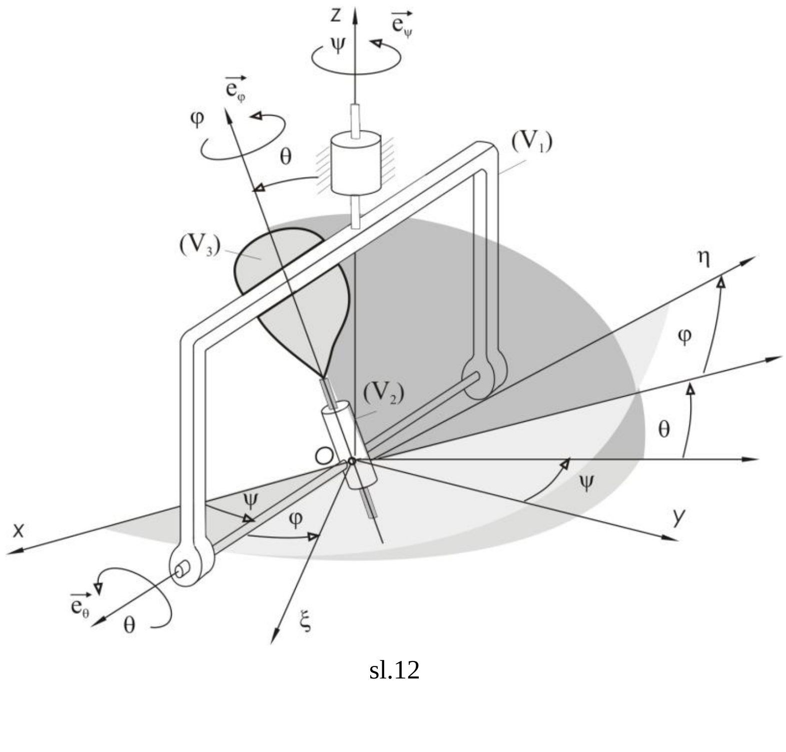
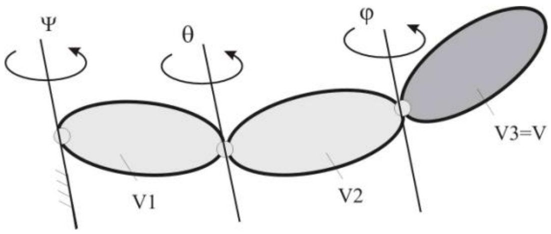
5. OSNOVE MEHANIKE SISTEMA KRUTIH TELA

5.1 Uvod u mehaniku sistema tela

Metodologija formiranja i rešavanja diferencijalnih jednačina kretanja sistema tela, izložena ovde, može da primeni u oblasti složenih mehanizama u mašinstvu, transportnih mašina i uređaja, drumskih i šinskih vozila, robotike i vazduhoplova (detaljnije u [1]). Iz toga razloga ovde će tehnički sistem, kao mehanički sistem, biti predstavljen sistemom tela pri čemu konačan broj tela u sistemu nije ograničen. Razmatrani sistem tela je u opštem slučaju vezan, ali se razmatranje veza pojednostavljuje njihovom dekompozicijom. Na taj način tehnički objekti sa složenijim vezama od onih koje su uključene u kinematičke parove V (pete) klase, dekompozicijim veza se svode na mehaničke objekte čiji elementi (tela) formiraju kinematičke parove V klase. Na primer, u slučaju sfernog kretanja krutog tela, sferni zglob se dekomponuje na tri cilindrična, uvode se u razmatranje tri tela od kojih dva (sl.12, tela $(V_1)\,\mathrm{i}\,(V_2)$) imaju zanemarljivu masu. Treće telo ima geometriju masa identičnu geometriji masa originalnog tela, [2]. Ovakav model mehaničkog sistema, sa napomenom da sva tri tela imaju zadatu geometriju masa, javlja se, na primer, u slučaju robota sa tri rotaciona stepena slobode kretanja (takozvana RRR robotska struktura), sl.13.



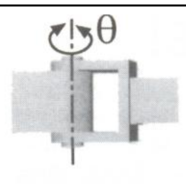
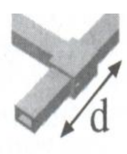
sl.12



sl.13

Pomenuta dekompozicija dovodi do razlaganja složenog oblika kretanja tela na niz kretanja koji predstavljaju translaciju ili roraciju u apsolutnom ili relativnom kretanju. U navedenom primeru sfernog kretanja dekompozicijom sfernog na tri cilindrična zgloba, sferno kretanje se dekomponuje na tri rotaciona – jedno apsolutno i dva relativna. Metod dekompozicije (u primeru koji sledi – dekompozicija kretanja) može da se primeni i na opšte kretanje krutog tela (odsustvuju veze). U tom slučaju takvo kretanje se modelira sistemom od šest tela pri čemu prvih pet tela imaju samo geometrijske odlike (masa tih tela se zanemaruje). Šesto telo ima geometriju masa identičnu originalnom telu. Ovakav sistem šest tela vezan je na sledeći način (navodimo jedan iz niza mogućih primera): treće telo u odnosu na drugo, drugo telo u odnosu na prvo i prvo u odnosu na nepomično postolje vrše pravolinijske translacije posredstvom prizmatičnih zglobova međusobno ortogonalnih osa. Šesto telo u odnosu na peto, peto u odnosu na četvrto i četvrto u odnosu na treće vrše čiste rotacije i taj deo sistema odgovara onome sa sl.13 (treba imati u vidu ovakvu zamenu u numeraciji tela: $(V_1) \to (V_4)$, $(V_2) \to (V_5)$, $(V_3) \to (V_6)$).

Najčešće veze koje ograničavaju kretanja sistema, na primeru veze tela (V_{i-1}) i (V_i), prikazane su u donjoj tabeli, [3]. Svaka veza koja dopušta više od jednog stepena slobode kretanja tela (V_i) u odnosu na telo (V_{i-1}) (klasa kinematičkog para je niža od V-te) dekomponuje se na odgovarajući broj veza sa jednim stepenom slobode kretanja.

klasa kinem. para	broj stepeni slobode		
V	1		

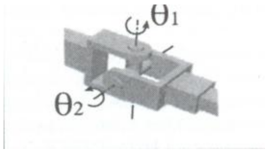
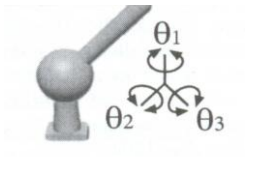
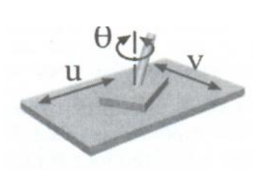
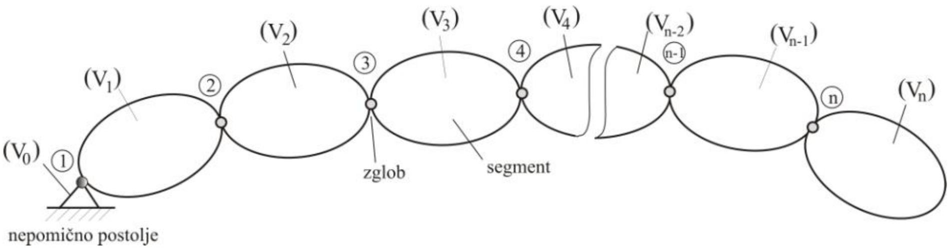
IV	2		
III	3		

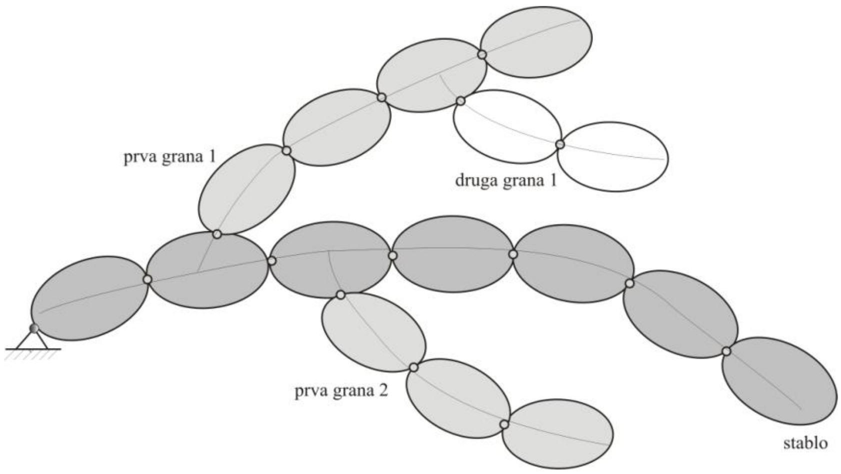
tabela1

Osnovni oblik sistema tela čije kretanje proučavamo je *otvoreni kinematički lanac*. Ovaj lanac predstavlja sistem od n tela (sl.14) numerisanih indeksima koji uzimaju vrednosti od 1 do n . Pri tome tela (V_{i-1}) i (V_i) čine kinematički par V klase koji dopušta ili pravolinijsku translaciju ili rotaciju tela (V_i) u odnosu na telo (V_{i-1}) . U slučaju $i=1$ pojavljuje se telo (V_0) koje predstavlja deo prostora za koji je vezan inercijalni sistem referencije (postolje).

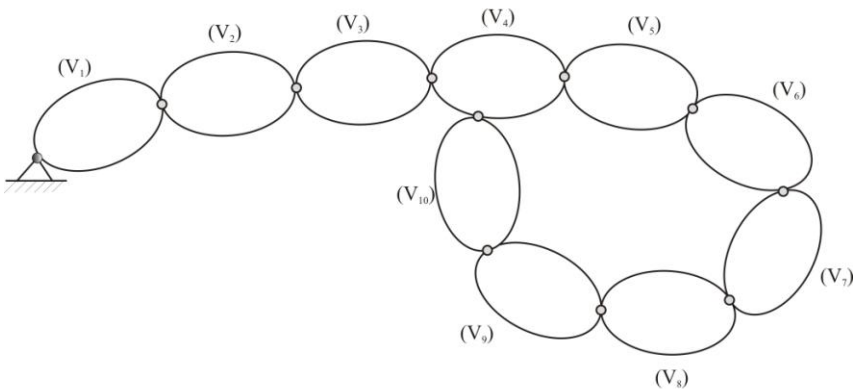


sl.14

Lanac tela može biti otvoren, ali sa grananjem (sl.15). Tada se kaže da sistem tela ima mehanički model sa strukturom *topološkog drveta*, [4]. Sistem tela može da bude u obliku *zatvorenog kinematičkog lanca* (sl.16). Kod otvorenog kinematičkog lanca put između dva proizvoljna tela, koji prolazi kroz tela sistema, je jedinstven. Kod zatvorenog kinematičkog lanca to nije uvek slučaj. Na primer, postoje dva različita puta (vidi sl.16) između tela (V_1) i tela (V_{10}). Zatvoreni kinematički lanac se uvek može uklanjajem veze transformisati u otvoreni, pri čemu uklonjenu vezu treba nadomestiti relacijama koje predstavljaju matematičku formalizaciju uklonjene veze. Te relacije nazivaju se jednačinama veza. U ovom kursu proučavaju se samo takvi sistemi tela čije kretanje ograničavaju *holonomne skleronomne veze*.



sl.15

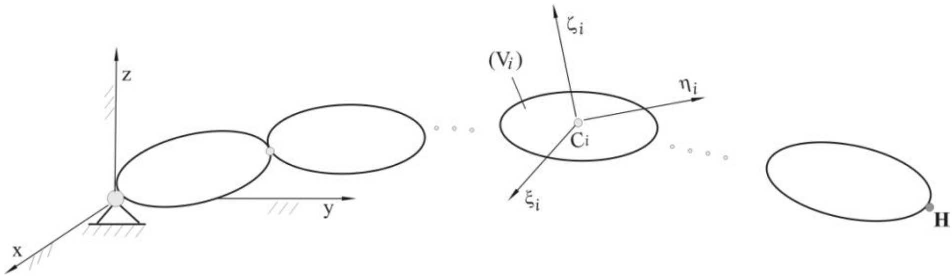


sl.16

Pod *osnovnim sistemom tela* podrazumevaćemo sistem tela koji obrazuju kinematičke parove V klase, pri čemu nećemo ograničavati broj tela koja sačinjavaju sistem.

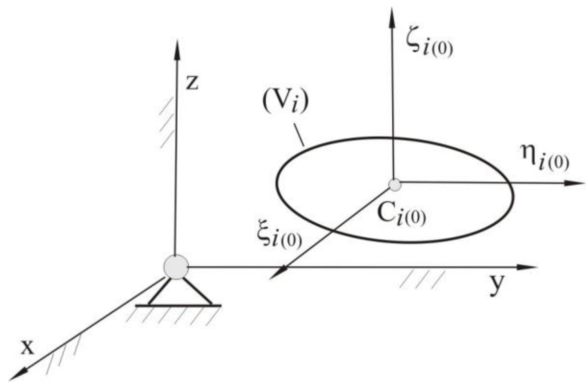
Konfiguraciju *osnovnog sistema tela* određuje skup generalisanih koordinata $(q^1,...,q^n)$ koji se u slučaju otvorenog kinematičkog lanca po pravilu poklapa sa skupom nezavisnih (Lagranževih) koordinata. U slučaju zatvorenog kinematičkog lanca nije moguće uvek eksplicitno izraziti zavisne generalisane koordinate preko nezavisnih. U tom slučaju skup $(q^1,...,q^n)$, osim nezavisnih, sadrži i onoliki broj zavisnih generalisanih koordinata koliki je broj nezavisnih jednačina veza koje nisu iskorišćene za eliminaciju zavisnih koordinata. Te veze se javljaju kao posledica transformacije zatvorenog u otvoreni kinematički lanac. Specijalno, kod ovako odabranog mehaničkog modela sistema tela sve generalisane koordinate određuju relativna kretanja proizvoljnog tela (V_i) u odnosu na telo (V_{i-1}).

Telo koje ulazi u sastav *sistema tela* nazivamo *segment*. Nadalje, segmente ćemo smatrati krutim telima. Proizvoljnu konfiguraciju sistema tela određujemo u odnosu na *referentnu konfiguraciju* u kojoj su sve generalisane koordinate jednake nuli. Proizvoljnom segmentu (V_i) pridružićemo lokalni ortogonalni Dekartov koordinatni sistem $C_i\xi_i\eta_i\zeta_i$, (sl.17) gde je C_i središte masa segmenta (V_i).



sl.17

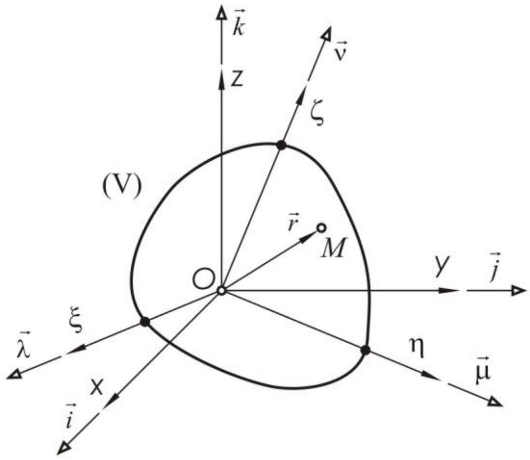
U referentnoj konfiguraciji (označena sa (0)) važi $C_{i(0)}\xi_{i(0)} \,||\, Ox$, $C_{i(0)}\eta_{i(0)} \,||\, Oy$, $C_{i(0)}\zeta_{i(0)} \,||\, Oz$, gde je $Oxyz$ inercijalni sistem referencije, (sl.18). Ovakva konvencija omogućuje da se matrice transformacija koordinata vektora ili tenzora određuju direktno kao proizvod Rodrigovih matrica transformacija koje se formiraju na relativno jednostavan način. Ta činjenica omogućava da se formuliše prost metod za formiranje diferencijalnih jednačina kretanja sistema tela. Specijalno, pomenuti metod dopušta iznalaženje jednostavnih programa za automatsko formiranje i rešavanje diferencijalnih jednačina kretanja *osnovnog sistemom tela* [2],[5]. Ako u referentnoj konfiguraciji nije ispunjen pomenuti uslov o paralelnosti odgovarajućih koordinatnih osa, jednostavnom transformacijim Rodrigove matrice dobijaju se stvarne matrice transformacija koordinata. U ovom slučaju u ostalim elementima metod formiranja diferencijalnih jednačina kretanja ostaje neizmenjen.



sl.18

5.2 Ortogonalne transformacije koordinata

Razmotrimo dva pravougla Dekartova koordinatna sistema: nepomični sistem *Oxyz* i pokretni sistem $O\xi\eta\zeta$ vezan za kruto telo (V) (sl.19). Jedinični vektori $\vec{i}\,,\vec{j},\vec{k}$ orijentišu ose Ox, Oy, Oz koordinatnog sistema *Oxyz*, a jedinični vektori $\vec{\lambda},\vec{\mu},\vec{\nu}$ orijentišu ose $O\xi, O\eta, O\zeta$ koordinatnog sistema $O\xi\eta\zeta$. Očigledno je da sfernim kretanjem koordinatni sistem *Oxyz* možemo dovesti do poklapanja sa koordinatnim sistemom $O\xi\eta\zeta$.



sl.19

Vektor položaja $\vec{r}$ proizvoljne tačke M sa koordinatama (x, y, z) odnosno (ξ,η,ζ), može se napisati u obliku

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}\,, \tag{5.1}$$

ili

$$\vec{r} = \xi\vec{\lambda} + \eta\vec{\mu} + \zeta\vec{\nu}\,. \tag{5.2}$$

Projektovanjem vektorske jednačine (5.2) na ose koordinatnog sistema *Oxyz*, dobijamo vezu između koordinata tačke M u sledećoj formi

$$\begin{aligned} x &= \xi\vec{\lambda}\cdot\vec{i} + \eta\vec{\mu}\cdot\vec{i} + \zeta\vec{\nu}\cdot\vec{i}\,, \\ y &= \xi\vec{\lambda}\cdot\vec{j} + \eta\vec{\mu}\cdot\vec{j} + \zeta\vec{\nu}\cdot\vec{j}\,, \\ z &= \xi\vec{\lambda}\cdot\vec{k} + \eta\vec{\mu}\cdot\vec{k} + \zeta\vec{\nu}\cdot\vec{k}\,, \end{aligned} \tag{5.3}$$

ili, u matričnom zapisu

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = [A]\begin{Bmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{Bmatrix}, \tag{5.4}$$

gde je

$$[A] = \begin{bmatrix} \vec{\lambda}\cdot\vec{i} & \vec{\mu}\cdot\vec{i} & \vec{\nu}\cdot\vec{i} \\ \vec{\lambda}\cdot\vec{j} & \vec{\mu}\cdot\vec{j} & \vec{\nu}\cdot\vec{j} \\ \vec{\lambda}\cdot\vec{k} & \vec{\mu}\cdot\vec{k} & \vec{\nu}\cdot\vec{k} \end{bmatrix}. \tag{5.5}$$

Matrica $[A] \in R^{3\times3}$ predstavlja *matricu transformacije* koordinata tačke *M* iz koordinatnog sistema $O\xi\eta\zeta$ u koordinatni sistem *Oxyz*. Ako matricu transformacije (5.5) napišemo u obliku

$$[A] = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{bmatrix}, \tag{5.6}$$

jasno je da veličine α_{ij} $(i, j = 1, 2, 3)$ predstavljaju kosinuse uglova između dve odgovarajuće ose pokretnog i nepokretnog koordinatnog sistema. Tako je, na primer,

$$\alpha_{21} = \vec{\lambda}\cdot\vec{j} = cos\angle(\vec{\lambda}, \vec{j})\,. \tag{5.7}$$

Pošto kolone matrice [*A*] predstavljaju koordinate jediničnih vektora $\vec{\lambda}, \vec{\mu}, \vec{\nu}$ izražene u nepokretnom koordinatnom sistemu *Oxyz*:

$$\vec{\lambda} = \alpha_{11}\vec{i} + \alpha_{21}\vec{j} + \alpha_{31}\vec{k},$$
$$\vec{\mu} = \alpha_{12}\vec{i} + \alpha_{22}\vec{j} + \alpha_{32}\vec{k}, \tag{5.8}$$
$$\vec{\nu} = \alpha_{13}\vec{i} + \alpha_{23}\vec{j} + \alpha_{33}\vec{k},$$

sledi da je

$$\det[A] = (\vec{\lambda} \times \vec{\mu}) \cdot \vec{\nu} = 1. \tag{5.9}$$

Samim tim, matrica transformacije [*A*] je nesingularna.

Elementi matrice [*A*] nisu međusobno nezavisni jer, na osnovu (5.8) i uslova ortogonalnosti i normiranosti vektora $\vec{\lambda}, \vec{\mu}, \vec{\nu}$, između koeficijenata α_{ij} postoje sledeće veze

$$\begin{aligned}
f^1 &= \alpha_{11}^2 + \alpha_{21}^2 + \alpha_{31}^2 - 1 = 0,\\
f^2 &= \alpha_{12}^2 + \alpha_{22}^2 + \alpha_{32}^2 - 1 = 0,\\
f^3 &= \alpha_{13}^2 + \alpha_{23}^2 + \alpha_{33}^3 - 1 = 0,\\
f^4 &= \alpha_{11}\alpha_{12} + \alpha_{21}\alpha_{22} + \alpha_{31}\alpha_{32} = 0,\\
f^5 &= \alpha_{12}\alpha_{13} + \alpha_{22}\alpha_{23} + \alpha_{32}\alpha_{33} = 0,\\
f^6 &= \alpha_{13}\alpha_{11} + \alpha_{23}\alpha_{21} + \alpha_{33}\alpha_{31} = 0.
\end{aligned} \tag{5.10}$$

Pokazuje se da drugih relacija oblika (5.10) nezavisnih od (5.10) nema i da je ($k = 1,...,6;\ \alpha = 1,2,3$):

$$rank[E] = 6,\ \ [E] \in R^{6\times 9},\ \ [E] = \left[\left[\frac{\partial f^k}{\partial \alpha_{1\alpha}}\right] \vdots \left[\frac{\partial f^k}{\partial \alpha_{2\alpha}}\right] \vdots \left[\frac{\partial f^k}{\partial \alpha_{3\alpha}}\right]\right], \tag{5.11}$$

odakle sledi da su samo tri koordinate matrice transformacije (5.6) nezavisne. Očigledno je da te tri koordinate ne mogu da se nalaze u istoj koloni ili istoj vrsti.

