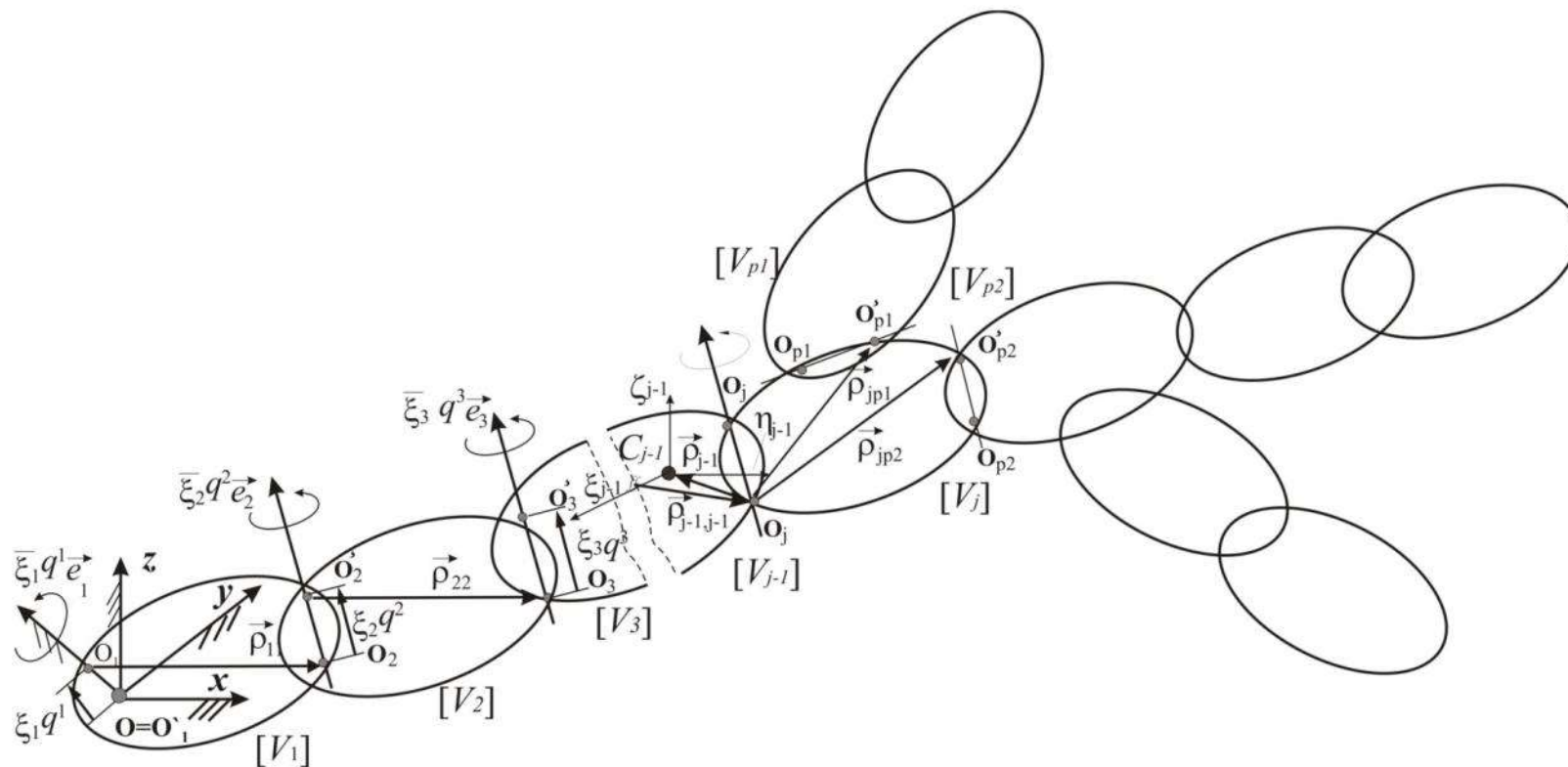
$$\vec{p}_1 = \vec{p} + (1 - \cos \varphi) \vec{e} \times (\vec{e} \times \vec{p}) + (\sin \varphi) \vec{e} \times \vec{p} \quad (3.7)$$