Nesingularnost matrice [*A*] dozvoljava da se odredi transformacija inverzna transformaciji (5.4)

$$\begin{Bmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{Bmatrix} = [A]^{-1} \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix}, \tag{5.12}$$

gde je

$$[A][A]^{-1} = [I] \quad ([I] \in R^{3\times 3} \text{ - jedinična matrica}). \tag{5.13}$$

Ako se vektorska jednačina (5.1) projektuje na ose koordinatnog sistema $O\xi\eta\zeta$, dobijaju se relacije

$$\begin{aligned} \xi &= x\vec{\lambda}\cdot\vec{i} + y\vec{\lambda}\cdot\vec{j} + z\vec{\lambda}\cdot\vec{k}, \\ \eta &= x\vec{\mu}\cdot\vec{i} + y\vec{\mu}\cdot\vec{j} + z\vec{\mu}\cdot\vec{k}, \\ \zeta &= x\vec{\nu}\cdot\vec{i} + y\vec{\nu}\cdot\vec{j} + z\vec{\nu}\cdot\vec{k}, \end{aligned} \tag{5.14}$$

ili, u matričnoj formi

$$\begin{Bmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{Bmatrix} = [B] \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix}, \tag{5.15}$$

gde je

$$[B] = \begin{bmatrix} \vec{\lambda}\cdot\vec{i} & \vec{\lambda}\cdot\vec{j} & \vec{\lambda}\cdot\vec{k} \\ \vec{\mu}\cdot\vec{i} & \vec{\mu}\cdot\vec{j} & \vec{\mu}\cdot\vec{k} \\ \vec{\nu}\cdot\vec{i} & \vec{\nu}\cdot\vec{j} & \vec{\nu}\cdot\vec{k} \end{bmatrix}. \tag{5.16}$$

Matrica $[B] \in R^{3\times 3}$ predstavlja matricu transformacije koordinata tačke M iz koordinatnog sistema $Oxyz$ u koordinatni sistem $O\xi\eta\zeta$. Iz (5.5) i (5.16) sledi da je

$$[B] = [A]^T \;\Leftrightarrow\; [A] = [B]^T. \tag{5.17}$$

Prva relacija u (5.17) omogućava da se izraz (5.15) napiše u obliku

$$\begin{Bmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{Bmatrix} = [A]^T \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix}, \tag{5.18}$$

što u kombinaciji sa relacijom (5.12) daje

$$\left([A]^{-1} - [A]^T\right) \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = 0. \tag{5.19}$$

Pošto koordinate x, y, z imaju proizvoljnu vrednost, izvodi se zaključak da važi

$$[A]^{-1} = [A]^T, \tag{5.20}$$

odnosno

$$[B] = [A]^T \;\Leftrightarrow\; [A] = [B]^T. \tag{5.21}$$

Prema relaciji (5.21), lako se pokazuje da je

$$[A][A]^{-1} = [B]^T[B] \Rightarrow [B]^{-1} = [B]^T. \tag{5.22}$$

Transformacija (5.4) sa osobinama (5.9) i (5.20) naziva se *ortogonalna transformacija*. Transformacija inverzna ortogonalnoj, u skladu sa (5.22), takođe je ortogonalna.

5.3 Dualni objekti

Vektoru $\vec{a}$ koji se u pravouglom Dekartovom koordinatnom sistemu izražava u obliku

$$\{\vec{a}\} = \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix}, \tag{5.23}$$

može se pridružiti matrica

$$[a^d] = \begin{bmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{bmatrix}. \tag{5.24}$$

Veličine $\{\vec{a}\}$ i $[a^d]$ nazivaju se dualnim objektima pri čemu je $[a^d]$ dualni objekat (drugog reda) objekta $\{\vec{a}\}$ (prvog reda). Važi i obrnuto: $\{\vec{a}\}$ je dualni objekat objekta $[a^d]$. Jasnoće radi, dualnim objektom nazivaćemo isključivo veličinu $[a^d]$ koja je, očigledno, antisimetrična:

$$[a^d]^T = -[a^d]. \tag{5.25}$$

Uočimo da je

$$[a^d]^2 = \begin{bmatrix} -a_3^2 - a_2^2 & a_1 a_2 & a_1 a_3 \\ a_2 a_1 & -a_3^2 - a_1^2 & a_2 a_3 \\ a_3 a_1 & a_3 a_2 & -a_1^2 - a_2^2 \end{bmatrix}, \tag{5.26}$$

što se može napisati u obliku

$$[a^d]^2 = \begin{bmatrix} a_1^2 & a_1 a_2 & a_1 a_3 \\ a_2 a_1 & a_2^2 & a_2 a_3 \\ a_3 a_1 & a_3 a_2 & a_3^2 \end{bmatrix} - (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \tag{5.27}$$

odakle se neposredno dobija

$$\left[a^d\right]^2 = \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix} - a^2\left[I\right], \tag{5.28}$$

odnosno

$$\left[a^d\right]^2 = \{\vec{a}\}(\vec{a}) - a^2\left[I\right], \tag{5.29}$$

gde je $[I] \in R^{3\times 3}$ - jedinična matrica, $a^2 = \vec{a}\cdot\vec{a} = |\vec{a}|^2$. Daljim stepenovanjem dualnog objekta celim pozitivnim brojem, dobija se

$$\left[a^d\right]^3 = -a^2\left[a^d\right], \tag{5.30}$$

jer je

$$\left[a^d\right]\{\vec{a}\} = \left[a^d\right] \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix} = 0. \tag{5.31}$$

Takođe je

$$\begin{aligned} &\left[a^d\right]^4 = -a^2\left[a^d\right]^2, \\ &\left[a^d\right]^5 = -a^2\left[a^d\right]^3 \Rightarrow \left[a^d\right]^5 = a^4\left[a^d\right], \\ &\left[a^d\right]^6 = a^4\left[a^d\right]^2, \\ &\left[a^d\right]^7 = -a^6\left[a^d\right], \\ &\dots \end{aligned} \tag{5.32}$$

tako da važi sledeća opšta formula

$$\begin{aligned} &\left[a^d\right]^{2i-1} = (-1)^{i-1}a^{2i-2}\left[a^d\right], \\ &\left[a^d\right]^{2i} = (-1)^{i-1}a^{2i-2}\left[a^d\right]^2, \ i = 1,2,3,... \end{aligned} \tag{5.33}$$

Specijalno, ako je $\vec{a} = \vec{e}$, gde je $\vec{e}$ jedinični vektor, dobija se

$$\begin{aligned} &\left[e^d\right]^{2i-1} = (-1)^{i-1}\left[e^d\right], \\ &\left[e^d\right]^{2i} = (-1)^{i-1}\left[e^d\right]^2, \ i = 1,2,3,... \end{aligned} \tag{5.34}$$

5.3.1 Vektorski proizvod i dualni objekat

Neka je dat vektor $\vec{b}$ čije su koordinate u odnosu na sistem *Oxyz*

$$\{\vec{b}\} = \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{Bmatrix}. \tag{5.35}$$

Vektorski proizvod vektora (5.23) i (5.35) biće

$$\{\vec{a} \times \vec{b}\} = \begin{Bmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{Bmatrix}. \tag{5.36}$$

Pošto je

$$\left[a^d\right]\{\vec{b}\} = \begin{Bmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{Bmatrix}, \tag{5.37}$$

sledi da je

$$\{\vec{a} \times \vec{b}\} = \left[a^d\right]\{\vec{b}\}. \tag{5.38}$$

Za vektorski proizvod važi yakon alternacije

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}, \tag{5.39}$$

tako da je

$$\{\vec{a} \times \vec{b}\} = -\left[b^d\right]\{\vec{a}\}, \tag{5.40}$$

odnosno, na osnovu relacija (5.38) i (5.40):

$$\left[a^d\right]\{\vec{b}\} = -\left[b^d\right]\{\vec{a}\}. \tag{5.41}$$

5.3.2. Dualni objekat i promena koordinatnog sistema

Neka su projekcije dva proizvoljna vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ na ose koordinatnih sistema *Oxyz* i $O\xi\eta\zeta$ (sl.19)

$$\{\vec{a}\} = \begin{Bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{Bmatrix}, \ \left\{\vec{a}^*\right\} = \begin{Bmatrix} a_\xi \\ a_\eta \\ a_\zeta \end{Bmatrix}, \ \{\vec{b}\} = \begin{Bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{Bmatrix}, \ \left\{\vec{b}^*\right\} = \begin{Bmatrix} b_\xi \\ b_\eta \\ b_\zeta \end{Bmatrix}. \tag{5.42}$$

Projekcijama vektora $\vec{a}$ odgovaraju dualni objekti

$$\left[a^d\right] = \begin{bmatrix} 0 & -a_z & a_y \\ a_z & 0 & -a_x \\ -a_y & a_x & 0 \end{bmatrix}, \ \left[a^{d*}\right] = \begin{bmatrix} 0 & -a_\zeta & a_\eta \\ a_\zeta & 0 & -a_\xi \\ -a_\eta & a_\xi & 0 \end{bmatrix}. \tag{5.43}$$

Uvedimo vektor $\vec{c}$ definisan kao vektorski proizvod

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}\ , \tag{5.44}$$

čije su projekcije

$$\{\vec{c}\} = \begin{Bmatrix} c_x \\ c_y \\ c_z \end{Bmatrix},\ \{\vec{c}^*\} = \begin{Bmatrix} c_\xi \\ c_\eta \\ c_\zeta \end{Bmatrix}, \tag{5.45}$$

na ose koordinatnih sistema *Oxyz* i $O\xi\eta\zeta$, respektivno, na osnovu formule (5.4) vezane relacijom

$$\{\vec{c}\} = [A]\{\vec{c}^*\}\,. \tag{5.46}$$

Pošto je

$$\begin{aligned} &\{\vec{c}\} = [a^d]\{\vec{b}\}, \\ &\{\vec{c}^*\} = [a^{d*}]\{\vec{b}^*\} = [a^{d*}][A]^{-1}\{\vec{b}\} = [a^{d*}][A]^T\{\vec{b}\}, \end{aligned} \tag{5.47}$$

prema (5.46) sledi da je

$$[a^d]\{\vec{b}\} = [A][a^{d*}][A]^T\{\vec{b}\}, \tag{5.48}$$

ili

$$\left([a^d] - [A][a^{d*}][A]^T\right)\{\vec{b}\} = 0\,. \tag{5.49}$$

Pošto je vektor $\vec{b}$ izabran proizvoljno, proističe da je

$$[a^d] = [A][a^{d*}][A]^T\,. \tag{5.50}$$

Relacija (5.50) definiše transformaciju dualnog objekta iz koordinatnog sistema $O\xi\eta\zeta$ u koordinatni sistem *Oxyz*. Lako se može pokazati da je relaciji (5.50) ekvivalentna relacija

$$[a^{d*}] = [A]^T[a^d][A], \tag{5.51}$$

koja definiše transformaciju dualnog objekta iz koordinatnog sistema *Oxyz* u koordinatni sistem $O\xi\eta\zeta$.

5.4. Veze između ugaone brzine, ugaonog ubrzanja i matrice transformacije u slučaju sfernog kretanja tela

Neka je koordinatni sistem *Oxyz* (sl.19) nepokretan, a koordinatni sistem $O\xi\eta\zeta$ vezan za kruto telo (V). Uočimo tačku M krutog tela (V) čije su koordinate u dva navedena koordinatna sistema (x,y,z) odnosno (ξ,η,ζ). Diferenciranjem zakona transformacije koordinata (5.4) po vremenu dobija se

$$\begin{Bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{Bmatrix} = \frac{d[A]}{dt} \begin{Bmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{Bmatrix}. \tag{5.52}$$

Pri diferenciranju smo uzeli u obzir da su koordinate tače M u lokalnom koordinatnom sistemu vezanom za telo (V) konstantne:

$$\xi,\eta,\zeta = const\,. \tag{5.53}$$

Elementi matrice na levoj strani jednakosti (5.52) predstavljaju projekcije brzine tačke M na ose nepomičnog koordinatnog sistema *Oxyz*, tako da je

$$\{\vec{v}\} = \begin{Bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{Bmatrix} = \frac{d[A]}{dt} \begin{Bmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{Bmatrix}. \tag{5.54}$$

Ako Ojlerov obrazac za brzinu tačke M (vidi [6])

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{OM}\,, \tag{5.55}$$

gde je $\vec{\omega}$ - vektor ugaone brzina krutog tela (V), napišemo u matričnom obliku, dobija se

$$\{\vec{v}\} = [\omega^d] \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix}, \tag{5.56}$$

gde je sa $[\omega^d]$ označen dualni objekat vektora ugaone brzine, čije koordinate $\omega_x \omega_y, \omega_z$ predstavljaju projekcije vektora $\vec{\omega}$ na ose nepokretnog koordinatnog sistema *Oxyz*, koji u eksplicitnoj formi glasi

$$[\omega^d] = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix}. \tag{5.57}$$

Relacija (5.56) se, prema (5.4), može napisati u obliku

$$\{\vec{v}\} = [\omega^d][A] \begin{Bmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{Bmatrix}, \tag{5.58}$$

što, korišćenjem (5.54), dovodi do izraza

$$\left[\frac{d[A]}{dt}-[\omega^d][A]\right]\begin{Bmatrix}\xi\\ \eta\\ \zeta\end{Bmatrix}=0. \tag{5.59}$$

Pošto je tačka M izabrana bez ikakvih ograničenja, koordinate ξ,η,ζ imaju proizvoljne vrednosti, tako da je

$$\frac{d[A]}{dt}-[\omega^d][A]=0, \tag{5.60}$$

što se može prevesti na ekvivalentni oblik

$$[\omega^d]=\frac{d[A]}{dt}[A]^T, \tag{5.61}$$

ili, prema (5.6) i (5.57),

$$\begin{bmatrix}0 & -\omega_z & \omega_y\\ \omega_z & 0 & -\omega_x\\ -\omega_y & \omega_x & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dot\alpha_{11} & \dot\alpha_{12} & \dot\alpha_{13}\\ \dot\alpha_{21} & \dot\alpha_{22} & \dot\alpha_{23}\\ \dot\alpha_{31} & \dot\alpha_{32} & \dot\alpha_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{21} & \alpha_{31}\\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \alpha_{32}\\ \alpha_{13} & \alpha_{23} & \alpha_{33}\end{bmatrix}. \tag{5.62}$$

Iz poslednje relacije se neposredno određuje

$$\begin{aligned}\omega_x &= \dot\alpha_{31}\alpha_{21}+\dot\alpha_{32}\alpha_{22}+\dot\alpha_{33}\alpha_{23},\\ \omega_y &= \dot\alpha_{11}\alpha_{31}+\dot\alpha_{12}\alpha_{32}+\dot\alpha_{13}\alpha_{33},\\ \omega_z &= \dot\alpha_{21}\alpha_{11}+\dot\alpha_{22}\alpha_{12}+\dot\alpha_{23}\alpha_{13}.\end{aligned} \tag{5.63}$$

Vektor ugaonog ubrzanja krutog dela definisan je sledećom relacijom (vidi [6])

$$\vec\varepsilon=\frac{d\vec\omega}{dt}, \tag{5.64}$$

tako da su projekcije vektora ugaone brzine na ose koordinatnog sistema $Oxyz$

$$\{\vec\varepsilon\}=\begin{Bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \varepsilon_z\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\dot\omega_x\\ \dot\omega_y\\ \dot\omega_z\end{Bmatrix}. \tag{5.65}$$

Očigledno je da važi

$$[\varepsilon^d]=[\dot\omega^d], \tag{5.66}$$

iz čega proističe

$$[\varepsilon^d]=\frac{d^2[A]}{dt^2}[A]^T+\frac{d[A]}{dt}\frac{d[A]^T}{dt}, \tag{5.67}$$

odnosno

$$\begin{bmatrix} 0 & -\varepsilon_z & \varepsilon_y \\ \varepsilon_z & 0 & -\varepsilon_x \\ -\varepsilon_y & \varepsilon_x & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ddot{\alpha}_{11} & \ddot{\alpha}_{12} & \ddot{\alpha}_{13} \\ \ddot{\alpha}_{21} & \ddot{\alpha}_{22} & \ddot{\alpha}_{23} \\ \ddot{\alpha}_{31} & \ddot{\alpha}_{32} & \ddot{\alpha}_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \alpha_{31} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \alpha_{32} \\ \alpha_{13} & \alpha_{23} & \alpha_{33} \end{bmatrix} + \\ + \begin{bmatrix} \dot{\alpha}_{11} & \dot{\alpha}_{12} & \dot{\alpha}_{13} \\ \dot{\alpha}_{21} & \dot{\alpha}_{22} & \dot{\alpha}_{23} \\ \dot{\alpha}_{31} & \dot{\alpha}_{32} & \dot{\alpha}_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\alpha}_{11} & \dot{\alpha}_{21} & \dot{\alpha}_{31} \\ \dot{\alpha}_{12} & \dot{\alpha}_{22} & \dot{\alpha}_{32} \\ \dot{\alpha}_{13} & \dot{\alpha}_{23} & \dot{\alpha}_{33} \end{bmatrix}. \tag{5.68}$$

Prema poslednjem izrazu je (vidi (5.63) i (5.65)):

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \ddot{\alpha}_{31}\alpha_{21} + \ddot{\alpha}_{32}\alpha_{22} + \ddot{\alpha}_{33}\alpha_{23} + \dot{\alpha}_{31}\dot{\alpha}_{21} + \dot{\alpha}_{32}\dot{\alpha}_{22} + \dot{\alpha}_{33}\dot{\alpha}_{23}, \\ \varepsilon_y &= \ddot{\alpha}_{11}\alpha_{31} + \ddot{\alpha}_{12}\alpha_{32} + \ddot{\alpha}_{13}\alpha_{33} + \dot{\alpha}_{11}\dot{\alpha}_{31} + \dot{\alpha}_{12}\dot{\alpha}_{32} + \dot{\alpha}_{13}\dot{\alpha}_{33}, \\ \varepsilon_z &= \ddot{\alpha}_{21}\alpha_{11} + \ddot{\alpha}_{22}\alpha_{12} + \ddot{\alpha}_{23}\alpha_{13} + \dot{\alpha}_{21}\dot{\alpha}_{11} + \dot{\alpha}_{22}\dot{\alpha}_{12} + \dot{\alpha}_{23}\dot{\alpha}_{13}. \end{aligned} \tag{5.69}$$

Iz zakona transformacije dualnog objekta (5.51) sledi

$$[\omega^{d*}] = [A]^T [\omega^d][A], \tag{5.70}$$

gde je $[\omega^{d*}]$ dualni objekat vektora ugaone brzine $\vec{\omega}$ izraženog preko svojih projekcija $\omega_\xi, \omega_\eta, \omega_\zeta$ na ose lokalnog koordinatnog sistema $O\xi\eta\zeta$:

$$[\omega^{d*}] = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_\zeta & \omega_\eta \\ \omega_\zeta & 0 & -\omega_\xi \\ -\omega_\eta & \omega_\xi & 0 \end{bmatrix}. \tag{5.71}$$

Izraz (5.70), korišćenjem (5.61) daje relaciju

$$[\omega^{d*}] = [A]^T \frac{d[A]}{dt}, \tag{5.72}$$

ili

$$\begin{bmatrix} 0 & -\omega_\zeta & \omega_\eta \\ \omega_\zeta & 0 & -\omega_\xi \\ -\omega_\eta & \omega_\xi & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \alpha_{31} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \alpha_{32} \\ \alpha_{13} & \alpha_{23} & \alpha_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\alpha}_{11} & \dot{\alpha}_{12} & \dot{\alpha}_{13} \\ \dot{\alpha}_{21} & \dot{\alpha}_{22} & \dot{\alpha}_{23} \\ \dot{\alpha}_{31} & \dot{\alpha}_{32} & \dot{\alpha}_{33} \end{bmatrix}, \tag{5.73}$$

odakle se vidi da je

$$\begin{aligned} \omega_\xi &= \alpha_{13}\dot{\alpha}_{12} + \alpha_{23}\dot{\alpha}_{22} + \alpha_{33}\dot{\alpha}_{32}, \\ \omega_\eta &= \alpha_{11}\dot{\alpha}_{13} + \alpha_{21}\dot{\alpha}_{23} + \alpha_{31}\dot{\alpha}_{33}, \\ \omega_\zeta &= \alpha_{12}\dot{\alpha}_{11} + \alpha_{22}\dot{\alpha}_{21} + \alpha_{32}\dot{\alpha}_{31}. \end{aligned} \tag{5.74}$$

Primetimo da se do poslednjih relacija moglo doći korišćenjem zakona transformacije

$$\begin{Bmatrix} \omega_\xi \\ \omega_\eta \\ \omega_\zeta \end{Bmatrix} = [A]^T \begin{Bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{Bmatrix}. \tag{5.75}$$

i izraza (5.63).

Diferenciranjem po vremenu (5.72) dobija se

$$\left[\varepsilon^{d*}\right] = \frac{d[A]^T}{dt}\frac{d[A]}{dt} + [A]^T \frac{d^2[A]}{dt^2}, \tag{5.76}$$

gde je $[\varepsilon^{d*}]$ dualni objekat vektora ugaonog ubrzanja $\vec{\varepsilon}$ izraženog preko svojih projekcija $\varepsilon_\xi, \varepsilon_\eta, \varepsilon_\zeta$ na ose lokalnog koordinatnog sistema $O\xi\eta\zeta$

$$\left[\varepsilon^{d*}\right] = \begin{bmatrix} 0 & -\varepsilon_\zeta & \varepsilon_\eta \\ \varepsilon_\zeta & 0 & -\varepsilon_\xi \\ -\varepsilon_\eta & \varepsilon_\xi & 0 \end{bmatrix}. \tag{5.77}$$

U razvijenoj formi izraz (5.76) glasi

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 0 & -\varepsilon_\zeta & \varepsilon_\eta \\ \varepsilon_\zeta & 0 & -\varepsilon_\xi \\ -\varepsilon_\eta & \varepsilon_\xi & 0 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \dot\alpha_{11} & \dot\alpha_{21} & \dot\alpha_{31} \\ \dot\alpha_{12} & \dot\alpha_{22} & \dot\alpha_{32} \\ \dot\alpha_{13} & \dot\alpha_{23} & \dot\alpha_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot\alpha_{11} & \dot\alpha_{12} & \dot\alpha_{13} \\ \dot\alpha_{21} & \dot\alpha_{22} & \dot\alpha_{23} \\ \dot\alpha_{31} & \dot\alpha_{32} & \dot\alpha_{33} \end{bmatrix} + \\ &+ \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \alpha_{31} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \alpha_{32} \\ \alpha_{13} & \alpha_{23} & \alpha_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot\alpha_{11} & \ddot\alpha_{12} & \ddot\alpha_{13} \\ \ddot\alpha_{21} & \ddot\alpha_{22} & \ddot\alpha_{23} \\ \ddot\alpha_{31} & \ddot\alpha_{32} & \ddot\alpha_{33} \end{bmatrix} \end{aligned}, \tag{5.78}$$

odakle se dobija

$$\begin{aligned} \varepsilon_\xi &= \dot\alpha_{13}\dot\alpha_{12} + \dot\alpha_{23}\dot\alpha_{22} + \dot\alpha_{33}\dot\alpha_{32} + \alpha_{13}\ddot\alpha_{12} + \alpha_{23}\ddot\alpha_{22} + \alpha_{33}\ddot\alpha_{32}, \\ \varepsilon_\eta &= \dot\alpha_{11}\dot\alpha_{13} + \dot\alpha_{21}\dot\alpha_{23} + \dot\alpha_{31}\dot\alpha_{33} + \alpha_{11}\ddot\alpha_{13} + \alpha_{21}\ddot\alpha_{23} + \alpha_{31}\ddot\alpha_{33}, \\ \varepsilon_\zeta &= \dot\alpha_{12}\dot\alpha_{11} + \dot\alpha_{22}\dot\alpha_{21} + \dot\alpha_{32}\dot\alpha_{31} + \alpha_{12}\ddot\alpha_{11} + \alpha_{22}\ddot\alpha_{21} + \alpha_{32}\ddot\alpha_{31}. \end{aligned} \tag{5.79}$$

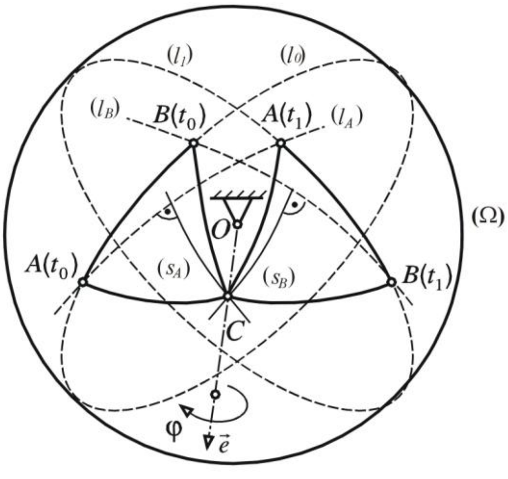
Uočimo da se do rezultata (5.79) moglo doći korišćenjem zakona transformacije

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_\xi \\ \varepsilon_\eta \\ \varepsilon_\zeta \end{Bmatrix} = [A]^T \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \end{Bmatrix}, \tag{5.80}$$

i izraza (5.69).

5.5. Ojler-Dalamberova teorema

Sferom kretanju krutog tela (V) obavljenom u vremenskom intervalu $[t_0, t_1]$ uvek odgovara jedna konačna rotacija za ugao φ oko nepomične ose koja sadrži nepomičnu tačku krutog tela. Ovom rotacijom kruto telo (V) prevodi se iz položaja koji odgovara trenutku $t = t_0$ u položaj ostvaren sfernim kretanjem u trenutku $t = t_1$. U opštem slučaju trajektorija proizvoljne tačke M krutog tela (V) pri sfernom kretanju ne poklapa se sa trajektorijom ostvarenom konačnom rotacijom. Međutim, ove dve trajektorije presecaju se u položajima koji odgovaraju trenucima $t = t_0$ i $t = t_1$. Ovaj iskaz poznat je kao Ojler-Dalamberova teorema (videti, na primer, [6]).



sl.20

Da bismo dokazali Ojler-Dalamberovu teoremu, uočićemo tri nekolinearne tačke krutog tela (V) koje, kao što je već pokazano, određuju njegov položaj. Neka su to nepomična tačka O i tačke A i B koje se nalaze na površini sfere čija je jednačina

$$x^2+y^2+z^2-R^2=0\,. \tag{5.81}$$

Na sl.20 prikazani su položaji tačaka *A* i *B* u trenucima $t=t_0$ i $t=t_1$ kao i veliki krugovi (l_0) i (l_1) sfere (Ω) određeni početnim $A(t_0),B(t_0)$ i krajnjim $A(t_1),B(t_1)$ položajima izabranih tačaka. Veliki krugovi (s_A) i (s_B) predstavljaju simetrale lukova $A(t_0)A(t_1)$ i $B(t_0)B(t_1)$ velikih krugova (l_A) i (l_B). Ove dve simetrale seku se u tački *C*. Koristeći poznatu osobinu simetrale luka i činjenicu da se tačka *C* istovremeno nalazi na velikim krugovima (s_A) i (s_B), može se zaključiti da lukovi velikih krugova koji sadrže tačku *C* i jednu od tačaka $A(t_0)$, $A(t_1)$, $B(t_0)$, $B(t_1)$ zadovoljavaju sledeću relaciju

$$A(t_0)C=A(t_1)C,\;\; B(t_0)C=B(t_1)C\,. \tag{5.82}$$

Samim tim, sferni trouglovi $A(t_0)B(t_0)C$ i $A(t_1)B(t_1)C$ su podudarni tako da se mogu dovesti do poklapanja jednom konačnom rotacijom za ugao φ oko ose *OC* orijenitsane jediničnim vektorom $\vec{e}$. Primetimo da je veličina ugla rotacije φ određena uglom kod temena *C* sfernog trougla $CB(t_0)B(t_1)$.

Na ovaj način dokazano je da se kruto telo (V) može prevesti iz zadatepočetne konfiguracije $(V)(t_0)$ u zadatu krajnju konfiguraciju $(V)(t_1)$ jednom konačnom rotacijom na opisani način.

5.6. Rodrigova matrica transformacije

Kruto telo (V) obrće se oko nepomične tačke *O* tako što vrši jednu konačnu rotaciju oko ose $O\tau$ orijentisane jediničnim vektorom $\vec{e}$ za ugao φ. Pri tome proizvoljna tačka *M* krutog tela prelazi iz početnog položaja M_0 u krajnji položaj M_1 (sl.21). Vektori položaja početnog i krajnjeg položaja tačke *M* su

$$\vec{r}_0=\vec{OM}_0,\;\; \vec{r}_1=\vec{OM}_1\,. \tag{5.83}$$

Očigledno je da će se početni i krajnji položaj tačke *M* nalaziti na krugu (l) koji ležu u ravni upravnoj na osu konačne rotacije $O\tau$. Poluprečnik h ovog kruga određen je normalnim rastojanjem tačke *M* u početnom položaju M_0 od ose $O\tau$. Uvedimo tri međusobno ortogonalna jedinična vektora $\vec{s},\vec{p},\vec{e}$ na sledeći način

$$\vec{p}=\frac{\vec{e}\times\vec{r}_0}{|\vec{e}\times\vec{r}_0|},\;\; \vec{s}=\vec{p}\times\vec{e}=-\frac{\vec{e}\times(\vec{e}\times\vec{r}_0)}{|\vec{e}\times\vec{r}_0|}\,. \tag{5.84}$$

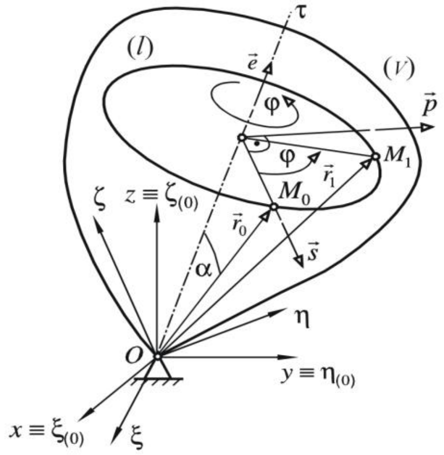
Pošto je

$$\vec{r}_1 = \vec{r}_0 + \overrightarrow{M_0M}_1,\ \overrightarrow{M_0M}_1 = (\overline{CM}_1 \cos\varphi - \overline{CM}_0)\vec{s} + (\overline{CM}_1 \sin\varphi)\vec{p} \qquad (5.85)$$

i, osim toga

$$\overline{CM}_0 = \overline{CM}_1 = \left|\vec{e} \times \vec{r}_0\right|, \qquad (5.86)$$

sledi da je



sl.21

$$\vec{r}_1 = \vec{r}_0 - \left|\vec{e} \times \vec{r}_0\right|\left(1 - \cos\varphi\right)\vec{s} + \left|\vec{e} \times \vec{r}_0\right|\left(\sin\varphi\right)\vec{p}, \qquad (5.87)$$

odnosno, s obzirom na (3.4)

$$\vec{r}_1 = \vec{r}_0 + (1 - \cos\varphi)\vec{e} \times (\vec{e} \times \vec{r}_0) + (\sin\varphi)\vec{e} \times \vec{r}_0. \qquad (5.88)$$

Izraz (3.8) koji utvrđuje vezu između vektora položaja tačke M u početnom i krajnjem položaju naziva se Rodrigovim obrascem.

Neka su Dekartove koordinate tačke M u njenom početnom i krajnjem položaju

$$\{\vec{r}_0\} = \begin{Bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{Bmatrix},\ \{\vec{r}_1\} = \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix}. \qquad (5.89)$$

Relacija (3.8) može se napisati u obliku

$$\{\vec{r}_1\} = \left[A^r\right]\{\vec{r}_0\}, \qquad (5.90)$$

gde je sa

$$\left[A^r\right] = \left[I\right] + (1 - \cos\varphi)\left[e^d\right]^2 + \sin\varphi\left[e^d\right], \qquad (5.91)$$

označena tzv. Rodrigova matrica. Matrice koje figurišu u izrazu (5.91) imaju sledeću formu

$$[I]=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix},\ [e^d]=\begin{bmatrix}0&-e_z&e_y\\e_z&0&-e_x\\-e_y&e_x&0\end{bmatrix}, \tag{5.92}$$

pri čemu su sa e_x, e_y, e_z označene projekcije jediničnog vektora $\vec{e}$ na ose nepomičnog koordinatnog sistema *Oxyz*. Ako je za kruto telo (V) vezan koordinatni sistem $O\xi\eta\zeta$ koji se u početnom položaju, označenom sa $O\xi_{(0)}\eta_{(0)}\zeta_{(0)}$, poklapa sa nepomičnim koordinatnim sistemom *Oxyz*, projekcije vektora $\vec{r}_0$ biće definisane projekcijama ξ, η, ζ vektora $\vec{r}$ na ose pokretnog koordinatnog sistema $O\xi\eta\zeta$

$$\{\vec{r}_0\}=\begin{Bmatrix}\xi\\\eta\\\zeta\end{Bmatrix}. \tag{5.93}$$

Odgovarajuće projekcije vektora $\vec{e}$ kolinearnog sa osom konačne rotacije $O\tau$ na ose nepokretnog koordinatnog sistema *Oxyz* i ose koordinatnog sistema $O\xi\eta\zeta$ vezanog za telo su jednake

$$\{\vec{e}\}=\begin{Bmatrix}e_x\\e_y\\e_z\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}e_\xi\\e_\eta\\e_\zeta\end{Bmatrix}. \tag{5.94}$$

Na osnovu (3.9) i (5.93), izraz (5.90) može se napisati u obliku

$$\begin{Bmatrix}x\\y\\z\end{Bmatrix}=[A^r]\begin{Bmatrix}\xi\\\eta\\\zeta\end{Bmatrix}. \tag{5.95}$$

Odavde zaključujemo (videti jednačinu (3.4)) da Rodrigova matrica $[A^r]$ predstavlja matricu transformacije koordinata tačke *M* krutog tela (V) iz koordinatnog sistema $O\xi\eta\zeta$ vezanog za telo (V) u koordinatni sistem *Oxyz*, pri čemu se ova dva sistema poklapaju u početnom položaju krutog tela, tj. u položaju iz koga započinje konačna rotacija krutog tela oko ose $O\tau$ za ugao φ.

Lako je proveriti da je

$$\begin{aligned}&[e^d][A^r]=[e^d]cos\varphi+[e^d]^2 sin\varphi,\\&\frac{\partial[A^r]}{\partial\varphi}=[e^d]cos\varphi+[e^d]^2 sin\varphi,\end{aligned} \tag{5.96}$$

odakle sledi važna relacija

$$\frac{\partial\left[A^r\right]}{\partial\varphi}=\left[e^d\right]\left[A^r\right]. \tag{5.97}$$

Napomenimo da je matrični proizvod na desnoj strani jednačine (5.97) komutativan, tako da se može napisati

$$\frac{\partial\left[A^r\right]}{\partial\varphi}=\left[A^r\right]\left[e^d\right]. \tag{5.98}$$

5.7. Kinematika otvorenog kinematičkog lanca

5.7.1 Uvodne napomene

Razmotrimo otvoreni kinematički lanac $(V_1),(V_2),...,(V_n)$ bez grananja pri čemu je prvo kruto telo (V_1) u lancu (sl.22) u vezi sa nepomičnim postoljem. Neka dva susedna tela (V_{i-1}) i (V_i) lanca, vezana zglobom (*i*) čine kinematički par $V-$te klase koji dozvoljava ili pravolinijsku translaciju tela $\left(V_i\right)$ u odnosu na telo (V_{i-1}) ili obrtanje tela (V_i) u odnosu na osu vezanu za telo (V_{i-1}). Uvodimo sledeće matrice

$$\{\xi\}\in R^{n\times 1},\{\overline{\xi}\}\in R^{n\times 1}, \tag{(5.99)}$$

čiji se elementi $\xi_i\left(i=1,2,...,n\right)$ odnosno $\overline{\xi}_i\left(i=1,2,...,n\right)$ odredjuju na sledeći način. U slučaju da zglob (*i*) dozvoljava pravolinijsku translaciju tela (V_i) u odnosu na telo (V_{i-1}) važiće ((V_0) -nepomično postolje)

$$\xi_i=1,\quad \overline{\xi}_i=0. \tag{5.100}$$

U slučaju da zglob (*i*) dozvoljava rotaciju tela (V_i) u odnosu na osu vezanu za telo (V_{i-1}) važiće

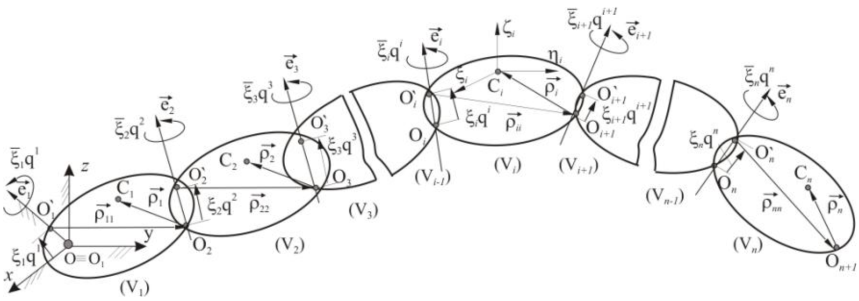
$$\xi_i=0,\quad \overline{\xi}_i=1. \tag{5.101}$$

Očigledno je da su zadavanjem elemenata jedne od matrica ((5.99)) odredjeni i elementi druge matrice jer uvek važi

$$\xi_i+\overline{\xi}_i=1 \quad i=1,2,...,n. \tag{5.102}$$

Zglob (*i*) za koji je $\xi_i=1$ naziva se *prizmatični* a zglob (*i*) za koji je $\overline{\xi}_i=1$- *cilindrični.*

U cilju odredjivanja konfiguracija kinematičkog lanaca uvodimo nepomični pravougli Dekartov koordinatni sistem *Oxyz* (sl.22) i *n* lokalnih koordinatnih sistema, takodje pravouglih Dekartovih. Na primer, lokalni koordinatni sistem $C_i\xi_i\eta_i\zeta_i$ vezan je za telo (V_i) $\left(i=1,2,...,n\right)$, tačka C_i predstavlja centar inercije tela (V_i). U nekoj konfiguraciji otvorenog kinematičkog lanca odgovarajuće ose lokalnih koordinatnih sistema paralelne



sl.22

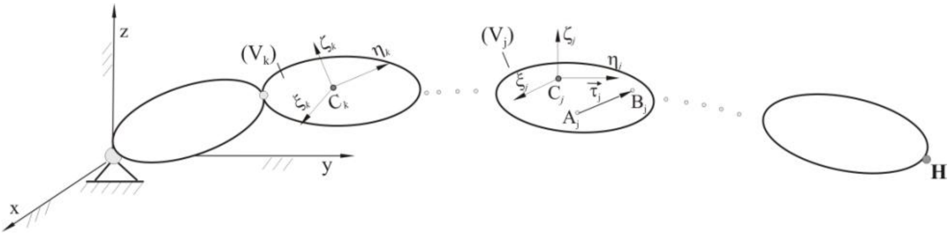
su odgovarajućim osama nepokretnog koordinatnog sistema. Tu konfiguraciju nazivamo *referentnom* i u njoj obično uzimamo da su koordinate koje odredjuju konfiguraciju lanca jednake nuli (iako to nije obavezno). Za tu konfiguraciju, koju ćemo označavati sa (0), dakle važi

$$C_i\xi_{i(0)} \parallel Ox,\; C_i\eta_{i(0)} \parallel Oy,\; C_i\zeta_{i(0)} \parallel Oz,\;\; i=1,2,...,n \;, \tag{5.103}$$

gde $C_i\xi_{i(0)}\eta_{i(0)}\zeta_{i(0)}$ predstavlja lokalni koordinatni sistem tela (V_i) u referentnoj konfiguraciji.

5.7.2 Složena matrica transformacije

Razmotrimo u otvorenom kinematičkom lancu bez grananja na koji način se transformišu koordinate vektora $\vec{\tau}_j = \overrightarrow{A_jB}_j$, $A_j, B_j \in (V_j)$, date u lokalnom koordinatnom sistemu $C_j\xi_j\eta_j\zeta_j$, na koordinate date u lokalnom koordinatnom sistemu $C_k\xi_k\eta_k\zeta_k$ vezanom za segment (V_k), $k<j$, sl.23



sl.23

Očigledno je da će u slučaju prizmatičnog zgloba između segmenata (V_j) i (V_{j-1}) odgovarajuće koordinate pomenutog vektora, date u koordinatnom sistemu $C_{j-1}\xi_{j-1}\eta_{j-1}\zeta_{j-1}$, biti jednake koordinatama toga vektora u koordinatnom sistemu $C_j\xi_j\eta_j\zeta_j$. Naime, ako su u koordinatnom sistemu $C_j\xi_j\eta_j\zeta_j$ te koordinate su date sa

$$\{\vec{\tau}_j^{(j)}\} = \begin{Bmatrix} \xi_j^{(j)} \\ \eta_j^{(j)} \\ \zeta_j^{(j)} \end{Bmatrix}, \tag{5.104}$$

u koordinatnom sistemu $C_{j-1}\xi_{j-1}\eta_{j-1}\zeta_{j-1}$ važiće

$$\{\vec{\tau}_j^{(j-1)}\} = \begin{Bmatrix} \xi_j^{(j-1)} \\ \eta_j^{(j-1)} \\ \zeta_j^{(j-1)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \xi_j^{(j)} \\ \eta_j^{(j)} \\ \zeta_j^{(j)} \end{Bmatrix}. \tag{5.105}$$

U slučaju cilindričnog zgloba između segmenata (V_k) i (V_{k-1}) očigledno je da su pre rotacije za ugao q^i koordinate vektora $\vec{\tau}_j$ u lokalnom koordinatnom sistemu $C_{j-1}\xi_{j-1}\eta_{j-1}\zeta_{j-1}$ jednake odgovarajućim koordinatama toga vektora u lokalnom koordinatnom sistemu $C_j\xi_j\eta_j\zeta_j$, (u tom koordinatnom sistemu date su konstantnim vektorom $\{\vec{\tau}_j^{(j)}\}$. Jednom konačnom rotacijom za ugao q^i te koordinate u lokalnom koordinarnom sistemu $C_{j-1}\xi_{j-1}\eta_{j-1}\zeta_{j-1}$ prevodimo na oblik $\{\vec{\tau}_j^{(j-1)}\}$. To prikazujemo na sledeći način

$$\begin{Bmatrix} \xi_j^{(j)} \\ \eta_j^{(j)} \\ \zeta_j^{(j)} \end{Bmatrix} \xrightarrow{q^i} \begin{Bmatrix} \xi_j^{(j-1)} \\ \eta_j^{(j-1)} \\ \zeta_j^{(j-1)} \end{Bmatrix}, \tag{5.106}$$

ili, uzimajući u obzir osobine Rodrigove matrice transformacije

$$\begin{Bmatrix} \xi_j^{(j-1)} \\ \eta_j^{(j-1)} \\ \zeta_j^{(j-1)} \end{Bmatrix} = \left[A_j^r\right] \begin{Bmatrix} \xi_j^{(j)} \\ \eta_j^{(j)} \\ \zeta_j^{(j)} \end{Bmatrix}. \tag{5.107}$$

Ako se Rodrigova matrica transformacije napiše u obliku

$$\left[A_j^r\right]=\left[I\right]+\bar{\xi}_j\left[(1-\cos q^j)\left[e_j^d\right]^2+\sin q^j\left[e_j^d\right]\right] \tag{5.108}$$

Tada će izraz (5.107) važiti i za slučaj prizmatičnog i za slučaj cilindričnog zgloba između segmenata (V_j) i (V_{j-1}). Razmatranjem analognim prethodnom dobija se (transformišu se koordinate vektora $\vec{\tau}_j$ iz $C_{j-1}\xi_{j-1}\eta_{j-1}\zeta_{j-1}$ u $C_{j-2}\xi_{j-2}\eta_{j-2}\zeta_{j-2}$)

$$\begin{Bmatrix}\xi_j^{(j-2)}\\ \eta_j^{(j-2)}\\ \zeta_j^{(j-2)}\end{Bmatrix}\xrightarrow{q^{j-1}}\begin{Bmatrix}\xi_j^{(j-1)}\\ \eta_j^{(j-1)}\\ \zeta_j^{(j-1)}\end{Bmatrix} \tag{5.109}$$

ili

$$\begin{Bmatrix}\xi_j^{(j-2)}\\ \eta_j^{(j-2)}\\ \zeta_j^{(j-2)}\end{Bmatrix}=\left[A_{j-1}^r\right]\begin{Bmatrix}\xi_j^{(j-1)}\\ \eta_j^{(j-1)}\\ \zeta_j^{(j-1)}\end{Bmatrix}\rightarrow\begin{Bmatrix}\xi_j^{(j-2)}\\ \eta_j^{(j-2)}\\ \zeta_j^{(j-2)}\end{Bmatrix}=\left[A_{j-1}^r\right]\left[A_j^r\right]\begin{Bmatrix}\xi_j^{(j)}\\ \eta_j^{(j)}\\ \zeta_j^{(j)}\end{Bmatrix}. \tag{5.110}$$