где су:

$$\vec{e} \times \vec{p} = \begin{bmatrix} i & j & k \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}}(-2i - j + k), \quad \vec{e} \times (\vec{e} \times \vec{p}) = \begin{bmatrix} i & j & k \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \\ -2/\sqrt{3} & -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \end{bmatrix} = -\vec{j} - \vec{k}$$

$$\vec{p}_1 = \vec{i} + 2\vec{k} + (1 - \cos(\pi/3))(-\vec{j} - \vec{k}) + \sin(\pi/3) \left(\frac{1}{\sqrt{3}}(-2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}) \right) = -\vec{j} + 2\vec{k} = (0 \ -1 \ 2)^T$$

Основне геометријске карактеристике



Геометрија система крутих тела

- Врсте кинематских парова

$$\xi_i + \bar{\xi}_i = 1 \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

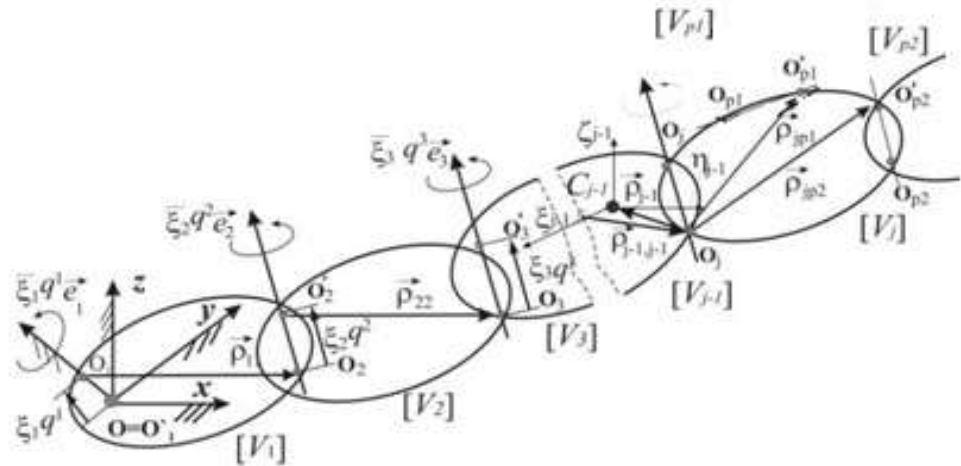
- Вектори

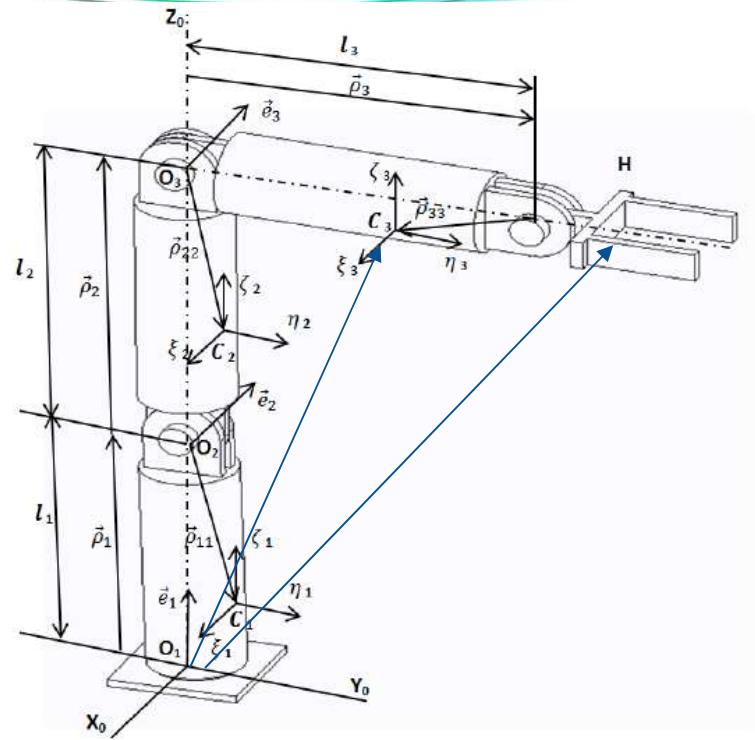
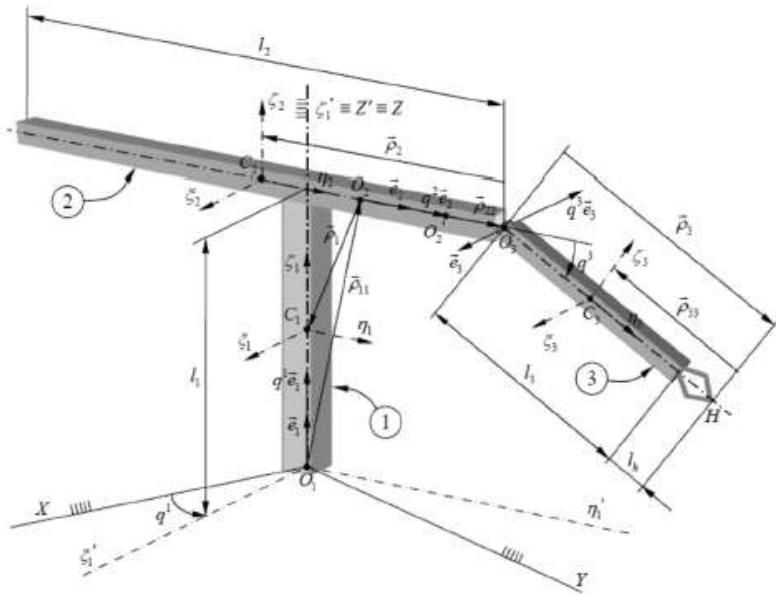
$$\vec{\rho}_{ii} = \overrightarrow{O_i O_{i+1}}$$