Nastavljajući navedeno razmatranje konačno dobijamo

$$\begin{Bmatrix}\xi_j^{(k)}\\ \eta_j^{(k)}\\ \zeta_j^{(k)}\end{Bmatrix}=\left[A_{k+1}^r\right]\left[A_{k+2}^r\right]...\left[A_{j-1}^r\right]\left[A_j^r\right]\begin{Bmatrix}\xi_j^{(j)}\\ \eta_j^{(j)}\\ \zeta_j^{(j)}\end{Bmatrix}. \tag{5.111}$$

Odavde se zaključuje da važi

$$\begin{Bmatrix}\xi_j^{(k)}\\ \eta_j^{(k)}\\ \zeta_j^{(k)}\end{Bmatrix}=\left[A_{k,j}^r\right]\begin{Bmatrix}\xi_j^{(j)}\\ \eta_j^{(j)}\\ \zeta_j^{(j)}\end{Bmatrix}, \tag{5.112}$$

gde je $[A_{k,j}]$ tražena složena matrica transformacije koordinata vektora $\vec{\tau}_j=\overrightarrow{A_jB_j},\ A_j,B_j\in(V_j)$ u lokalnom koordinatnom sistemu $C_j\xi_j\eta_j\zeta_j$ na kordinate toga vektora u lokalnom koordinatnom sistemu $C_k\xi_k\eta_k\zeta_k$ vezanom za segment $(V_k),\ k<j$. Ta matrica se izražava, dakle, na sledeći način

$$\left[A_{k,j}\right]=\left[A_{k+1}^r\right]\left[A_{k+2}^r\right]...\left[A_{j-1}^r\right]\left[A_j^r\right]=\prod_{s=k+1}^{s=j}\left[A_s^r\right]. \tag{5.113}$$

Inverzna matrica matrice transformacije $[A_{j,k}]$, uzimajući u obzir osobine ortogonalnih transformacija, glasi

$$\left[A_{k,j}\right]^{-1}=\left[A_{k,j}\right]^{T}=\left[A_j^r\right]^T\left[A_{j-1}^r\right]^T\ldots\left[A_{k+2}^r\right]^T\left[A_{k+1}^r\right]^T . \tag{5.114}$$

5.7.3 Izvod vektora vezanog za segment (V_i) po generalisanoj koordinati

Za odredjivanje vektora položaja proizvoljne tačke koja pripada kinematičkom lancu uvodi se niz vektora čiji početak i završetak pripadaju pojedinim krutim telima toga lanca. U tom cilju posmatra se položaj niza tačaka kinematičkog lanca (vidi sl.22). Najpre, u pitanju su tačke $O_i'\ (O_i' \in (V_i),\ i=1,2,\ldots,n)$ i $O_i\ (O_1 \equiv O,\ O_{i+1} \in (V_i),\ i=1,2,\ldots,n-1)$ koje se nalaze na osama cilindričnih (prizmatičnih) zglobova koje su orijentisane jediničnim vektorima $\vec{e}_i\ (i=1,2,\ldots,n)$. Orijentacija vektora $\vec{e}_i$ poklapa se sa pozitivnom orijentacijom koordinate q^i koja odredjuje translatorno pomeranje tela (V_i) u odnosu na telo (V_{i-1}) ukoliko je u pitanju prizmatični zglob. U slučaju cilindričnog zgloba smer vektora $\vec{e}_i$ pridružen je po pravilu desnog zavrtnja pozitivnom smeru ugla obrtanja q^i tela (V_i) u odnosu na telo (V_{i-1}).

Relevantni vektori položaja otvorenog kinematičkog lanca odredjeni su relacijama $(i=1,2,\ldots,n)$

$$\overrightarrow{O_i'O_{i+1}}=\vec{\rho}_{ii}\,, \tag{5.115}$$

$$\overrightarrow{O_{i+1}C_i}=\vec{\rho}_i\,. \tag{5.116}$$

Primetimo da tačka O_{n+1} predstavlja proizvoljno izabranu tačku koja pripada poslednjem krutom telu (V_n) u otvorenom kinematičkom lancu.

Vektori $\vec{e}_i, \vec{\rho}_{ii}, \vec{\rho}_i$ zadaju se u koordinatama lokalnog koordinatnog sistema $C_i\xi_i\eta_i\zeta_i$. Očigledno je da su takve koordinate (projekcije na odgovarajuće ose) tih vektora konstantne. U referentnoj konfiguraciji (0) lanca koordinate tih vektora poklapaju se sa njihovim projekcijama na ose nepokretnog koordinatnog sistema *Oxyz*.

Pošto dva susedna tela (V_{i-1}) i (V_i), povezani zglobom (i), čine kinematički par V-te klase koji dopušta jedan stepen slobode kretanja segmenta (V_i) u odnosu na segment (V_{i-1}), Langranževe koordinate otvorenog kinematičkog lanca predstavljene su skupom pomenutih koordinata q^i:

$$\left(q^1, q^2, ..., q^n\right). \tag{5.117}$$

Vektor

$$\vec{\tau}_i = \overrightarrow{A_i B_i}\ , \tag{5.118}$$

pri čemu važi $A_i, B_i \in (V_i)$, predstavlja sledeću funkciju Langranževih (nezavisnih generalisanih) koordinata:

$$\vec{\tau}_i = \vec{\tau}_i\left(q^1, q^2, ..., q^i\right). \tag{5.119}$$

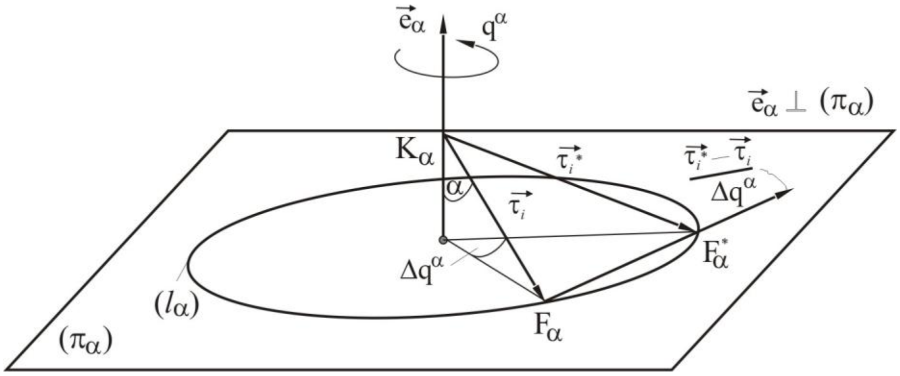
Za takav vektor važe relacije

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \vec{\tau}_i}{\partial q^\alpha} = \bar{\xi}_\alpha \vec{e}_\alpha \times \vec{\tau}_i \quad \forall \alpha \le i, \\ &\frac{\partial \vec{\tau}_i}{\partial q^\alpha} = 0 \quad \forall \alpha > i. \end{aligned} \tag{5.120}$$

Druga relacija u (5.120) je očigledna, a prva se dokazuje na sledeći način. U slučaju $\bar{\xi}_\alpha = 1$ važi

$$\frac{\partial \vec{\tau}_i}{\partial q^\alpha} = \lim_{\Delta q^\alpha \to 0} \frac{\vec{\tau}_i\left(q^1, q^2, ..., q^{\alpha-1}, q^\alpha + \Delta q^\alpha, q^{\alpha+1}, ..., q^i\right) - \vec{\tau}_i\left(q^1, q^2, ..., q^i\right)}{\Delta q^\alpha}. \tag{5.121}$$

Translatornim pomeranjem vektora $\vec{\tau}_i^{\,*} = \vec{\tau}_i(q^1, q^2, ..., q^\alpha + \Delta q^\alpha, ..., q^i)$ i $\vec{\tau}_i = \vec{\tau}_i(q^1, q^2, ..., q^i, ..., q^i)$ dovodimo do poklapanja (vidi sl.24) njihovih početaka sa proizvoljnom tačkom K_α na osi rotacije orijentisane jediničnim vektorom $\vec{e}_\alpha$. Pri fiksiranim vrednostima koordinata $q^1, q^2, ..., q^{\alpha-1}, q^\alpha, ..., q^i$, vrh vektora $\vec{\tau}_i$ će pri promeni koordinate q^α zbog uslova krutosti tela (V_i) $((\overrightarrow{A_i B_i}) = (\vec{\tau}_i) = const)$ opisivati krug (l_i) u ravni (π_α) koja je upravna na vektor $\vec{e}_\alpha$. Izraz (4.23) može da se napiše i u formi



sl.24

$$\frac{\partial \vec{\tau}_i}{\partial q^\alpha} = \lim_{\Delta q^\alpha \to 0} \frac{\vec{\tau}_i^{\,*} - \vec{\tau}_i}{\Delta q^\alpha}, \tag{5.122}$$

odakle sledi

$$\left| \frac{\partial \vec{\tau}_i}{\partial q^\alpha} \right| = \lim_{\Delta q^\alpha \to 0} \frac{\left| \vec{\tau}_i^{\,*} - \vec{\tau}_i \right|}{\left| \Delta q^\alpha \right|} = \lim_{\Delta q^\alpha \to 0} \frac{2 \left| \vec{\tau}_i \right| sin\, \alpha\, sin\left(\Delta q^\alpha / 2 \right)}{\Delta q^\alpha}, \tag{5.123}$$

ili

$$\left| \frac{\partial \vec{\tau}_i}{\partial q^\alpha} \right| = \left| \vec{\tau}_i \right| sin\, \alpha \tag{5.124}$$

Ugao koji pravac vektora $\partial \vec{\tau}_i / \partial q^\alpha$ gradi sa vektorom $\vec{\tau}_i$ odredjen je graničnom vrednošću

$$\measuredangle\left(\vec{\tau}_i, \partial \vec{\tau}_i / \partial q^\alpha \right) = \lim_{\Delta q^\alpha \to 0} \measuredangle\left(\vec{\tau}_i, \frac{\vec{\tau}_i^{\,*} - \vec{\tau}_i}{\Delta q^\alpha} \right), \tag{5.125}$$

odakle sledi da je

$$\vec{\tau}_i \perp \frac{\partial \vec{\tau}_i}{\partial q^\alpha}. \tag{5.126}$$

Napomenimo da se do poslednjeg zaključka može da dođe i na sledeći način. Prema uslovu krutosti segmenta (V_i) sledi izraz $\vec{\tau}_i \cdot \vec{\tau}_i = const.$, a odatle, nakon diferenciranja po vremenu, i pomenuti zaključak.

Uzimajući u obzit da je vektor $\partial \vec{\tau}_i / \partial q^\alpha$ paralelan je ravni (π_α) sledi

$$\frac{\partial \vec{\tau}_i}{\partial q^\alpha} = \vec{e}_\alpha \times \vec{\tau}_i. \tag{5.127}$$

U slučaju da je $\xi_\alpha = 1$, za $\alpha \le i$, očigledno je da zbog relacije

$$\vec{\tau}_i = \vec{\tau}_i \left(q^1, q^2, ..., q^{\alpha-1}, q^{\alpha+1}, ..., q^i \right), \tag{5.128}$$

važi

$$\partial \vec{\tau}_i / \partial q^\alpha \equiv 0. \tag{5.129}$$

Prema (5.127) i (5.129) može da se napiše izraz

$$\frac{\partial \vec{\tau}_i}{\partial q^\alpha} = \bar{\xi}_\alpha \vec{e}_\alpha \times \vec{\tau}_i \quad \forall \alpha \le i, \tag{5.130}$$

koji obuhvata i slučaj $\bar{\xi}_\alpha = 1$ i slučaj $\xi_\alpha = 1$.

5.7.4 Brzina centra inercije krutog tela (V_i)

Vektor položaja centra inercije C_i krutog tela (V_i) u odnosu na nepokretnu tačku O (vidi sl.22) odredjen je relacijom

$$\overrightarrow{OC_i} = \vec{r}_i = \sum_{k=1}^{i}\left(\vec{\rho}_{kk} + \xi_k \vec{e}_k q^k\right) + \vec{\rho}_i \,. \tag{5.131}$$

Prethodna relacija ukazuje na činjenicu da važi

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i\left(q^1, q^2, \ldots, q^i\right), \tag{5.132}$$

odakle je

$$\vec{v}_{C_i} = \vec{v}_i = \sum_{\alpha=1}^{i} \vec{T}_{\alpha(i)} \dot{q}^\alpha \tag{5.133}$$

gde je $\vec{T}_{\alpha(i)} = \partial \vec{r}_i / \partial q^\alpha$. Pošto je prema (5.120):

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \vec{\rho}_{kk}}{\partial q^\alpha} = \bar{\xi}_\alpha \vec{e}_\alpha \times \vec{\rho}_{kk} \quad \forall \alpha \le k, \\
&\frac{\partial \vec{\rho}_{kk}}{\partial q^\alpha} = 0 \qquad\qquad \forall \alpha > k. \\
&\frac{\partial \vec{e}_k}{\partial q^\alpha} = \bar{\xi}_\alpha \vec{e}_\alpha \times \vec{e}_k \quad \forall \alpha \le k, \\
&\frac{\partial \vec{e}_k}{\partial q^\alpha} = 0 \qquad\qquad \forall \alpha > k
\end{aligned} \tag{5.134}$$

sledi (vidi (5.131)):

$$\begin{aligned}
&\vec{T}_{\alpha(i)} = \bar{\xi}_\alpha \vec{e}_\alpha \times \left[\sum_{k=\alpha}^{i}\left(\vec{\rho}_{kk} + \xi_k \vec{e}_k q^k\right) + \vec{\rho}_i\right] + \xi_\alpha \vec{e}_\alpha, \ \forall \alpha \le i \\
&\vec{T}_{\alpha(i)} = 0, \ \forall \alpha > i,
\end{aligned} \tag{5.135}$$

i

$$\vec{v}_i = \sum_{\alpha=1}^{n} \vec{T}_{\alpha(i)} \dot{q}^\alpha \,, \tag{5.136}$$

Poslednji izraz u matričnoj formi* ima oblik

$$\left\{\vec{v}_i^{(0)}\right\} = \sum_{\alpha=1}^{n}\left\{\vec{T}_{\alpha(i)}^{(0)}\right\}\dot{q}^{\alpha}\ , \tag{5.137}$$

gde je (vidi (5.134)):

$$\begin{aligned}\left\{\vec{T}_{\alpha(i)}^{(0)}\right\} &= \bar{\xi}_{\alpha}\left[A_{0,\alpha}\right][e_{\alpha}^{d}]\left\{\sum_{k=\alpha}^{i}\left[A_{\alpha,k}\right]\left(\left\{\vec{\rho}_{kk}\right\}+\bar{\xi}_k q^k\left\{\vec{e}_k\right\}\right)+\left[A_{\alpha,i}\right]\left\{\vec{\rho}_k\right\}\right\}+\\ &\quad +\xi_{\alpha}\left[A_{0,\alpha}\right]\left\{\vec{e}_{\alpha}\right\}\quad \forall\alpha\le i,\\ \left\{\vec{T}_{\alpha(i)}^{(0)}\right\} &= 0\quad \forall\alpha > i.\end{aligned} \tag{5.138}$$

Matrični zapis izraza (4.39) može da se dovede i na oblik

$$\left\{\vec{v}_i^{(0)}\right\} = [E]\{\dot{q}\}, \tag{5.139}$$

gde je

$$[E]\in R^{3\times n}\Rightarrow [E]=\left[\left\{\vec{T}_{1(i)}^{(0)}\right\}\vdots\left\{\vec{T}_{2(i)}^{(0)}\right\}\vdots\ldots\vdots\left\{\vec{T}_{n(i)}^{(0)}\right\}\right], \tag{5.140}$$

$$\{\dot{q}\}\in R^{n\times 1}\Rightarrow \{\dot{q}\}^{T}=\left(\dot{q}^1,\dot{q}^2,\ldots,\dot{q}^n\right). \tag{5.141}$$

5.7.5 Ubrzanje centra inercije krutog tela (V_i)

Ako se izraz (5.133) diferencira po vremenu dobijamo

$$\vec{a}_{C_i} = \vec{a}_i = \sum_{\alpha=1}^{i}\vec{T}_{\alpha(i)}\ddot{q}^{\alpha} + \sum_{\alpha=1}^{i}\frac{d\vec{T}_{\alpha(i)}}{dt}\dot{q}^{\alpha}. \tag{5.142}$$

Kako je $\vec{T}_{\alpha(i)} = \vec{T}_{\alpha(i)}(q^1,q^2,\ldots,q^i)$ sledi

$$\frac{d\vec{T}_{\alpha(i)}}{dt} = \sum_{\beta=1}^{i}\frac{\partial\vec{T}_{\alpha(i)}}{\partial q^{\beta}}\dot{q}^{\beta}\ . \tag{5.143}$$

* Gornji indeks (i) označava da su koordinate odgovarajućeg vektora date u odnosu na lokalni koordinatni sistem $C_i\xi_i\eta_i\zeta_i$ vezan za (V_i). Specijalno, kada je $i=0$ u pitanju su koordinate date u odnosu na nepokretni koordinatni sistem *Oxyz*. Kada je u pitanju vektor vezan za telo (V_i) (na primer $\vec{\tau}_i = \overrightarrow{A_iB_i}$, $A_i, B_i \in (V_i)$) tada u matričnom zapisu može ali ne mora da se izostavi gornji indeks (i) ako se radi o koordinatama toga vektora, datim u odnosu na $C_i\xi_i\eta_i\zeta_i$ (tj. o koordinatama datim u odnosu na lokalni koordinatni sistem za koje je vezan pomenuti vektor). Ova primedba se odnosi i na dualne objekte tih vektora.

Kako je $\vec{T}_{\alpha(i)} = \partial\vec{r}_i / \partial q^\alpha$ (uz ispunjenje poznatih uslova o neprekidnosti i diferenijabilnosti funkcije $\vec{r}_i = \vec{r}_i(q^1,...,q^i),\ i = 1,2,...,n$) očigledno sledi

$$\frac{\partial\vec{T}_{\alpha(i)}}{\partial q^\beta} = \frac{\partial^2\vec{r}_i}{\partial q^\alpha \partial q^\beta} \Rightarrow \frac{\partial\vec{T}_{\alpha(i)}}{\partial q^\beta} = \frac{\partial\vec{T}_{\beta(i)}}{\partial q^\alpha}, \tag{5.144}$$

tako da je izraz (4.44) moguće dovesti na oblik

$$\vec{a}_i = \sum_{\alpha=1}^{i} \vec{T}_{\alpha(i)}\ddot{q}^\alpha + \sum_{\alpha=1}^{i}\sum_{\beta=1}^{i} \vec{\Gamma}_{\alpha\beta(i)}\dot{q}^\alpha \dot{q}^\beta, \tag{5.145}$$

gde je

$$\vec{\Gamma}_{\alpha\beta(i)} = \frac{\partial\vec{T}_{\alpha(i)}}{\partial q^\beta}, \tag{5.146}$$

i

$$\vec{\Gamma}_{\alpha\beta(i)} = \vec{\Gamma}_{\beta\alpha(i)}. \tag{5.147}$$

U slučaju $\alpha \le \beta$ sledi (vidi (5.135))

$$\vec{\Gamma}_{\alpha\beta(i)} = \bar{\xi}_\alpha \vec{e}_\alpha \times \frac{\partial}{\partial q^\beta}\left[\sum_{k=\alpha}^{i}\left(\vec{\rho}_{kk} + \xi_k \vec{e}_k q^k\right) + \vec{\rho}_i\right], \tag{5.148}$$

očigledno je da važi

$$\frac{\partial}{\partial q^\beta}\left[\sum_{k=\alpha}^{i}\left(\vec{\rho}_{kk} + \xi_k \vec{e}_k q^k\right) + \vec{\rho}_i\right] = \frac{\partial}{\partial q^\beta}\left[\sum_{k=1}^{i}\left(\vec{\rho}_{kk} + \xi_k \vec{e}_k q^k\right) + \vec{\rho}_i\right], \tag{5.149}$$

odakle direktno sledi

$$\frac{\partial}{\partial q^\beta}\left[\sum_{k=\alpha}^{i}\left(\vec{\rho}_{kk} + \xi_k \vec{e}_k q^k\right) + \vec{\rho}_i\right] = \frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q^\beta} = \vec{T}_{\beta(i)}. \tag{5.150}$$

Poslednji izraz daje relaciji (5.148) oblik

$$\vec{\Gamma}_{\alpha\beta(i)} = \bar{\xi}_\alpha \vec{e}_\alpha \times \vec{T}_{\beta(i)} \quad \forall\ \alpha \le \beta. \tag{5.151}$$

U slučaju $\alpha > \beta$ sledi (vidi (5.146) i (5.120))

$$\begin{aligned}\vec{\Gamma}_{\alpha\beta(i)} &= \bar{\xi}_\alpha \bar{\xi}_\beta \left(\vec{e}_\beta \times \vec{e}_\alpha\right) \times \left[\sum_{k=\alpha}^{i}\left(\vec{\rho}_{kk} + \xi_k \vec{e}_k q^k\right) + \vec{\rho}_i\right] + \\ &+ \bar{\xi}_\alpha \bar{\xi}_\beta \left(\vec{e}_\beta \times \vec{e}_\alpha\right) + \bar{\xi}_\alpha \vec{e}_\alpha \times \left\{\bar{\xi}_\beta \vec{e}_\beta \times \left[\sum_{k=\alpha}^{i}\left(\vec{\rho}_{kk} + \xi_k \vec{e}_k q^k\right) + \vec{\rho}_i\right]\right\},\end{aligned} \tag{5.152}$$

što se nakon razvijanja dvostrukih vektorskih proizvoda može dovesti na oblik

$$\vec{\Gamma}_{\alpha\beta(i)} = \bar{\xi}_\beta \vec{e}_\beta \times \left\{ \bar{\xi}_\alpha \vec{e}_\alpha \times \left[\sum_{k=\alpha}^{i} \left(\vec{\rho}_{kk} + \xi_k \vec{e}_k q^k \right) + \vec{\rho}_i \right] + \xi_\alpha \vec{e}_\alpha \right\}, \tag{5.153}$$

ili, prema (5.135)

$$\vec{\Gamma}_{\alpha\beta(i)} = \bar{\xi}_\beta \vec{e}_\beta \times \vec{T}_{\alpha(i)} \quad \forall\, \alpha > \beta . \tag{5.154}$$

Prema (5.147) sledi da se pri sračunavanju vektora (5.146) može da koristi ili izraz (5.151) ili (5.154) a potom uzme u obzir činjenica da važi (5.147) (na primer, ako se odredjuje $\vec{\Gamma}_{53(11)}$ može se iskoristiti izraz (5.151) prema kome se odredjuje $\vec{\Gamma}_{53(11)}$ i potom uzme u obzir činjenica da važi: $\vec{\Gamma}_{53(11)} = \vec{\Gamma}_{35(11)}$). Izraz (5.145) može da se napiše i u obliku

$$\vec{a}_i = \sum_{\alpha=1}^{n} \vec{T}_{\alpha(i)} \ddot{q}^\alpha + \sum_{\alpha=1}^{n} \sum_{\beta=1}^{n} \vec{\Gamma}_{\alpha\beta(i)} \dot{q}^\alpha \dot{q}^\beta , \tag{5.155}$$

Pošto važi (vidi (5.135))

$$\vec{T}_{\alpha(i)} = 0 \;\; \forall \alpha > i , \tag{5.156}$$

i* (vidi (5.133) i (5.135)

$$\vec{\Gamma}_{\alpha\beta(i)} = 0 \quad \forall \left(\overline{\alpha,\beta} \right) > i , \tag{5.157}$$

Očigledno je da izrazi (5.151)) i (5.154) mogu da se napišu u jedinstvenoj formi

$$\vec{\Gamma}_{\alpha\beta(i)} = \bar{\xi}_a \vec{e}_a \times \vec{T}_{b(i)} \quad , \tag{5.158}$$

gde je**

$$a = \underline{\alpha,\beta}, \;\; b = \overline{\alpha,\beta} . \tag{5.159}$$

U matričnoj formi izraz (1.155) ima oblik

$$\{\vec{a}_i^{(0)}\} = \sum_{\alpha=1}^{n} \{\vec{T}_{\alpha(i)}^{(0)}\} \ddot{q}^\alpha + \sum_{\alpha=1}^{n} \sum_{\beta=1}^{n} \{\vec{\Gamma}_{\alpha\beta(i)}^{(0)}\} \dot{q}^\alpha \dot{q}^\beta , \tag{5.160}$$

gde je

$$\{\vec{\Gamma}_{\alpha\beta(i)}^{(0)}\} = \bar{\xi}_a \left[A_{0,a} \right] \left[e_a^d \right] \left[A_{a,b} \right] \{\vec{T}_{b(i)}^{(b)}\} , \tag{5.161}$$

pri čemu važi

$$\{\vec{T}_{b(i)}^{(b)}\} = \bar{\xi}_b \left[e_b^d \right] \left\{ \sum_{k=b}^{i} \left[A_{b,k} \right] \left(\{\vec{\rho}_{kk}\} + \xi_k q^k \{\vec{e}_k\} \right) + \left[A_{b,i} \right] \vec{\rho}_i \right\} + \xi_b \{\vec{e}_b\} . \tag{5.162}$$

---

* $\overline{\alpha,\beta} = \alpha \;\; \forall \alpha \geq \beta ; \;\; \overline{\alpha,\beta} = \beta \;\; \forall \alpha < \beta$

** $\underline{\alpha,\beta} = \alpha \;\; \forall \alpha \leq \beta ; \;\; \underline{\alpha,\beta} = \beta \;\; \forall \alpha > \beta$

5.7.6 Ugaona brzina krutog tela (V_i)

Ugaona brzina tela (V_1) koje je posredstvom cilindričnog (prizmatičnog) zgloba (1), (sl.22), vezano za postolje, ima oblik

$$\vec{\omega}_1 = \bar{\xi}_1 \vec{e}_1 \dot{q}^1 . \tag{5.163}$$

Kruto telo (V_2) relativno se kreće u odnosu na telo (V_1) (ili se obrće oko ose zgloba (2) vezane za telo (V_1) ili se translatorno pravolinijski kreće duž ose zgloba (2) vezane za telo (V_1)). Relativna ugaona brzina tela (V_2) u odnosu na (V_1) iznosi

$$\vec{\omega}_{2r} = \bar{\xi}_2 \vec{e}_2 \dot{q}^2 , \tag{5.164}$$

Prema izrazu za apsolutnu brzinu tela (V_2)

$$\vec{\omega}_2 = \vec{\omega}_{2p} + \vec{\omega}_{2r} , \tag{5.165}$$

gde je $\vec{\omega}_{2p}$ - prenosna ugaona brzina tela (V_2), kada se uzme u obzir da je

$$\vec{\omega}_{2p} = \vec{\omega}_1 , \tag{5.166}$$

sledi

$$\vec{\omega}_2 = \bar{\xi}_1 \vec{e}_1 \dot{q}^1 + \bar{\xi}_2 \vec{e}_2 \dot{q}^2 . \tag{5.167}$$

Polazeći od izraza za apsolutnu ugaonu brzinu tela (V_3)

$$\vec{\omega}_3 = \vec{\omega}_{3p} + \vec{\omega}_{3r} , \tag{5.168}$$

korišćenjem očigledne relacije

$$\vec{\omega}_{3p} = \vec{\omega}_2 , \quad \vec{\omega}_{3r} = \bar{\xi}_3 \vec{e}_3 \dot{q}^3 \tag{5.169}$$

dobija se

$$\vec{\omega}_3 = \sum_{k=1}^{3} \bar{\xi}_k \vec{e}_k \dot{q}^k . \tag{5.170}$$

Uopštavanjem prethodnih rezultata dolazi se do sledećeg izraza za ugaonu brzinu $(\vec{\omega}_i)$ krutog tela (V_i):

$$\vec{\omega}_i = \sum_{\alpha=1}^{i} \bar{\xi}_\alpha \vec{e}_\alpha \dot{q}^\alpha \tag{5.171}$$

ili

$$\vec{\omega}_i = \sum_{\alpha=1}^{n} \vec{\Omega}_{\alpha(i)}\, \dot{q}^{\alpha}, \qquad \vec{\Omega}_{\alpha(i)} = \begin{cases} \bar{\xi}_{\alpha}\vec{e}_{\alpha}, & \forall \alpha \le i \\ 0, & \forall \alpha > i \end{cases} . \tag{5.172}$$

U matričnoj formi relacija (5.171) glasi

$$\left\{\vec{\omega}_i^{(0)}\right\} = \sum_{\alpha=1}^{i} \bar{\xi}_{\alpha}\left[A_{0,\alpha}\right]\left\{\vec{e}_{\alpha}\right\}\dot{q}^{\alpha}, \tag{5.173}$$

ili

$$\left\{\vec{\omega}_i^{(0)}\right\} = \left[F\right]\left\{\dot{q}\right\}, \tag{5.174}$$

gde je

$$\left[F\right] \in R^{3\times n} \Rightarrow \left[F\right] = \left[\bar{\xi}_1\left\{\vec{e}_1^{(0)}\right\} \vdots \bar{\xi}_2\left\{\vec{e}_2^{(0)}\right\} \vdots \ldots \vdots \bar{\xi}_i\left\{\vec{e}_n^{(0)}\right\}\right], \tag{5.175}$$

pri čemu je potrebno uzeti u obzir da važi

$$\left\{\vec{e}_{\alpha}^{(0)}\right\} = \left[A_{0,\alpha}\right]\left\{\vec{e}_{\alpha}\right\}, \quad k = 1, 2, \ldots, i\,. \tag{5.176}$$

5.7.7 Ugaono ubrzanje krutog tela (V_i)

Diferenciranjem relacije (5.172) po vremenu dobija se izraz za ubrzanje tela (V_i) u obliku

$$\vec{\varepsilon}_i = \sum_{\alpha=1}^{n} \vec{\Omega}_{\alpha(i)}\, \ddot{q}^{\alpha} + \sum_{\beta=1}^{n}\sum_{\alpha=1}^{n} \vec{\Lambda}_{\alpha\beta(i)}\dot{q}^{\alpha}\dot{q}^{\beta}, \tag{5.177}$$

gde je

$$\vec{\Lambda}_{\alpha\beta(i)} = \frac{\partial \vec{\Omega}_{\alpha(i)}}{\partial q^{\beta}}, \tag{5.178}$$

Prema izrazu (5.120) sledi za $\beta \le \alpha$

$$\vec{\Lambda}_{\alpha\beta(i)} = \bar{\xi}_{\beta}\vec{e}_{\beta} \times \vec{\Omega}_{\alpha(i)}, \tag{5.179}$$

ili

$$\vec{\Lambda}_{\alpha\beta(i)} = \vec{\Omega}_{\beta(\alpha)} \times \vec{\Omega}_{\alpha(i)}, \tag{5.180}$$

gde je

$$\vec{\Omega}_{\beta(\alpha)} = \begin{cases} \bar{\xi}_{\beta}\vec{e}_{\beta}, & \forall \beta \le \alpha \\ 0, & \forall \beta > \alpha \end{cases}, \tag{5.181}$$

odakle zaključujemo (vidi (5.172)) da važi

$$\vec{\Lambda}_{\alpha\beta(i)} = 0 \quad \forall\, \beta > \alpha, \tag{5.182}$$

i, takodje,

$$\vec{\Lambda}_{\alpha\beta(i)} = 0 \quad \forall\, \alpha > i\,. \tag{5.183}$$

Koristeći (5.179) i (5.180) izraz (5.177) možemo da dovedemo na oblik

$$\vec{\varepsilon}_i = \sum_{\beta=1}^{n} \vec{\Omega}_{\alpha(i)}\, \ddot{q}^{\alpha} + \sum_{\beta=1}^{n}\sum_{\alpha=1}^{n} \vec{\Omega}_{\beta(\alpha)} \times \vec{\Omega}_{\alpha(i)} \dot{q}^{\alpha} \dot{q}^{\beta}\,, \tag{5.184}$$

Neposrednim diferenciranjem po vremenu (5.171) dobija se drugi oblik relacije za ugaono ubrzanje:

$$\vec{\varepsilon}_i = \sum_{\alpha=1}^{i} \bar{\xi}_{\alpha} \vec{e}_{\alpha}\, \ddot{q}^{\alpha} + \sum_{\alpha=1}^{i}\sum_{\beta=1}^{\alpha} \bar{\xi}_{\alpha}\bar{\xi}_{\beta} \vec{e}_{\beta} \times \vec{e}_{\alpha} \dot{q}^{\alpha} \dot{q}^{\beta}\,, \tag{5.185}$$

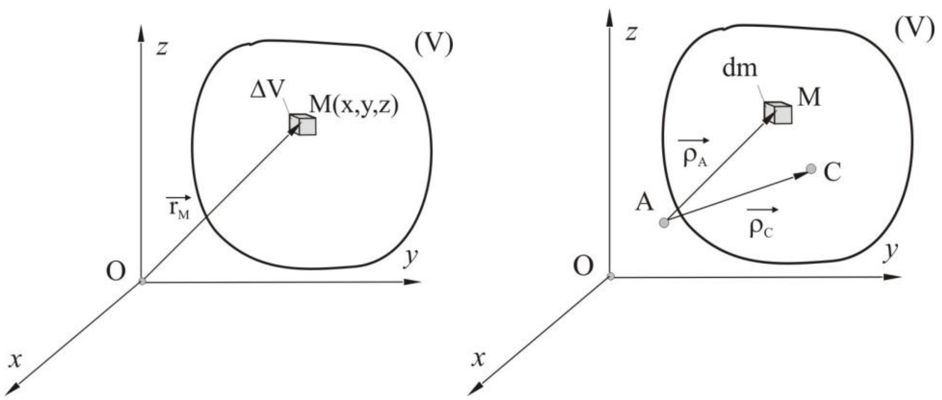
Poslednja relacija u matričnoj formi glasi

$$\begin{aligned}\{\vec{\varepsilon}_i^{(0)}\} &= \sum_{\alpha=1}^{i} \bar{\xi}_{\alpha} \left[A_{0,\alpha}\right]\{\vec{e}_{\alpha}\}\ddot{q}^{\alpha} + \\ &+ \sum_{\alpha=1}^{i}\sum_{\beta=1}^{\alpha} \bar{\xi}_{\alpha}\bar{\xi}_{\beta} \left[A_{0,\beta}\right][e_{\beta}^{d}]\left[A_{\beta,\alpha}\right]\{\vec{e}_{\alpha}\}\dot{q}^{\alpha}\dot{q}^{\beta}.\end{aligned} \tag{5.186}$$

5.8 Dinamika sistema krutih tela

5.8.1 Gustina krutog tela

Razm.atramo kruto telo (V), koje predstavlja oblast prostora ispunjenu neprekidno raspoređenom masom. Uočimo (sl.25) u oblasti (V) zapreminu ΔV u kojoj se nalazi masa Δm i koja sadrži tačku M. Srednja gustina materijalnog tela (V) definisana je sledećim izrazom



sl.25 sl.26

$$\rho_s = \frac{\Delta m}{\Delta V}. \tag{5.187}$$

Granična vrednost srednje gustine kada zapremina ΔV teži nuli (pri čemu tačka *M* ostaje stalno u unutrašnjosti oblasti ΔV)

$$\rho = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta V} = \frac{dm}{dV}, \tag{5.188}$$

naziva se *gustina* u datoj tački *M*. Gustina zavisi od niza faktora od kojih se neki uopšte ne razmatraju u okviru klasične mehanike (na primer od temeprature). Nadalje ćemo razmatrati samo slučaj kada je gustina tela (V) u tački *M* funkcija samo položaja te tačke, tj.:

$$\rho = \rho(\vec{r}_M) = \rho(x, y, z). \tag{5.189}$$

Kažemo da je telo (V) homogeno ako je ispunjen uslov

$$\rho(x, y, z) = const. \tag{5.190}$$

u protivnom telo (V) je nehomogeno.

5.8.2. Masa tela

Celokupna masa materijalnog sistema jednaka je zbiru svih materijalnih tačaka koje sačinjavaju pomenuti sistem. Analogno masa *m*, tela (V) (vidi sl.25) (bez objašnjavanja graničnog procesa koji sledi nakon podele tela (V) na *N* delova i puštanja da *N* teži beskonačnosti) iznosi

$$m = \int_{(V)} \rho(x, y, z) dV, \tag{5.190.a}$$

pri čemu je trostruki integral sračunat po oblasti (V) materijalnog tela.

U slučaju sistema *n* tela $(V_1), (V_2), ..., (V_3)$, masa $m_1, m_2, ..., m_n$, respektivno, masa *m* sistema tela određena je izrazom

$$m = \sum_{i=1}^{n} m_i. \tag{5.191}$$

5.8.3 Centar inercije (središte masa) tela i sistema tela

Centar inercije (C) tela (V), mase m, (vidi sl.26) u odnosu na proizvoljnu tačku A određen je izrazom koji je podsredstvom graničnog procesa izveden iz poznatog izraza za centar inercije (središte masa) sistema materijalnih tačaka:

$$m\vec{\rho}_C = \int_{(V)} \vec{\rho}_A dm, \tag{5.192}$$

ili

$$\vec{\rho}_C = \frac{\int_{(V)} \vec{\rho}_A dm}{\int_{(V)} dm} \tag{5.193}$$

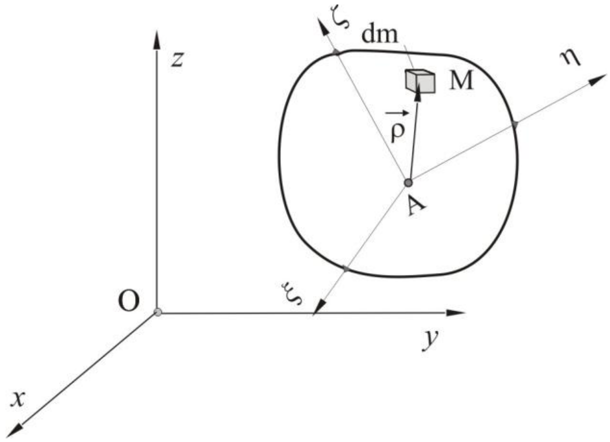
U slučaju sistema tela $(V_1),(V_2),...,(V_3)$, masa $m_1,m_2,...,m_n$, čiji centri inercije $C_1,C_2,...,C_n$ su određeni vektorima položaja (u odnosu na tačku A) $\vec{\rho}_1,\vec{\rho}_2,...\vec{\rho}_{Cn}$, respektivno, centar inercije (C) sistema dat je izrazom

$$\overrightarrow{AC} = \vec{\rho}_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{\rho}_{Ci}}{\sum_{i=1}^{n} m_i}, \tag{5.194}$$

5.4.4. Tenzor inercije tela (V)

Razmotrimo telo (V) (segment sistema tela, sl.27) u proizvoljnom položaju u odnosu na pravougli Dekartov koordinatni sistem *Oxyz*. Neka je konfiguracija tela (V) u odnosu na *Oxyz* određena konfiguracijom pravouglog Dekartovog koordinatnog sistema $A\xi\eta\zeta$, $A\xi\eta\zeta \in (V)$. Uočimo tačku $M \in (V)$ koja se nalazi u unutrašnjosti oblasti zapremine dV kojoj odgovara masa dm. Položaj tačke M u odnosu na $A\xi\eta\zeta$ određen je izrazom

$$\{\vec{\rho}\}^T = (\xi, \quad \eta, \quad \zeta), \tag{5.195}$$



sl.27

a dualni objekat prethodnog vektora dat je u poznatoj formi

$$\left[\rho^d\right]=\begin{bmatrix} 0 & -\zeta & \eta \\ \zeta & 0 & -\xi \\ -\eta & \xi & 0 \end{bmatrix}. \tag{5.196}$$

Tenzor inercije tela (V), dat u odnosu na $A\xi\eta\zeta$, definisan je sledećom relacijom (vidi [7])

$$[J_A] \overset{def}{=} -\int\limits_{(V)} \left[\rho^d\right]^2 dm\,, \tag{5.197}$$

odakle je očigledno da važi

$$[J_A] \in R^{3\times 3} \tag{5.198}$$

i da je matrica $[J_A]$ simetrična. Objekat $[J_A]$ naziva se tenzorom jer podleže zakonu transformacija tenzora pri koordinatnim transformacijama, (ovo će biti u kasnijem izlaganju pokazano).

Uzimajući u obzir osobine dualnih objekata, možemo da napišemo sledeći izraz ($[I]$- jedinična matrica):

$$\left[\rho^d\right]^2 = \{\vec{\rho}\}(\vec{\rho}) - \rho^2[I], \quad \left[\rho^d\right]^2 \in R^{3\times 3} \tag{5.199}$$

odakle sledi i ovaj izraz za tenzor inercije

$$[J_A] = \int\limits_{(V)} \left[\rho^2[I] - \{\vec{\rho}\}(\vec{\rho})\right] dm\,. \tag{5.200}$$

Uzimajući u obzir očigledne relacije

$$\rho^2[I]=\begin{bmatrix} \xi^2+\eta^2+\zeta^2 & 0 & 0 \\ 0 & \xi^2+\eta^2+\zeta^2 & 0 \\ 0 & 0 & \xi^2+\eta^2+\zeta^2 \end{bmatrix}, \tag{5.201}$$

$$\{\vec{\rho}\}(\vec{\rho})=\begin{bmatrix} \xi^2 & \xi\eta & \xi\zeta \\ \eta\xi & \eta^2 & \eta\zeta \\ \zeta\xi & \zeta\eta & \zeta^2 \end{bmatrix}, \tag{5.202}$$

izraz (5.200) dobija koordinatnu formu

$$[J_A]=\int_{(V)}\begin{bmatrix} \eta^2+\zeta^2 & -\xi\eta & -\xi\zeta \\ -\eta\xi & \zeta^2+\xi^2 & -\eta\zeta \\ -\zeta\xi & -\zeta\eta & \xi^2+\eta^2 \end{bmatrix} dm, \tag{5.203}$$

ili

$$[J_A]=\begin{bmatrix} \int_{(v)}(\eta^2+\zeta^2)dm & -\int_{(v)}(\xi\eta)dm & -\int_{(v)}(\xi\zeta)dm \\ -\int_{(v)}(\eta\xi)dm & \int_{(v)}(\zeta^2+\xi^2)dm & -\int_{(v)}(\eta\zeta)dm \\ -\int_{(v)}(\zeta\xi)dm & -\int_{(v)}(\zeta\eta)dm & \int_{(v)}(\eta^2+\xi^2)dm \end{bmatrix}, \tag{5.204}$$

odakle je očigledno da dijagonalni elementi gornje matrice predstavljaju aksijalne momente inercije J_ξ, J_η, J_ζ, tela (V) u odnosu na ose $O\xi, O\eta, O\zeta$, respektivno, a ostali elementi predstavljaju odgovarajuće centrifugalne momente inercije (proizvode inercije) $J_{\xi\eta}, J_{\eta\zeta}, J_{\zeta\xi}$, ($J_{\xi\eta}=J_{\eta\xi}$ itd.) sa promenjenim znakom, tako da možemo da napišemo

$$[J_A]=\begin{bmatrix} J_\xi & -J_{\xi\eta} & -J_{\xi\zeta} \\ -J_{\eta\xi} & J_\eta & -J_{\eta\zeta} \\ -J_{\zeta\xi} & -J_{\zeta\eta} & J_\zeta \end{bmatrix}. \tag{5.205}$$

Očigledno je da se u prethodnom razmatranju ništa suštinski ne menja ako ose $A\xi, A\eta, A\zeta$, zamenimo osama $O(1), O(2), O(3)$ koje su orijentisane sistemom ortogonalnih jediničnih vektora $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$, respektivno. U tome slučaju možemo da napišemo

$$[J_A]=\begin{bmatrix} J_1 & -J_{12} & -J_{13} \\ -J_{21} & J_2 & -J_{23} \\ -J_{31} & -J_{32} & J_3 \end{bmatrix}, \tag{5.206}$$

gde je smisao uvedenih oznaka očigledan. Radi preciznog određivanja na koji se koordinatni sistem odnosi, tenzor inercije iz izraza (5.203) mogao bi biti označen sa $[J_{A\xi\eta\zeta}]$. Međutim, kada je u pitanju tenzor inercije koji je određen u odnosu na prethodno precizno definisan koordinatni sistem (što će biti čest slučaj u narednim izlaganjima) može se iz izraza za tenzor inercije izostaviti oznaka koordinantnih osa.