$$\vec{\rho}_i = \overrightarrow{O_{i+1} C_i}$$

$$\vec{R}_i = \overrightarrow{O_i C_i} = \sum_{\alpha=1}^i (\vec{\rho}_{\alpha\alpha} + \xi_{\alpha} q_{\alpha} \vec{e}_{\alpha}) + \vec{\rho}_i$$

$$\vec{R}_H = \overrightarrow{O_i H} = \vec{R}_n - \vec{\rho}_n = \sum_{\alpha=1}^i (\vec{\rho}_{\alpha\alpha} + \xi_{\alpha} q_{\alpha} \vec{e}_{\alpha})$$

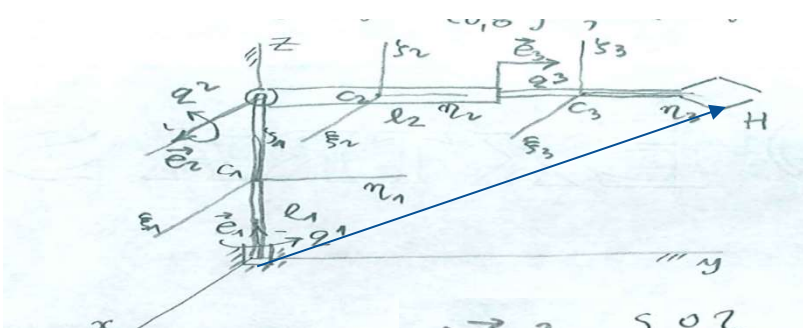




$$\{\vec{r}_{Ci}(q)\} = \begin{Bmatrix} x_i(q) \\ y_i(q) \\ z_i(q) \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^n \left(\prod_{j=1}^i [A_{j-1,j}] \right) \left(\left\{ \rho_{ii}^{(i)} \right\} + \xi_i q^i \left\{ e_i^{(i)} \right\} \right) + \prod_{j=1}^i [A_{j-1,j}] \left\{ \rho_i^{(i)} \right\}$$

За дати роботски систем са три степена слободне који се налази у референтном положају, решити директни кинематички задатак, тј. одредити спроватне координате врха хватаљке \bar{z}^i ($i=1,2,3$ - различити случај позиционирања) ако су вредности унутрашњих координата познате: $z^1=0,2\text{ rad}$, $z^2=0,4\text{ rad}$, $z^3=0,6\text{ m}$. Такође је познато:

$$\{\vec{s}_{11}\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0,8 \end{Bmatrix}, \quad \{\vec{s}_{22}\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0,6 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad \{\vec{s}_{33}\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0,4 \\ 0 \end{Bmatrix}.$$



$\bar{z}^1 = x_H$, $\bar{z}^2 = y_H$, $\bar{z}^3 = z_H \rightarrow$ спроватне координате које одређују позицију врха хватаљке у односу на непокретну систем $Oxyz$!