Planarni tenzor inercije $[\Pi]$ tela (V) definiše se na sledeći način ([8])

$$[\Pi]=\int\{\vec{\rho}\}(\vec{\rho})\,dm, \tag{5.207}$$

i njegove koordinate date su koordinatama matrice

$$[\Pi]=\begin{bmatrix} \int\limits_{(V)} \xi^2 dm & \int\limits_{(V)} \xi\eta\, dm & \int\limits_{(V)} \xi\zeta\, dm \\ \int\limits_{(V)} \eta\xi\, dm & \int\limits_{(V)} \eta^2 dm & \int\limits_{(V)} \eta\zeta\, dm \\ \int\limits_{(V)} \zeta\xi\, dm & \int\limits_{(V)} \zeta\eta\, dm & \int\limits_{(V)} \zeta^2 dm \end{bmatrix}. \tag{5.208}$$

Koordinate na glavnoj dijagonali predstavljaju odgovarajuće planarne (u odnosu na koordinatne ravni) momente inercije, a ostale koordinate - odgovarajuće centrifugalne momente inercije tela, [9].

5.8.5. Transformacija tenzora inercije pri rotaciji koordinatnog sistema

Razmotrimo telo (V) za koje je određen tenzor inercije $[J_{A\xi\eta\zeta}]$ u odnosu na pravougli Dekartov koordinatni sistem $A\xi\eta\zeta$. Odredimo tenzor inercije $[J_{Axyz}]$ u odnosu na pravougli Dekartov koordinatni sistem $Axyz$ koji se jednom konačnom rotacijom može dovesti do poklapanja sa koordinatnim sistemom $A\xi\eta\zeta$ (položaj tela pri tome se ne menja). Uzimajući u obzir izraz (7.15) možemo da napišemo

$$[J_{A\xi\eta\zeta}]=\int\limits_{(V)}\left[(\xi\ \eta\ \zeta)\begin{Bmatrix}\xi\\ \eta\\ \zeta\end{Bmatrix}[I]-\begin{Bmatrix}\xi\\ \eta\\ \zeta\end{Bmatrix}(\xi\ \eta\ \zeta)\right]dm, \tag{5.209}$$

$$\left[J_{Axyz}\right]=\int\limits_{(V)}\left[\begin{pmatrix}x & y & z\end{pmatrix}\begin{Bmatrix}x\\ y\\ z\end{Bmatrix}[I]-\begin{Bmatrix}x\\ y\\ z\end{Bmatrix}\begin{pmatrix}x & y & z\end{pmatrix}\right]dm\,, \tag{5.210}$$

odakle, s obzirom na zakon transformacija koordinata

$$\begin{Bmatrix}x\\ y\\ z\end{Bmatrix}=[A]\begin{Bmatrix}\xi\\ \eta\\ \zeta\end{Bmatrix}, \tag{5.211}$$

i relacije $(\xi,\eta,\zeta)(\xi,\eta,\zeta)^T=(x,y,z)(x,y,z)^T=\rho^2, [A][A]^T=[A]^T[A]=[I]$

koje dovode do

$$\begin{aligned}&(\xi\ \eta\ \zeta)[A]^T[A]\begin{Bmatrix}\xi\\ \eta\\ \zeta\end{Bmatrix}[I]=[A]^T(\xi\ \eta\ \zeta)\begin{Bmatrix}\xi\\ \eta\\ \zeta\end{Bmatrix}[I][A]=\\ &=[A](\xi\ \eta\ \zeta)\begin{Bmatrix}\xi\\ \eta\\ \zeta\end{Bmatrix}[I][A]^T,\end{aligned} \tag{5.212}$$

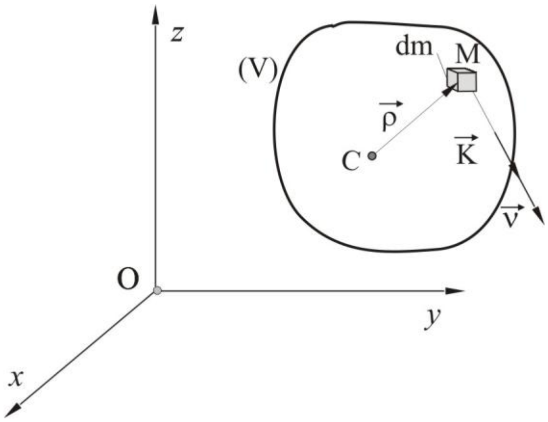
sledi

$$\left[J_{Axyz}\right]=[A]\left[J_{A\xi\eta\zeta}\right][A]^T. \tag{5.213}$$

Poslednji izraz predstavlja zakon transformacije kovarijantnog tenzora drugog reda pri transformaciji koordinata oblika (5.211). Iz tog razloga matrica (5.197) naziva se *tenzor inercije*, [10].

5.8.6. Količina kretanja krutog tela. Zakon o promeni količine kretanja krutog tela

Razmatramo telo (V) u proizvoljnoj konfiguraciji u odnosu na inercijalni pravougli koordinatni sistem *Oxyz* (sl.28)



sl.28

Količina kretanja elementarne mase dm (koja ispunjava zapreminu dV i koja ima tačku *M* za unutrašnju tačku) iznosi

$$d\vec{K} = \vec{v}dm, \tag{5.213.a}$$

a količina kretanja tela (V) iznosi

$$\vec{K} = \int_{(V)} \vec{v}\, dm. \tag{5.214}$$

Kako je

$$\vec{v} = \vec{v}_C + \vec{v}_M^C. \tag{5.215}$$

gde je C - centar inercije tela *V*, a $\vec{V}_M^C$ brzina tačke *M* u odnosu na C, sledi

$$\vec{K} = m\vec{v}_C + \int_{(V)} \vec{v}_M^C dm. \tag{5.216}$$

Uzimajući u obzir da je ($\vec{\omega}$ - ugaona brzina krutog tela (V))

$$\vec{v}_M^C = \vec{\omega} \times \vec{\rho}. \tag{5.217}$$

nalazimo

$$\int_{(V)} \vec{v}_M^C\, dm = \vec{\omega} \times \int_{(V)} \vec{\rho} dm. \tag{5.218}$$

što prema (5.193) iznosi

$$\int_{(V)} \vec{v}_M^C\, dm = \vec{\omega} \times m\vec{\rho}_C = 0, \tag{5.219}$$

tako da dobijamo

$$\vec{K} = m\vec{v}_C. \tag{5.220}$$

Ako u sistemu krutih tela oslobodimo veza proizvoljni segment (V_i), tada nadalje možemo razmatrati telo (V_i) kao slobodno na koje osim sistema aktivnih spoljašnjih sila

$$\left(\vec{F}_{1(i)}, \vec{F}_{2(i)}, ..., \vec{F}_{l_i(i)}\right), \tag{5.221}$$

čije su napadne tačke, respektivno:

$$A_{1(i)}, A_{2(i)}, ..., A_{l_i(i)}, \tag{5.222}$$

deluje i sistem spoljašnjih reakcija uklonjenih veza

$$\left(\vec{R}_{1(i)}, \vec{R}_{2(i)}, ..., \vec{R}_{m_i(i)}\right), \tag{5.223}$$

čije su napadne tačke, respektivno:

$$B_{1(i)}, B_{2(i)}, ..., B_{m_i(i)}. \tag{5.224}$$

Pri tome važi

$$\begin{aligned} A_{j(i)} &\in (V_i), \quad j = 1,2,...,l_i \\ B_{k(i)} &\in (V_i), \quad k = 1,2,...,m_i \end{aligned} \tag{5.225}$$

Kako, prema (5.220), količina kretanja $\vec{K}_i$ segmenta (V_i) iznosi (m_i - masa (V_i), C_i - centar inercije (V_i))

$$\vec{K}_i = m_i \vec{v}_{C_i}, \tag{5.226}$$

sledi (vidi (5.133))

$$\vec{K}_i = m_i \sum_{\alpha=1}^{n} \vec{T}_{\alpha(i)} \dot{q}^{\alpha}, \tag{5.227}$$

pri čemu je pretpostavljeno da se segment (V_i) nalazi u sklopu otvorenog kinematičkog lanca oblika prikazanog na (sl.22). Zakon o promeni količine kretanja segmenta (V_i) ima oblik koji se odnosi na materijalni sistem

$$\frac{d\vec{K}_i}{dt} = \vec{F}_{R(i)} + \vec{R}_{R(i)}, \tag{5.228}$$

gde je $\vec{F}_{R(i)}$ - glavni vektor sistema (5.221) a $\vec{R}_{R(i)}$ - glavni vektor sistema (5.223) tj.

$$\vec{F}_{R(i)} = \sum_{j=1}^{l_i} \vec{F}_{j(i)} \tag{5.229}$$

$$\vec{R}_{R(i)} = \sum_{k=1}^{m_i} \vec{R}_{k(i)} \,, \tag{5.230}$$

Uzimajući u obzir (5.226) izraz (5.228) može se prevesti na oblik ($\vec{a}_{C_i}$ - ubrzanje centra inercije segmenta (V_i))

$$m_i \vec{a}_{C_i} = \vec{F}_{R(i)} + \vec{R}_{R(i)} \tag{5.231}$$

koji se poklapa sa zakonom o kretanju centra inercije materijalnog sistema. Primetimo da zbir glavnih vektora u poslednjem izrazu predstavlja tačno glavni vektor spoljašnjih sila koje deluju na segment (V_i).

Konačno, prema (5.146) i (5.155) izraz (5.231) može da se napiše u obliku

$$m_i \left(\sum_{\alpha=1}^{n} \vec{T}_{\alpha(i)} \ddot{q}^{\alpha} + \sum_{\alpha=1}^{n} \sum_{\beta=1}^{n} \frac{\partial \vec{T}_{\alpha(i)}}{\partial q^{\beta}} \dot{q}^{\alpha} \dot{q}^{\beta} \right) = \vec{F}_{R(i)} + \vec{R}_{R(i)} \tag{5.232}$$

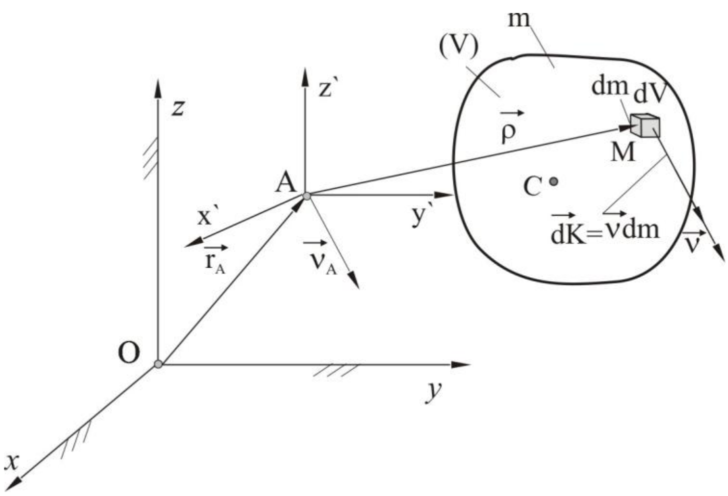
ili

$$m_i \left(\sum_{\alpha=1}^{n} \vec{T}_{\alpha(i)} \ddot{q}^{\alpha} + \sum_{\alpha=1}^{n} \sum_{\beta=1}^{n} \vec{\Gamma}_{\alpha\beta(i)} \dot{q}^{\alpha} \dot{q}^{\beta} \right) = \vec{F}_{R(i)} + \vec{R}_{R(i)} \,, \tag{5.233}$$

gde je

$$\vec{\Gamma}_{\alpha\beta(i)} = \xi_{\underline{\alpha\beta}} \vec{e}_{\underline{\alpha\beta}} \times \vec{T}_{\overline{\alpha\beta}(i)} \,. \tag{5.234}$$

Uočimo tačku A (vidi sl.29) koja u opštem slučaju ne pripada telu (V_i) i pokretna je. Elementarni kinetički moment tela (V_i) za tačku A iznosi



sl.29

$$d\vec{L}_A = \vec{\rho} \times d\vec{K} = \vec{\rho} \times \vec{v} dm, \tag{5.235}$$

kako je

$$\vec{v}_M = \vec{v} = \vec{v}_A + \vec{v}_r, \tag{5.236}$$

gde je:

$\vec{v}_A$ - brzina translacije koordinatnog sistema $Ax'y'z'$ (u toku translacije - $Ox \parallel Ax',\ Oy \parallel Ay', Oz \parallel Az'$; koordinatni sistem $Oxyz$ je inercijalan), $\vec{v}_r$ - brzina tačke M (unutrašnje tačke elementa dV) u odnosu na translatorno pokretni koordinatni sistem $Ax'y'z'$, sledi da je

$$d\vec{L}_A = \vec{\rho} \times \vec{v}_A dm + \vec{\rho} \times \vec{v}_r dm. \tag{5.237}$$

i

$$\vec{L}_A = -\vec{v}_A \times \int_{(V_i)} \vec{\rho}\, dm + \int_{(V_i)} \vec{\rho} \times \vec{v}_r dm. \tag{5.238}$$

Poslednja relacija može da se napiše i u obliku

$$\vec{L}_A = m\vec{\rho}_C \times \vec{v}_A + \vec{L}_{Ar}, \tag{5.239}$$

gde je $\vec{\rho}_C$ - vektor položaja centra inercije tela (V) u odnosu na tačku A i gde je

$$\vec{L}_{Ar} = \int_{(V_i)} \vec{\rho} \times \vec{v}_r dm. \tag{5.240}$$

Očgledno je da važi

$$\vec{v}_r = \dot{\vec{\rho}} = \frac{d}{dt}\left(\rho\, \vec{\rho}_o\right) \Rightarrow \vec{v}_r = \dot{\rho}\, \vec{\rho}_o + \rho \frac{d\vec{\rho}_o}{dt}, \tag{5.241}$$

pri čemu je $\vec{\rho}_o$ - jedinični vektor vektora $\vec{\rho}$, a ρ - intezitet vektora $\vec{\rho}$. Pošto važi

$$\frac{d\vec{\rho}_o}{dt} = \vec{\Omega} \times \vec{\rho}_o \tag{5.242}$$

gde je $\vec{\Omega}$ - ugaona brzina rotacije vektora $\vec{\rho}_o$ pri njegovom relativnom sfernom kretanju u odnosu na tačku O, sledi relacija

$$\vec{\rho} \times \vec{v}_r = \vec{\rho} \times \left(\vec{\Omega} \times \vec{\rho}\right), \tag{5.243}$$

odakle dobijamo izraze

$$\vec{L}_{Ar} = \int_{(V)} \vec{\rho} \times \left(\vec{\Omega} \times \vec{\rho}\right) dm, \tag{5.244}$$

$$\vec{L}_A = m\vec{\rho}_C \times \vec{v}_A + \int_{(V_i)} \vec{\rho} \times \left(\vec{\Omega} \times \vec{\rho}\right) dm \,. \tag{5.245}$$

Uzimajući u obzir da je

$$\left\{\vec{\rho} \times (\vec{\Omega} \times \vec{\rho})\right\} = -\left[\rho^d\right]^2 \left\{\vec{\Omega}\right\}, \tag{5.246}$$

Izraz (5.245) dobija u matričnoj notaciji oblik (vidi tenzor inercije (5.197))

$$\{\vec{L}_A\} = m\{\vec{\rho}_C \times \vec{v}_A\} + [J_A]\{\vec{\Omega}\}, \tag{5.247}$$

gde je $[J_A]$ - tenzor inercije tela (*V*) čije su koordinate date u pravouglom Dekartovom koordinatnom sistemu sa koordinatnim početkom *A*. Specijalno, ako $A \in (V)$ biće

$$\vec{\Omega} \equiv \vec{\omega}, \tag{5.248}$$

gde je $\vec{\omega}$ ugaona brzina krutog tela (V). Tada izraz (5.247) ima oblik

$$\{\vec{L}_A\} = m\{\vec{\rho}_C \times \vec{v}_A\} + [J_A]\{\vec{\omega}\}, \tag{5.249}$$

koji se u slučaju $A \equiv C$ svodi na

$$\{\vec{L}_C\} = [J_C]\{\vec{\omega}\}. \tag{5.250}$$

Pošto je prema (5.235)

$$\vec{L}_A = \int_{(V)} \vec{\rho} \times \vec{v} dm, \tag{5.251}$$

sledi

$$\frac{d\vec{L}_A}{dt} = \int_{(V)} \dot{\vec{\rho}} \times \vec{v} dm + \int_{(V)} \vec{\rho} \times \vec{a} dm. \tag{5.252}$$

Uzimajući u obzir da važi

$$\int_{(V)} \vec{\rho} \times \vec{a} dm = \int_{(V)} \vec{\rho} \times \left(d\vec{F}^s + d\vec{F}^u\right), \tag{5.253}$$

gde su* $d\vec{F}^s$ i $d\vec{F}^u$ elementarne spoljašnje i unutrašnje sile koje deluju na elemenat mase dm, sledi da je ($\vec{M}_{AR}^s$ - glavni moment spoljašnjih sila koje deluju na telo (V), sračunat u odnosu na tačku *A*)*:*

* *Uvek je moguće naći ekvivalentan sistem spoljašnjih sila kontinualno podeljenih u oblasti (V) koji je ekvivalentan sistemu koncetrisanih sila i (5.221) i (5.223).*

$$\frac{d\vec{L}_A}{dt} = m\vec{v}_C \times \vec{v}_A + \vec{M}_{AR}^{s} \tag{5.254}$$

gde je uzeto u obzir da je

$$\dot{\vec{\rho}} = \vec{v} - \vec{v}_A , \tag{5.255}$$

i da je glavni vektor unutrašnjih sila tela (V) jednak nuli tj.,

$$\vec{M}_{AR}^{u} = 0 . \tag{5.256}$$

U slučaju $A \equiv C$, iz (5.254) sledi

$$\frac{d\vec{L}_C}{dt} = \vec{M}_{CR}^{s} , \tag{5.257}$$

ili (vidi (5.239))

$$\frac{d\vec{L}_{Cr}}{dt} = \vec{M}_{CR}^{s} . \tag{5.258}$$

Korišćenjem (5.240) i (5.240) poslednji izraz može da se napiše i u obliku

$$\frac{d}{dt}\int_{(V)} \vec{\rho} \times \dot{\vec{\rho}}\, dm = \vec{M}_{CR}^{s} , \tag{5.259}$$

koji se svodi na relaciju

$$\int_{(V)} \vec{\rho} \times \ddot{\vec{\rho}} dm = \vec{M}_{CR}^{s} . \tag{5.260}$$

Ako u sistemu krutih tela, koji predstavlja model tehničkog sistema, oslobodimo veza proizvoljni segment (V_i), tada možemo (kao u već razmatranom slučaju) segment (V_i) posmatrati kao slobodan, pri čemu na njega deluju, kao spoljašnje, aktivne sile (5.221) i sile reakcije (5.223) uklonjenih veza. Za razmatrani segment izraz (5.260) dobija oblik

$$\int_{(V_i)} \left(\vec{\rho}_i \times \ddot{\vec{\rho}}_i\right) dm_i = \vec{M}_{C_i R(i)}^{a} + \vec{M}_{C_i R(i)}^{r} , \tag{5.261}$$

gde je $\vec{\rho}_i$ - vektor položaja tačke $M_i \in (V_i)$ koja je unutrašnja tačka elementarne zapremine (dV_i), mase dm_i, $\vec{M}_{C_i R(i)}^{a}$ - glavni moment aktivnih sila (5.221) sračunat za centar inercije C_i segmenta (V_i), $\vec{M}_{C_i R(i)}^{r}$ - glavni moment sila reakcija veza (5.223) sračunat za centar inercije C_i. Uzimajući u obzir da važi (vidi (5.130) i (5.172))

$$\dot{\vec{\rho}}_i = \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\partial \vec{\rho}_i}{\partial q^{\alpha}} \dot{q}^{\alpha} \quad \Rightarrow \dot{\vec{\rho}}_i = \sum_{\alpha=1}^{n} \vec{\Omega}_{\alpha(i)} \times \vec{\rho}_i \dot{q}^{\alpha} \tag{5.262}$$

dolazi se do relacije

$$\ddot{\vec{\rho}}_i = \sum_{\alpha=1}^{n}\sum_{\beta=1}^{n}\vec{\theta}_{\beta\alpha(i)}\dot{q}^{\alpha}\dot{q}^{\beta} + \sum_{\alpha=1}^{n}\vec{\Omega}_{\alpha(i)} \times \vec{\rho}_i \ddot{q}^{\alpha}, \tag{5.263}$$

gde je

$$\vec{\theta}_{\beta\alpha(i)} = \frac{\partial}{\partial q^{\beta}}\left(\vec{\Omega}_{\alpha(i)} \times \vec{\rho}_i\right) = \frac{\partial^2 \vec{\rho}_i}{\partial q^{\alpha}\partial q^{\beta}}. \tag{5.264}$$

Nadalje ćemo pretpostavljati da su ispunjeni svi uslovi pod kojima važi

$$\frac{\partial^2 \vec{\rho}_i}{\partial q^{\beta}\partial q^{\alpha}} = \frac{\partial^2 \vec{\rho}_i}{\partial q^{\alpha}\partial q^{\beta}}, \tag{5.265}$$

tj.

$$\vec{\theta}_{\beta\alpha(i)} = \vec{\theta}_{\alpha\beta(i)}. \tag{5.266}$$

Uzimajući u obzir poslednju relaciju možemo pisati u obliku

$$\vec{\theta}_{\alpha\beta(i)} = \vec{\theta}_{\beta\alpha(i)} = \frac{\partial}{\partial q^{\overline{\alpha\beta}}}\left(\frac{\partial \vec{\rho}_i}{\partial q^{\underline{\alpha\beta}}}\right), \tag{5.267}$$

odakle sledi

$$\vec{\theta}_{\alpha\beta(i)} = \vec{\theta}_{\beta\alpha(i)} = \frac{\partial}{\partial q^{\overline{\alpha\beta}}}\left(\vec{\Omega}_{\underline{\alpha\beta}(i)} \times \vec{\rho}_i\right), \tag{5.268}$$

što dovodi do relacije

$$\vec{\theta}_{\alpha\beta(i)} = \vec{\theta}_{\beta\alpha(i)} = \vec{\Omega}_{\underline{\alpha\beta}(i)} \times \left(\vec{\Omega}_{\overline{\alpha\beta}(i)} \times \vec{\rho}_i\right), \tag{5.269}$$

a zakon o promeni kinetičkog momenta segmenta (V_i), dobija oblik (vidi (5.260)):

$$\sum_{\alpha=1}^{n}\vec{b}_{\alpha(i)}\ddot{q}^{\alpha} + \sum_{\alpha=1}^{n}\sum_{\beta=1}^{n}\vec{d}_{\alpha\beta(i)}\dot{q}^{\alpha}\dot{q}^{\beta} = \vec{M}^{a}_{C_iR(i)} + \vec{M}^{r}_{C_iR(i)}, \tag{5.270}$$

gde je

$$\begin{aligned} \vec{b}_{\alpha(i)} &= \int_{(Vi)} \vec{\rho}_i \times \left(\vec{\Omega}_{\alpha(i)} \times \vec{\rho}_i\right) dm_i, \\ \vec{d}_{\alpha\beta(i)} &= \int_{(Vi)} \vec{\rho}_i \times \vec{\theta}_{\alpha\beta(i)} dm_i. \end{aligned} \tag{5.271}$$

Prema (5.269) dobija se relacija

$$\vec{d}_{\alpha\beta(i)} = \int_{(Vi)} \vec{\rho}_i \times \left(\vec{\Omega}_{\underline{\alpha\beta}(i)} \times \left(\vec{\Omega}_{\overline{\alpha\beta}(i)} \times \vec{\rho}_i\right)\right) dm_i = \\ = -\int_{(Vi)} \left(\vec{\Omega}_{\overline{\alpha\beta}(i)} \times \vec{\rho}_i\right)\left(\vec{\Omega}_{\underline{\alpha\beta}(i)} \cdot \vec{\rho}_i\right) dm_i , \tag{5.272}$$

čiji matrični zapis ima oblik

$$\{\vec{d}_{\alpha\beta(i)}\} = -\left[\Omega^d_{\overline{\alpha\beta}(i)}\right]\left[\int_{(Vi)} \{\vec{\rho}_i\}(\vec{\rho}_i)\, dm_i\right]\{\vec{\Omega}_{\underline{\alpha\beta}(i)}\} , \tag{5.273}$$

ili (vidi (5.207))

$$\{\vec{d}_{\alpha\beta(i)}\} = -\left[\Omega^d_{\overline{\alpha\beta}(i)}\right][\Pi_i]\{\vec{\Omega}_{\underline{\alpha\beta}(i)}\} . \tag{5.274}$$

Takođe, u matričnoj formi imamo i relaciju

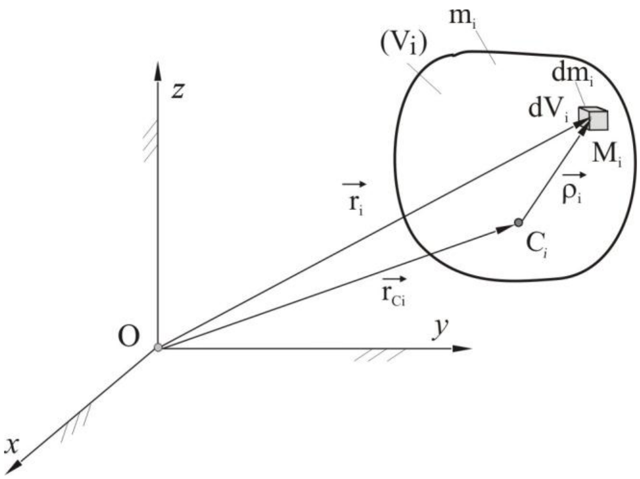
$$\{\vec{b}_{\alpha(i)}\} = \left[-\int_{(Vi)} \left[\rho_i^d\right]^2 dm_i\right]\{\vec{\Omega}_{\alpha(i)}\} , \tag{5.275}$$

ili (vidi (5.197))

$$\{\vec{b}_{\alpha(i)}\} = \left[J_{C_i}\right]\{\vec{\Omega}_{\alpha(i)}\} . \tag{5.276}$$

5.8.7. Kinetička energija sistema tela

Razmatramo system tela sa n segmenata $(V_1),(V_2),...,(V_n)$ koji ima oblik otvorenog kinematičkog lanca bez grananja. Diferencijal kinetičke energije segmenta (V_i), mase m_i, iznosi (vidi sl.30)



Sl.30

$$dE_{k(i)} = \frac{1}{2} dm_i \, v_{M_i}^2 \,, \tag{5.277}$$

gde je brzina unutrašnje tačke M_i elementarne zapremine dV_i, kojoj odgovara elementarna masa dm_i, jednaka (C_i-centar inercije segmenta (V_i), $\vec{\omega}_i$ - ugaona brzina segmenta (V_i)):

$$\vec{v}_{M_i} = \vec{v}_i = \vec{v}_{C_i} + \vec{\omega}_i \times \vec{\rho}_i \,. \tag{5.278}$$

Kinetička energija segmenta iznosi

$$E_{k(i)} = \frac{1}{2} \int\limits_{(V_i)} \left(\vec{v}_{C_i} + \vec{\omega}_i \times \vec{\rho}_i \right) \cdot \left(\vec{v}_{C_i} + \vec{\omega}_i \times \vec{\rho}_i \right) dm_i \,. \tag{5.279}$$

Poslednji izraz može da se dovede na oblik

$$E_{k(i)} = \frac{1}{2} v_{C_i}^2 \int\limits_{(V_i)} dm_i + \left(\vec{v}_{C_i} \times \vec{\omega}_i \right) \cdot \int\limits_{(V_i)} \vec{\rho}_i dm_i + \frac{1}{2} \int\limits_{(V_i)} \left(\vec{\omega}_i \times \vec{\rho}_i \right) \cdot \left(\vec{\omega}_i \times \vec{\rho}_i \right) dm_i \,, \tag{5.280}$$

koji se, prema (5.190.a) i (5.192) (u izrazu (5.192) : $A \equiv C$), dalje transformiše na sledeći način:

$$E_{k(i)} = \frac{1}{2} m_i v_{C_i}^2 + \frac{1}{2} \int\limits_{(V_i)} \left(\vec{\omega}_i \times \vec{\rho}_i \right) \cdot \left(\vec{\omega}_i \times \vec{\rho}_i \right) dm_i \tag{5.281}$$

Kako je

$$\left(\vec{\omega}_i \times \vec{\rho}_i \right) \cdot \left(\vec{\omega}_i \times \vec{\rho}_i \right) = \left(\vec{\omega}_i \times \vec{\rho}_i \right) \cdot \left\{ \vec{\omega}_i \times \vec{\rho}_i \right\} = -(\vec{\omega}_i) \left[\rho_i^d \right]^2 \left\{ \vec{\omega}_i \right\} , \tag{5.282}$$

sledi da se (5.281) može napisati u formi:

$$E_{k(i)} = \frac{1}{2} m_i v_{C_i}^2 + \frac{1}{2} \left(\vec{\omega}_i \right) \left[J_{C_i} \right] \left\{ \vec{\omega}_i \right\} , \tag{5.283}$$

gde je $[J_{C_i}]$ tenzor inercije segmenta (V_i). Uzimajući u obzir poznate relacije (vidi (5.136) i (5.172)):

$$\vec{v}_{C_i} = \sum_{\alpha=1}^{n} \vec{T}_{\alpha(i)} \dot{q}^{\alpha} \,, \tag{5.284}$$

$$\vec{\omega}_i = \sum_{\alpha=1}^{n} \vec{\Omega}_{\alpha(i)} \dot{q}^{\alpha} \,, \tag{5.285}$$

izraz (5.283) dobija oblik

$$E_{ki}=\frac{1}{2}m_i\left(\sum_{\alpha=1}^{n}\vec{T}_{\alpha(i)}\dot{q}^{\alpha}\right)\cdot\left\{\sum_{\beta=1}^{n}\vec{T}_{\beta(i)}\dot{q}^{\beta}\right\}+\frac{1}{2}\left(\sum_{\alpha=1}^{n}\vec{\Omega}_{\alpha(i)}\dot{q}^{\alpha}\right)\left[J_{C_i}\right]\left\{\sum_{\beta=1}^{n}\vec{\Omega}_{\beta(i)}\dot{q}^{\beta}\right\},$$

(5.286)

ili

$$E_{ki}=\frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{n}\sum_{\beta=1}^{n}a_{\alpha\beta(i)}\dot{q}^{\alpha}\dot{q}^{\beta}\,, \tag{5.287}$$

gde je

$$a_{\alpha\beta(i)}=m_i\,(\,\vec{T}_{\alpha(i)})\{\vec{T}_{\beta(i)}\}+(\vec{\Omega}_{\alpha(i)})\left[J_{C_i}\right]\{\,\vec{\Omega}_{\beta(i)}\}\,. \tag{5.288}$$

Kinetička energija sistema iznosi

$$E_k=\sum_{i=1}^{n}E_{k(i)}\,, \tag{5.289}$$

ili

$$E_k=\frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{n}\sum_{\beta=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}a_{\alpha\beta(i)}\dot{q}^{\alpha}\dot{q}^{\beta}\,. \tag{5.290}$$

Očigledno, kinetička energija razmatranog sistema (to je slučaj sa mehaničkim sistemima koji su podvrgnuti skleronomnim vezama) predstavlja homogenu kvadratnu formu generalisanih brzina $\dot{q}^1,\dot{q}^2,...,\dot{q}^n$. Prema (5.277) i (5.279) sledi

$$\begin{aligned}&E_k(\sum_{i=1}^{n}(\dot{q}^i)^2\neq 0)>0,\\&E_k(\sum_{i=1}^{n}(\dot{q}^i)^2=0)=0,\end{aligned} \tag{5.291}$$

odakle proističe da je (5.290) pozitivno definitna kvadratna forma generalisanih brzina. Izraz (5.290) može da se napiše i u obliku

$$E_k=\frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{n}\sum_{\beta=1}^{n}a_{\alpha\beta}\dot{q}^{\alpha}\dot{q}^{\beta} \tag{5.292}$$

gde je (vidi (5.290) i (5.292)

$$a_{\alpha\beta}=\sum_{i=1}^{n}m_i\left(\vec{T}_{\alpha(i)}\right)\left\{\vec{T}_{\beta(i)}\right\}+\sum_{i=1}^{n}\left(\vec{\Omega}_{\alpha(i)}\right)\left[J_{Ci}\right]\left\{\vec{\Omega}_{\beta(i)}\right\}, \tag{5.293}$$

pri čemu je očigledno

$$a_{\alpha\beta}(q^1,q^2,...,q^n)=a_{\beta\alpha}(q^1,q^2,...,q^n)\,. \tag{5.294}$$

Izraz (7.106) može da se napiše i u obliku

$$a_{\alpha\beta} = \sum_{i=1}^{n} m_i \frac{\partial \vec{r}_{C_i}}{\partial q^\alpha} \cdot \frac{\partial \vec{r}_{C_i}}{\partial q^\beta} + \sum_{i=1}^{n} \int_{(Vi)} \frac{\partial \vec{\rho}_i}{\partial q^\alpha} \cdot \frac{\partial \vec{\rho}_i}{\partial q^\beta} dm_i \,, \tag{5.295}$$

pri čemu su uzete u obzir poznate relacije

$$\frac{\partial \vec{r}_{C_i}}{\partial q^\alpha} = \vec{T}_{\alpha(i)}, \; \frac{\partial \vec{\rho}_i}{\partial q^\alpha} = \vec{\Omega}_{\alpha(i)} \times \vec{\rho}_i, \; \left[J_{C_i} \right] = -\int_{(Vi)} \left[\rho_i^d \right]^2 dm_i \,. \tag{5.296}$$

Koeficijenti $a_{\alpha\beta}$ forme (5.292) kvadratne po generalisanim brzinama nazivaju se kovarijantnim* koordinatama osnovnog metričkog tenzora a matrica $[a_{\alpha\beta}] \in R^{n\times n}$, naziva se *osnovni metrički tenzor*. Primetimo da izraz ((5.294)) može da se napiše i u obliku (vidi (5.159))

$$\begin{gathered} a_{\alpha\beta} = \sum_{i=\underline{\alpha\beta}}^{n} m_i \left(\vec{T}_{\alpha(i)}^{(a)} \right) \left\{ \vec{T}_{\beta(i)}^{(a)} \right\} + \sum_{i=\underline{\alpha\beta}}^{n} \bar{\xi}_\alpha \bar{\xi}_\beta \left(\vec{e}_\alpha^{(i)} \right) \left[J_{C_i} \right] \left\{ \vec{e}_\beta^{(i)} \right\} \\ a_{\alpha\beta} = a_{\alpha\beta}(q^{a+1},\ldots,q^n), \; a = \underline{\alpha,\beta}. \end{gathered} \tag{5.297}$$

5.8.8. Kovarijantni oblik diferencijalnih kretanja sistema krutih tela

Razmatramo sistem tela u obliku otvorenog kinematičkog lanca bez grananja koji je sačinjen od segemenata $(V_1),(V_2),\ldots,(V_n)$, jednačine veza kojima je sistem podvrgnut (veze su holonomne, skleronomne i idealne) omogućavaju, kako je ranije rečeno, da se odabere sistem nezavisnih generalisanih koordinata $(q^1,q^2,\ldots,q^n)$ koji omogućava da se kinetička energija (5.292) napiše u konačnoj formi u funkciji nezavisnih generalisanih koordinata i njihovih izvoda po vremenu (ako je u pitanju zatvoreni kinematički lanac, dopunske veze u opštem slučaju ne mogu da se dovedu u konačnoj formi na relacije koje izražavaju eksplicitnu zavisnost zavisnih koordinata u funkciji nezavisnih generalisanih koordinata). U tom slučaju diferencijalne jednačine kretanja mogu biti predstavljene u obliku *Langranževih jednačina druge vrste* (izraženih samo u funkciji nezavisnih generalisanih koordinata $(q^1,q^2,\ldots,q^n)$ i njihovih prvih i drugih izvoda po vremenu), tj., u obliku

* *Izraz preuzet iz tenzorskog računa - vidi, na primer,* [26].

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}^\gamma}\right) - \frac{\partial E_k}{\partial q^\gamma} = Q_\gamma,\ \gamma = 1,2,...,n, \tag{5.298}$$

gde je Q_γ -generalisana sila sistema aktivnih sila koje deluju na razmatrani sistem tela, koja odgovara nezavisnoj generalisanoj koordinati q^γ, $(\gamma = 1,2,...,n)$. Kako je (vidi (5.292))

$$\frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}^\gamma} = \frac{1}{2}\sum_{\beta=1}^{n} a_{\gamma\beta}\dot{q}^\beta + \frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{n} a_{\alpha\gamma}\dot{q}^\alpha \tag{5.299}$$

sledi (prema ((5.294))):

$$\frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}^\gamma} = \sum_{\alpha=1}^{n} a_{\alpha\gamma}\dot{q}^\alpha . \tag{5.300}$$

Dalje je

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}^\gamma}\right) = \sum_{\alpha=1}^{n} a_{\alpha\gamma}\ddot{q}^\alpha + \sum_{\alpha=1}^{n}\sum_{\beta=1}^{n}\frac{\partial a_{\alpha\gamma}}{\partial q^\beta}\dot{q}^\alpha\dot{q}^\beta, \tag{5.301}$$

ili

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}^\gamma}\right) = \sum_{\alpha=1}^{n} a_{\alpha\gamma}\ddot{q}^\alpha + \frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{n}\sum_{\beta=1}^{n}\left(\frac{\partial a_{\alpha\gamma}}{\partial q^\beta} + \frac{\partial a_{\beta\gamma}}{\partial q^\alpha}\right)\dot{q}^\alpha\dot{q}^\beta . \tag{5.302}$$

Parcijalni izvod kinetičke enrgije po nezavisnoj generalisanoj koordinati q^γ iznosi

$$\frac{\partial E_k}{\partial q^\gamma} = \frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{n}\sum_{\beta=1}^{n}\frac{\partial a_{\alpha\gamma}}{\partial q^\beta}\dot{q}^\alpha\dot{q}^\beta , \tag{5.303}$$

tako da jednačine (5.298) dobijaju oblik

$$\sum_{\alpha=1}^{n} a_{\alpha\gamma}\ddot{q}^\alpha + \sum_{\alpha=1}^{n}\sum_{\beta=1}^{n}\Gamma_{\alpha\beta,\gamma}\dot{q}^\alpha\dot{q}^\beta = Q_\gamma . \tag{5.304}$$

Ovakav oblik diferencijalnih jednačina kretanja naziva se *kovarijantnim.* U poslednjem izrazu koeficijenti homogene kvadratne forme po generalisanim brzinama iznose

$$\Gamma_{\alpha\beta,\gamma} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial a_{\beta\gamma}}{\partial q^\alpha} + \frac{\partial a_{\gamma_\alpha}}{\partial q^\beta} - \frac{\partial a_{\alpha\beta}}{\partial q^\gamma}\right), \tag{5.305}$$

i nazivaju se Kristofelovi simboli prve vrste. Ovi simboli imaju očiglednu osobinu

$$\Gamma_{\alpha\beta,\gamma} = \Gamma_{\beta\alpha,\gamma},\ \alpha,\beta,\gamma = 1,2,...,n. \tag{5.306}$$

Ostale osobine Kristofelovih simbola, koje se odnose na sistem u obliku otvorenog kinematičkog lanca, biće navedene u kasnijem izlaganju. Prema (5.295) dobijamo

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial a_{\beta\gamma}}{\partial q^{\alpha}} &= \sum_{i=1}^{n} m_i \left(\frac{\partial^2 \vec{r}_{C_i}}{\partial q^{\alpha} \partial q^{\beta}} \cdot \frac{\partial \vec{r}_{C_i}}{\partial q^{\gamma}} + \frac{\partial \vec{r}_{C_i}}{\partial q^{\beta}} \cdot \frac{\partial^2 \vec{r}_{C_i}}{\partial q^{\alpha} \partial q^{\gamma}} \right) + \\
&+ \sum_{i=1}^{n} \int_{(Vi)} \left(\frac{\partial^2 \vec{\rho}_i}{\partial q^{\alpha} \partial q^{\beta}} \cdot \frac{\partial \vec{\rho}_i}{\partial q^{\gamma}} + \frac{\partial \vec{\rho}_i}{\partial q^{\beta}} \cdot \frac{\partial^2 \vec{\rho}_i}{\partial q^{\alpha} \partial q^{\gamma}} \right) dm_i
\end{aligned}, \tag{5.307}
$$

odakle sledi (vidi (5.305))

$$
\begin{aligned}
\Gamma_{\alpha\beta,\gamma} &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} m_i \left(\begin{aligned} & \frac{\partial^2 \vec{r}_{C_i}}{\partial q^{\alpha} \partial q^{\beta}} \cdot \frac{\partial \vec{r}_{C_i}}{\partial q^{\gamma}} + \frac{\partial \vec{r}_{C_i}}{\partial q^{\beta}} \cdot \frac{\partial^2 \vec{r}_{C_i}}{\partial q^{\alpha} \partial q^{\gamma}} + \frac{\partial^2 \vec{r}_{C_i}}{\partial q^{\beta} \partial q^{\gamma}} \cdot \frac{\partial \vec{r}_{C_i}}{\partial q^{\alpha}} \\ & + \frac{\partial \vec{r}_{C_i}}{\partial q^{\gamma}} \cdot \frac{\partial^2 \vec{r}_{C_i}}{\partial q^{\beta} \partial q^{\alpha}} - \frac{\partial^2 \vec{r}_{C_i}}{\partial q^{\alpha} \partial q^{\gamma}} \cdot \frac{\partial \vec{r}_{C_i}}{\partial q^{\beta}} - \frac{\partial \vec{r}_{C_i}}{\partial q^{\alpha}} \cdot \frac{\partial^2 \vec{r}_{C_i}}{\partial q^{\beta} \partial q^{\gamma}} \end{aligned} \right) + \\
&+ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \int_{(Vi)} \left(\begin{aligned} & \frac{\partial^2 \vec{\rho}_i}{\partial q^{\alpha} \partial q^{\beta}} \cdot \frac{\partial \vec{\rho}_i}{\partial q^{\gamma}} + \frac{\partial \vec{\rho}_i}{\partial q^{\beta}} \cdot \frac{\partial^2 \vec{\rho}_i}{\partial q^{\alpha} \partial q^{\gamma}} + \frac{\partial^2 \vec{\rho}_i}{\partial q^{\gamma} \partial q^{\beta}} \cdot \frac{\partial \vec{\rho}_i}{\partial q^{\alpha}} \\ & + \frac{\partial \vec{\rho}_i}{\partial q^{\gamma}} \cdot \frac{\partial^2 \vec{\rho}_i}{\partial q^{\alpha} \partial q^{\beta}} - \frac{\partial^2 \vec{\rho}_i}{\partial q^{\alpha} \partial q^{\gamma}} \cdot \frac{\partial \vec{\rho}_i}{\partial q^{\beta}} - \frac{\partial \vec{\rho}_i}{\partial q^{\alpha}} \cdot \frac{\partial^2 \vec{\rho}_i}{\partial q^{\beta} \partial q^{\gamma}} \end{aligned} \right) dm_i
\end{aligned} \tag{5.308}
$$

i

$$
\Gamma_{\alpha\beta,\gamma} = \sum_{i=1}^{n} m_i \frac{\partial^2 \vec{r}_{C_i}}{\partial q^{\alpha} \partial q^{\beta}} \cdot \frac{\partial \vec{r}_{C_i}}{\partial q^{\gamma}} + \sum_{i=1}^{n} \int_{(Vi)} \frac{\partial^2 \vec{\rho}_i}{\partial q^{\alpha} \partial q^{\beta}} \cdot \frac{\partial \vec{\rho}_i}{\partial q^{\gamma}} dm_i . \tag{5.309}
$$