$$\{\vec{e}_1\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix}, \quad \{\vec{e}_2\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad \{\vec{e}_3\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Положај врха хватаљке у систему $Oxyz$:

$$\begin{Bmatrix} x_H \\ y_H \\ z_H \end{Bmatrix} = \sum_{j=1}^3 [A_{0,j}] (\{\vec{s}_{jj}\} + \epsilon_j z^j \vec{e}_j) = [A_{0,1}] \{\vec{s}_{11}\} + [A_{0,2}] \{\vec{s}_{22}\} + [A_{0,3}] (\{\vec{s}_{33}\} + z^3 \vec{e}_3)$$

$$[A_{0,1}] = \begin{bmatrix} \cos \varrho^1 & -\sin \varrho^1 & 0 \\ \sin \varrho^1 & \cos \varrho^1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, [A_{1,2}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varrho^2 & -\sin \varrho^2 \\ 0 & \sin \varrho^2 & \cos \varrho^2 \end{bmatrix}, [A_{2,3}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

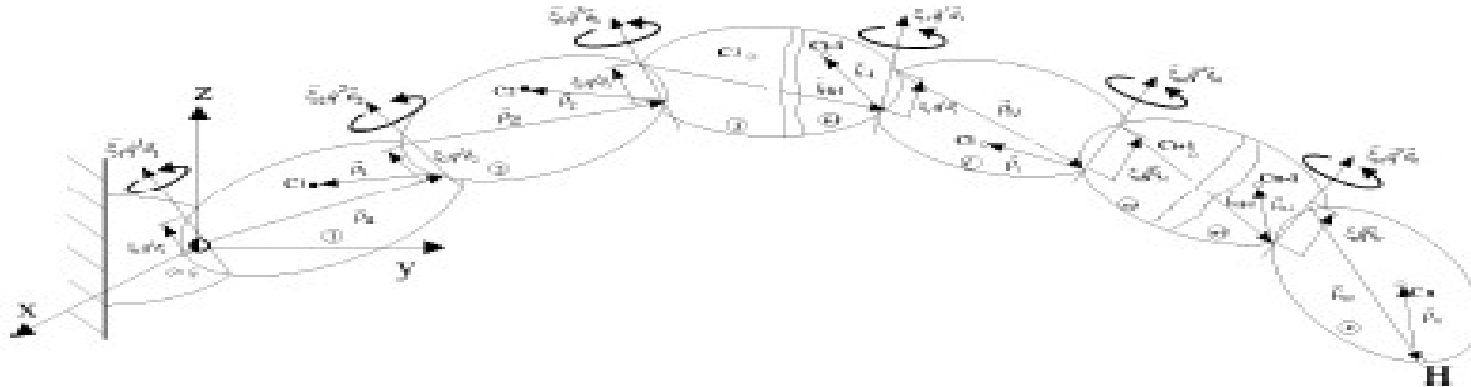
$$[A_{0,2}] = [A_{0,1}][A_{1,2}] = \begin{bmatrix} \cos \varrho^1 & -\sin \varrho^1 \cos \varrho^2 & \sin \varrho^1 \sin \varrho^2 \\ \sin \varrho^1 & \cos \varrho^1 \cos \varrho^2 & -\cos \varrho^1 \sin \varrho^2 \\ 0 & \sin \varrho^2 & \cos \varrho^2 \end{bmatrix}$$

$$[A_{0,3}] = [A_{0,2}][A_{2,3}] = [A_{0,2}][I] = [A_{0,2}]$$

$$\begin{Bmatrix} x_H \\ y_H \\ z_H \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -(1+\varrho^3) \sin \varrho^1 \cos \varrho^2 \\ (1+\varrho^3) \cos \varrho^1 \cos \varrho^2 \\ 0,8 + (1+\varrho^3) \sin \varrho^2 \end{Bmatrix} \begin{matrix} \varrho^1 = 0,2 \\ \varrho^2 = 0,4 \\ \varrho^3 = 0,6 \end{matrix} = \begin{Bmatrix} -0,3 \\ 1,44 \\ 1,42 \end{Bmatrix} [m].$$

Угаона брзина

$$\bar{\omega}_1$$



$$\bar{\omega}_1 = \bar{\xi}_1 \bar{e}_1 \dot{q}^1$$

$$\bar{\omega}_{2r} = \bar{\xi}_2 \bar{e}_2 \dot{q}^2,$$

$$\bar{\omega}_2 = \bar{\omega}_{2p} + \bar{\omega}_{2r}.$$

$$\bar{\omega}_{2p} = \bar{\omega}_1,$$

$$\bar{\omega}_{3p} = \bar{\omega}_2, \quad \bar{\omega}_{3r} = \bar{\xi}_3 \bar{e}_3 \dot{q}^3,$$

$$\bar{\omega}_l = \sum_{k=1}^l \bar{\Omega}_{k(l)} \dot{q}^k.$$



$$\bar{\omega}_2 = \bar{\xi}_1 \bar{e}_1 \dot{q}^1 + \bar{\xi}_2 \bar{e}_2 \dot{q}^2.$$

$$\bar{\omega}_3 = \sum_{k=1}^3 \bar{\xi}_k \bar{e}_k \dot{q}^k.$$



$$\bar{\omega}_l = \sum_{k=1}^l \bar{\xi}_k \bar{e}_k \dot{q}^k$$



$$\{\bar{\omega}_l^{(0)}\} = \sum_{k=1}^l \bar{\xi}_k [A_{0,k}] \{\bar{e}_k\} \dot{q}^k,$$

$$\{\bar{\omega}_l^{(0)}\} = [F] \{q\},$$

gde je

$$[F] \in R^{3 \times n} \Rightarrow [F] = [\bar{\xi}_1 \{\bar{e}_1^{(0)}\}; \bar{\xi}_2 \{\bar{e}_2^{(0)}\}; \dots; \bar{\xi}_l \{\bar{e}_l^{(0)}\}],$$

Извод вектора везаног за сегмент по генералисаној координати

$$\vec{p}_{ii} = \vec{p}_{ii}(q^1, q^2, \dots, q^n)$$

- Ојлеров образац

$$\frac{\partial \vec{p}_{ii}}{\partial q^\alpha} = \vec{e}_\alpha \vec{e}_\alpha \times \vec{p}_{ii} \quad \forall \alpha \leq i,$$

$$\frac{\partial \vec{p}_{ii}}{\partial q^\alpha} = 0 \quad \forall \alpha > i.$$

$$\frac{d\vec{p}_{ii}}{dt} = \vec{\omega}_i \times \vec{p}_{ii} = \sum_{\alpha=1}^i \vec{e}_\alpha \vec{e}_\alpha \dot{q}^\alpha \times \vec{p}_{ii} = \sum_{\alpha=1}^i (\vec{e}_\alpha \vec{e}_\alpha \times \vec{p}_{ii}) \dot{q}^\alpha$$

$$\frac{d\vec{p}_{ii}}{dt} = \sum_{\alpha=1}^i \frac{\partial \vec{p}_{ii}}{\partial q^\alpha} \dot{q}^\alpha = \sum_{\alpha=1}^n \frac{\partial \vec{p}_{ii}}{\partial q^\alpha} \dot{q}^\alpha, \text{ jer je } \frac{\partial \vec{p}_{ii}}{\partial q^\alpha} = 0, \forall \alpha > i$$

$$0 = \sum_{\alpha=1}^n \left(\frac{\partial \vec{p}_{ii}}{\partial q^\alpha} - \vec{e}_\alpha \vec{e}_\alpha \times \vec{p}_{ii} \right) \dot{q}^\alpha \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial \vec{p}_{ii}}{\partial q^\alpha} = \vec{e}_\alpha \vec{e}_\alpha \times \vec{p}_{ii} \quad \forall \alpha \leq i \\ \frac{\partial \vec{p}_{ii}}{\partial q^\alpha} = 0, \quad \forall \alpha > i \end{cases}$$

$$\left[|\vec{r}| = \text{const.} \rightarrow \frac{d\vec{r}}{d\varphi} = \vec{e}_\varphi \times \vec{r}, \left(d\vec{r} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} d\varphi \rightarrow \frac{d\vec{r}}{d\varphi} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} \right) \Rightarrow \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} = \vec{e}_\varphi \times \vec{r} \right]$$

Брзина центра инерције крутог тела

$$\vec{v}_{C_i}$$

$$\vec{v}_{C_i} = \vec{v}_i = \sum_{\alpha=1}^i \vec{T}_{\alpha(i)} \dot{q}^\alpha$$

$$\vec{T}_{\alpha(i)} = \partial \vec{r}_i / \partial q^\alpha$$

$$\vec{R}_{\alpha(i)} = \left[\sum_{k=\alpha}^i (\vec{\rho}_{kk} + \xi_k \vec{e}_k q^k) + \vec{\rho}_i \right]$$



$$\vec{T}_{\alpha(i)} = \bar{\xi}_\alpha \vec{e}_\alpha \times \vec{R}_{\alpha(i)} + \xi_\alpha \vec{e}_\alpha, \quad \forall \alpha \leq i$$

$$\vec{T}_{\alpha(i)} = 0, \quad \forall \alpha > i,$$

$$\frac{\partial \vec{\rho}_{kk}}{\partial q^\alpha} = \bar{\xi}_\alpha \vec{e}_\alpha \times \vec{\rho}_{kk} \quad \forall \alpha \leq k,$$

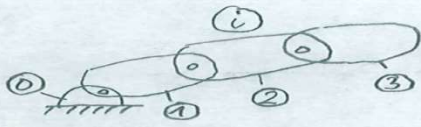
$$\frac{\partial \vec{\rho}_{kk}}{\partial q^\alpha} = 0 \quad \forall \alpha > k.$$

$$\frac{\partial \vec{e}_k}{\partial q^\alpha} = \bar{\xi}_\alpha \vec{e}_\alpha \times \vec{e}_k \quad \forall \alpha \leq k,$$

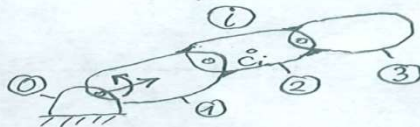
$$\frac{\partial \vec{e}_k}{\partial q^\alpha} = 0 \quad \forall \alpha > k$$

* квазибазисни вектори

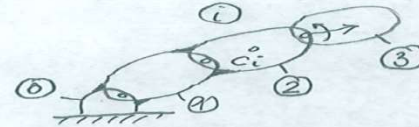
$$\vec{T}_{i\alpha} = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial z^\alpha} = 0 \quad \text{за } \alpha > i$$



$$z^1=0, z^2=0, z^3=0$$



$$z^1 \neq 0, z^2=0, z^3=0$$



$$z^1=0, z^2 \neq 0, z^3 \neq 0$$

Закључак: на промену вектора положаја \vec{r}_i (тј. вектора положаја центра инерције c_i) утичу само тела која преуходе сегменту (тељу) са фиксираним индексом i а тела која следе иза тела са индексом i не утичу на промену вектора положаја \vec{r}_i , односно:

$$\vec{T}_{i\alpha} = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial z^\alpha} \neq 0 \quad \text{за } \alpha \leq i ; \quad \vec{T}_{i\alpha} = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial z^\alpha} = 0 \quad \text{за } \alpha > i !$$

($\xi_\alpha=1, \bar{\xi}_\alpha=0 \Rightarrow$ транслаторни зглоб ; $\xi_\alpha=0, \bar{\xi}_\alpha=1 \Rightarrow$ ротациони зглоб)

Матрични облик

$$\{\vec{v}_i^{(0)}\} = \sum_{\alpha=1}^n \{\vec{T}_{\alpha(i)}^{(0)}\} \dot{q}^\alpha$$
$$\{\vec{T}_{\alpha(i)}^{(0)}\} = \bar{\xi}_\alpha [A_{0,\alpha}] [e_\alpha^d] \left\{ \sum_{k=\alpha}^i [A_{\alpha,k}] (\{\bar{\rho}_{kk}\} + \bar{\xi}_k q^k \{\bar{e}_k\}) + [A_{\alpha,i}] \{\bar{\rho}_k\} \right\} + \xi_\alpha [A_{0,\alpha}] \{\bar{e}_\alpha\} \quad \forall \alpha \leq i,$$
$$\{\vec{T}_{\alpha(i)}^{(0)}\} = 0 \quad \forall \alpha > i.$$

$$[E] \in R^{3 \times n} \Rightarrow [E] = \left[\{\vec{T}_{1(i)}^{(0)}\} : \{\vec{T}_{2(i)}^{(0)}\} : \dots : \{\vec{T}_{n(i)}^{(0)}\} \right]$$



$$\{\vec{v}_i^{(0)}\} = [E] \{\dot{q}\},$$