Poslednja relacija prema (5.264), (5.269) i (5.134) i (5.172) dobija oblik

$$
\begin{aligned}
\Gamma_{\alpha\beta,\gamma} &= \sum_{i=1}^{n} m_i \bar{\xi}_{\underline{\alpha\beta}} \left(\vec{e}_{\underline{\alpha\beta}} \times \vec{T}_{\overline{\alpha\beta}(i)} \right) \cdot \vec{T}_{\gamma(i)} + \\
&+ \sum_{i=1}^{n} \int_{(V_i)} \left[\vec{\Omega}_{\underline{\alpha\beta}(i)} \times \left(\vec{\Omega}_{\overline{\alpha\beta}(i)} \times \vec{\rho}_i \right) \right] \cdot \left(\vec{\Omega}_{\gamma(i)} \times \vec{\rho}_i \right) dm_i ,
\end{aligned} \tag{5.310}
$$

koji se, uzimajući u obzir relaciiju

$$
\begin{aligned}
& \left(\vec{\Omega}_{\underline{\alpha\beta}(i)} \times \left(\vec{\Omega}_{\overline{\alpha\beta}(i)} \times \vec{\rho}_i \right) \right) \cdot \left(\vec{\Omega}_{\gamma(i)} \times \vec{\rho}_i \right) = \left(\vec{\Omega}_{\underline{\alpha\beta}(i)} \cdot \vec{\rho}_i \right) \left(\vec{\Omega}_{\overline{\alpha\beta}(i)} \cdot \left(\vec{\Omega}_{\gamma(i)} \times \vec{\rho}_i \right) \right) = \\
& = \left(\vec{\Omega}_{\overline{\alpha\beta}(i)} \times \vec{\Omega}_{\gamma(i)} \right) \{ \vec{\rho}_i \} \left(\vec{\rho}_i \right) \{ \vec{\Omega}_{\underline{\alpha\beta}(i)} \},
\end{aligned} \tag{5.311}
$$

dalje transformiše u izraz

$$
\begin{aligned}
\Gamma_{\alpha\beta,\gamma} &= \sum_{i=1}^{n} m_i \bar{\xi}_{\underline{\alpha\beta}} \left(\vec{e}_{\underline{\alpha\beta}} \times \vec{T}_{\overline{\alpha\beta}(i)} \right) \{ \vec{T}_{\gamma(i)} \} + \\
&+ \sum_{i=1}^{n} \left(\vec{\Omega}_{\overline{\alpha\beta}(i)} \times \vec{\Omega}_{\gamma(i)} \right) \left[\int_{(Vi)} \{ \vec{\rho}_i \} \left(\vec{\rho}_i \right) dm_i \right] \{ \vec{\Omega}_{\underline{\alpha\beta}(i)} \}.
\end{aligned}
\tag{5.312}
$$

Očigledno je da važi

$$
\int_{(Vi)} \{ \vec{\rho}_i \} \left(\vec{\rho}_i \right) dm_i = \int_{(V_i)} \begin{bmatrix} \xi_i^2 & \xi_i \eta_i & \xi_i \zeta_i \\ \eta_i \xi_i & \eta_i^2 & \eta_i \zeta_i \\ \zeta_i \xi_i & \zeta_i \eta_i & \zeta_i^2 \end{bmatrix} dm_i , \tag{5.313}
$$

ili

$$
\int_{(Vi)} \{ \vec{\rho}_i \} \left(\vec{\rho}_i \right) dm_i = \begin{bmatrix} \int_{(V_i)} \xi_i^2 dm_i & \int_{(V_i)} \xi_i \eta_i dm_i & \int_{(V_i)} \xi_i \zeta_i dm_i \\ \int_{(V_i)} \eta_i \xi_i dm_i & \int_{(V_i)} \eta_i^2 dm_i & \int_{(V_i)} \eta_i \zeta_i dm_i \\ \int_{(V_i)} \zeta_i \xi_i dm_i & \int_{(V_i)} \zeta_i \eta_i dm_i & \int_{(V_i)} \zeta_i^2 dm_i \end{bmatrix}, \tag{5.314}
$$

Desna strana poslednje relacije predstavlja planarni tenzor inercije $[\Pi_{C_i}]$ segmenta (V_i). Dijagonalni elementi toga tenzora predstavljaju planarne momente inercije segmneta (V_i) u odnosu na koordinatne ravni $\eta_i C_i \zeta_i ,\ \zeta_i C_i \xi_i ,\ \xi_i C_i \eta_i$.

$$
J_{\eta_i C_i \zeta_i} = \int_{(V_i)} \xi_i^2 dm_i , J_{\zeta_i C_i \xi_i} = \int_{(V_i)} \eta_i^2 dm_i ,\ J_{\xi_i C_i \eta_i} = \int_{(V_i)} \zeta_i^2 dm_i , \tag{5.315}
$$

dok vandijagonalni elementi toga tenzora predstavljaju centrifugalne momente inercije $J_{\eta_i \zeta_i}, J_{\zeta_i \xi_i}, J_{\xi_i \eta_i}$ segmenta (V_i) sračunate u odnosu na koordinatni sistem $O\xi_i \eta_i \zeta_i$. Nadalje ćemo pomenuti tenzor inercije označavati sa $[\Pi_i]$ vodeći računa o činjenici da su njegovi elementi (koordinate) određeni u odnosu na $C_i \xi_i \eta_i \zeta_i$:

$$
[\Pi_i] = \begin{bmatrix} J_{\eta_i C_i \zeta_i} & J_{\xi_i \eta_i} & J_{\xi_i \zeta_i} \\ J_{\eta_i \xi_i} & J_{\zeta_i C_i \xi_i} & J_{\eta_i \zeta_i} \\ J_{\zeta_i \xi_i} & J_{\zeta_i \eta_i} & J_{\xi_i C_i \eta_i} \end{bmatrix}. \tag{5.316}
$$

Uvođenjem (5.316) Kristiofelovi simboli prve vrste (5.312) mogu da se napišu* u obliku

$$\begin{aligned}\Gamma_{\alpha\beta,\gamma} &= \sum_{i=1}^{n} m_i \bar{\xi}_a \left(\vec{e}_a^{(c)} \times \vec{T}_{b(i)}^{(c)}\right)\left\{\vec{T}_{\gamma(i)}^{(c)}\right\} + \\ &+ \sum_{i=1}^{n} \left(\vec{\Omega}_{b(i)}^{(i)} \times \vec{\Omega}_{\gamma(i)}^{(i)}\right)\left[\Pi_i\right]\left\{\vec{\Omega}_{a(i)}^{(i)}\right\}.\end{aligned} \tag{5.317}$$

Ranije je rečeno da (vidi (5.306)) Kristofelovi simboli prve vrste zadovoljavaju uslov

$$\Gamma_{\alpha\beta,\gamma} = \Gamma_{\beta\alpha,\gamma}, \quad \alpha,\beta,\gamma = 1,2,\ldots,n. \tag{5.318}$$

Međutim, zadovoljavaju i uslove

$$\Gamma_{\underline{\alpha\beta}\gamma,\overline{\alpha\beta}} = -\Gamma_{\overline{\alpha\beta}\gamma,\underline{\alpha\beta}} \ \forall \gamma \le \underline{\alpha\beta}, \tag{5.319}$$

$$\Gamma_{\alpha\beta,\gamma} = -\Gamma_{\underline{\alpha\beta}\gamma,\overline{\alpha\beta}} \ \forall \gamma > \underline{\alpha\beta} \tag{5.320}$$

i, očigledno, uslov

$$\Gamma_{\alpha\beta,\overline{\alpha\beta}} = 0. \tag{5.321}$$

Primetimo da izraz (5.317) može da se napiše i u formi

$$\begin{aligned}\Gamma_{\alpha\beta,\gamma} &= \sum_{i=d}^{n} m_i \bar{\xi}_a \left(\vec{e}_a^{(c)} \times \vec{T}_{b(i)}^{(c)}\right)\left\{\vec{T}_{\gamma(i)}^{(c)}\right\} + \\ &+ \sum_{i=d}^{n} \bar{\xi}_\alpha \bar{\xi}_\beta \bar{\xi}_\gamma \left(\vec{e}_b^{(i)} \times \vec{e}_\gamma^{(i)}\right)\left[\Pi_i\right]\left\{\vec{e}_a^{(i)}\right\}.\end{aligned} \tag{5.322}$$

Izraz (5.304) u potpunosti je određen izrazima (5.322) i (5.297). Za potpuno određivanje kovarijantnog oblika diferencijalnih jednačina kretanja (5.304) sistema tela potrebno je odrediti i generalisane sile $Q_\alpha(\alpha = 1,2,..,n)$ koje deluju na sistem tela.

5.8.9. Generalisane sile sistema tela

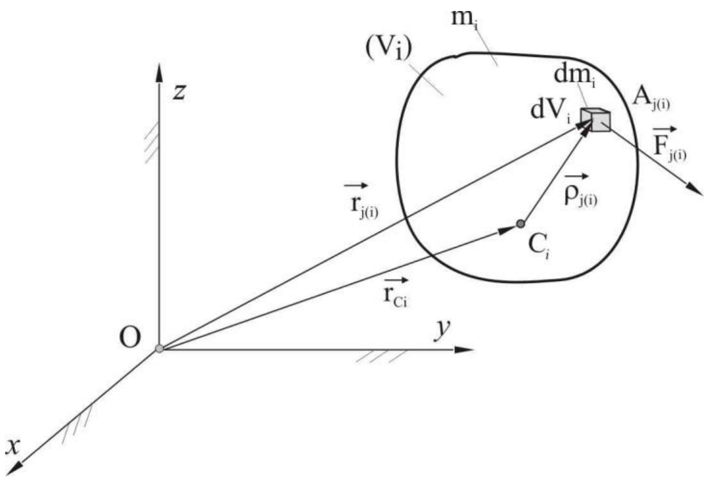
Razmotrimo sistem sila (5.221) sa napadnim tačkama (5.222), respektivno, koji deluje na segment sistema tela u obliku otvorenog kinematičkog lanca bez grananja.

Virtualni rad sile $\vec{F}_{j(i)}$ $(j = 1,2,\ldots,l_i)$ određen je izrazom ([6]):

* $inf(\alpha,\beta,\gamma) = c, sup(\alpha,\beta,\gamma) = d,$

$$\delta A(\vec{F}_{j(i)}) = \vec{F}_{j(i)} \cdot \delta \vec{r}_{j(i)}, \tag{5.323}$$

koji, s obzirom na činjenicu da $A_{j(i)} \in (V_i)$, dobija oblik (vidi sl.31)



Sl.31

$$\delta A(\vec{F}_{j(i)}) = \vec{F}_{j(i)} \cdot \left(\delta \vec{r}_{C_i} + \delta\vec{\rho}_{j(i)}\right), \tag{5.324}$$

ili

$$\delta A(\vec{F}_{j(i)}) = \vec{F}_{j(i)} \cdot \left(\sum_{\alpha=1}^{n} \vec{T}_{\alpha(i)} \delta q^{\alpha} + \sum_{\alpha=1}^{n} \vec{\Omega}_{\alpha(i)} \times \vec{\rho}_{j(i)} \right), \tag{5.325}$$

što se može dovesti na sledeću formu

$$\delta A(\vec{F}_{j(i)}) = \sum_{\alpha=1}^{n} \left(\vec{F}_{j(i)} \cdot \vec{T}_{\alpha(i)} + \vec{M}_{C_i}(\vec{F}_{j(i)}) \cdot \vec{\Omega}_{\alpha(i)} \right), \tag{5.326}$$

gde izraz

$$\vec{M}_{C_i}(\vec{F}_{j(i)}) = \vec{\rho}_{j(i)} \times \vec{F}_{j(i)}, \tag{5.327}$$

predstavlja moment sile $\vec{F}_{j(i)}$ sračunat u odnosu na centar inercije C_i segmenta (V_i). Virtualni rad razmatranog sistema sila (7.36) iznosi

$$\delta A^{a} = \sum_{j=1}^{l_i} \delta A(\vec{F}_{j(i)}) \;, \tag{5.328}$$

ili

$$\delta A^a = \sum_{\alpha=1}^{n} \left(\left(\sum_{j=1}^{l_i} \vec{F}_{j(i)} \right) \cdot \vec{T}_{\alpha(i)} + \left(\sum_{j=1}^{l_i} \vec{M}_{C_i} (\vec{F}_{j(i)}) \right) \cdot \vec{\Omega}_{\alpha(i)} \right) \delta q^\alpha . \tag{5.329}$$

Poslednji izraz može da se napiše i u obliku

$$\delta A^a = \sum_{\alpha=1}^{n} \left(\vec{F}_{R(i)} \cdot \vec{T}_{\alpha(i)} + \vec{M}^a_{C_i R(i)} \cdot \vec{\Omega}_{\alpha(i)} \right) \delta q^\alpha , \tag{5.330}$$

gde izrazi

$$\vec{M}^a_{C_i R(i)} = \sum_{j=1}^{l_i} \vec{M}_{C_i} \left(\vec{F}_{j(i)} \right), \quad \vec{F}_{R(i)} = \sum_{j=1}^{l_i} \vec{F}_{j(i)} , \tag{5.331}$$

predstavljaju glavni vektor i glavni moment sistema sila (5.221), sračunate za redukcionu tačku C_i. U slučaju otvorenog kinematičkog lanca bez grananja generalisane koordinate $(q^1, q^2, ..., q^n)$ su nezavisne i iz (5.330) sledi da generalisane sile Q^a_α sistema sila (5.221) koja odgovara nezavisnoj generalisanoj koordinati q^α $(\alpha = 1,2,...,n)$ figurišu u relaciji

$$\delta A^a = \sum_{j=1}^{n} Q^a_\alpha \delta q^\alpha \ , \tag{5.332}$$

gde je δA^a - virtualni rad svih sistema sila (5.221) koje deluju na razmatrani sistem tela, tj. virtualni rad sistema sila

$$\left(\vec{F}_{1(1)}, \vec{F}_{2(1)}, ..., \vec{F}_{l_1(1)} \right), \left(\vec{F}_{1(2)}, \vec{F}_{2(2)}, ..., \vec{F}_{l_2(2)} \right), ..., \left(\vec{F}_{1(n)}, \vec{F}_{2(n)}, ..., \vec{F}_{l_n(n)} \right). \tag{5.333}$$

Virtualni rad sistema sila (5.333) iznosi (vidi (5.330))

$$\delta A^a = \sum_{i=1}^{n} \delta A^a_i = \sum_{\alpha=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \left(\vec{F}_{R(i)} \cdot \vec{T}_{\alpha(i)} + \vec{M}^a_{C_i R(i)} \cdot \vec{\Omega}_{\alpha(i)} \right) \delta q^\alpha , \tag{5.334}$$

odakle sledi

$$Q^a_\alpha = \sum_{\alpha=1}^{n} \left(\vec{F}_{R(i)} \cdot \vec{T}_{\alpha(i)} + \vec{M}^a_{C_i R(i)} \cdot \vec{\Omega}_{\alpha(i)} \right), \ \alpha = 1,2,...,n. \tag{5.335}$$

Ako je sistem sila (5.333) potencijalan, sa potencijalnom energijom

$$E_p = E_p(q^1, q^2, ..., q^n) , \tag{5.336}$$

generalisane sile određene su poznatim izrazom ([11])

$$Q^a_\alpha = -\frac{\partial E_p}{\partial q^\alpha}, \ \ \alpha = 1,2,...,n . \tag{5.337}$$

5.8.9.1 Generalisane sile od sila teže sistema tela

Neka se sistem tela u obliku otvorenog kinematičkog lanca bez grananja kreće u polju zemljine teže. Sila teže segmenta (V_i) iznosi $\vec{G}_i$, napadna tačka joj je u centru inercije segmenta (za tehničke sisteme ubrzanje zemljine teže možemo smatrati konstantnim; otuda - težište segmenta i njegov centar inercije poklapaju se). Glavni vektor sistema kontinualno podeljenih sila zemljine teže koje deluju na segment (V_i) ima oblik

$$\vec{F}_{R(i)} = \vec{G}_i = m_i \vec{g}, \tag{5.338}$$

a glavni moment (redukciona tačka je C_i) iznosi

$$\vec{M}^{a}_{C_i R(i)} = 0. \tag{5.339}$$

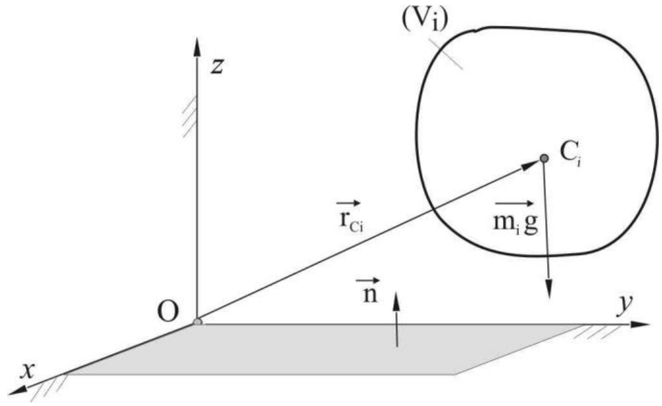
Poslednja dva izraza i izraz (8.38) dovode do generalisane sile od sila zemljine teže u obliku

$$Q^G_\alpha = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{g} \cdot \vec{T}_{\alpha(i)}. \tag{5.340}$$

Uzimajući u obzir činjenicu da je sila teže potencijalna, izraz (8.43) može da se izvede sledećim razmatranjem. Postavimo horizontalnu ravan tako da sadrži koordinatni početak O inercijalnog koordinatnog sistema Oxyz (vidi sl.32). Potencijalna energija sile zemljine teže $\vec{G} = m_i \vec{g}$ segementa (V_i) iznosi (ravan α uzeta je za nivo nultoga potencijala):

$$E^G_{p(i)} = m_i g \vec{r}_{C_i} \cdot \vec{n}, \tag{5.341}$$

gde je $\vec{n}$ vektor normale ravni usmeren vertikalno naviše. Ukupna potencijalna energija razmatranog sistema tela koja se odnosi na sile zemljine teže iznosi



Sl.32

$$E_p^G = \sum_{i=1}^{n} m_i g\, \vec{r}_{C_i} \cdot \vec{n}\,, \tag{5.342}$$

i kako je

$$g \cdot \vec{n} = -\vec{g}\,, \tag{5.343}$$

prema (5.337) sledi

$$Q_\alpha^G = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{g} \cdot \frac{\partial \vec{r}_{C_i}}{\partial q^\alpha}\,, \tag{5.344}$$

i (vidi (5.133) i dalje)

$$Q_\alpha^G = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{g} \cdot \vec{T}_{\alpha(i)}$$

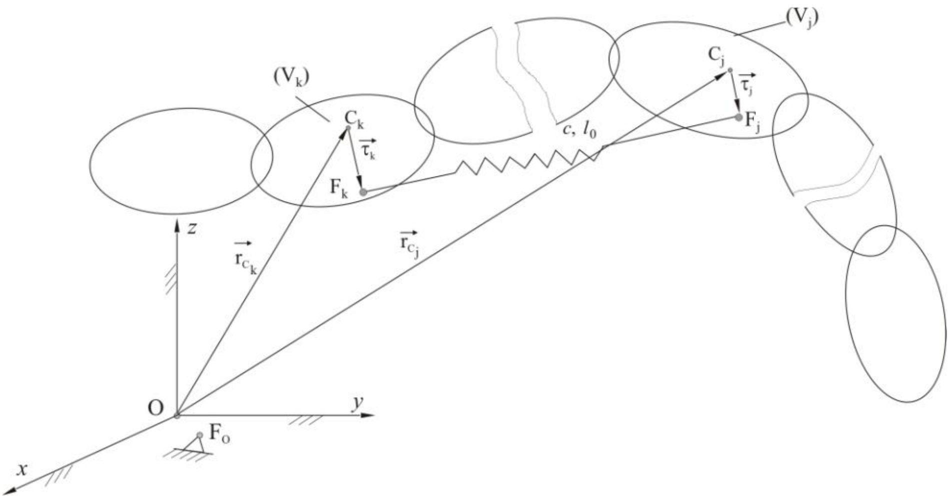
što se poklapa sa (5.340).

5.8.9.2. Generalisane sile od sila u oprugama

Za tačke $F_k \in (V_i)$ i $F_j \in (V_j)$ sistema tela u obliku otvorenog kinematičkog lanca bez grananja $((V_1),(V_2),...,(V_n))$ vezani su krajevi opruge krutosti c, čija slobodna dužina iznosi l_0 (vidi sl.33). Potencijalna energija te opruge data je izrazom

$$E_p^c = \frac{1}{2} c \left(\overline{F_k F_j} - l_0\right)^2, \tag{5.345}$$

a generalisane sile od sila u opruzi date su izrazom



sl.33

$$Q_\alpha^c = -c\left(\overline{F_kF_j} - l_0\right)\frac{\partial \overline{F_kF_j}}{\partial q^\alpha}, \quad \alpha = 1,2,\ldots,n. \tag{5.346}$$

Kako je

$$\overline{F_kF_j} = \sqrt{\overrightarrow{F_kF_j}\cdot\overrightarrow{F_kF_j}}, \tag{5.347}$$

dobija se

$$\frac{\partial\left(\overline{F_kF_j}\right)}{\partial q^\alpha} = \frac{\overrightarrow{F_kF_j}}{\overline{F_kF_j}}\cdot\frac{\partial\left(\overrightarrow{F_kF_j}\right)}{\partial q^\alpha}. \tag{5.348}$$

Uzimajući u obzir da važi (vidi sl.33)

$$\overrightarrow{F_kF_j} = \vec{r}_{C_j} + \vec{\tau}_j - \vec{r}_{C_k} - \vec{\tau}_k, \tag{5.349}$$

gde su $\vec{r}_{C_j}, \vec{r}_{C_k}$ vektori položaja centara inercije C_j, C_k segmenata (V_j) odnosno (V_j) a $\vec{\tau}_j, \vec{\tau}_k$ vektori položaja tačaka F_j, F_k u odnosu na C_j odnosno C_k izraz (5.348) dobija oblik

$$\frac{\partial\left(\overline{F_kF_j}\right)}{\partial q^\alpha} = \frac{\overrightarrow{F_kF_j}}{\overline{F_kF_j}}\cdot\left(\vec{T}_{\alpha(j)} - \vec{T}_{\alpha(k)} + \vec{\Omega}_{\alpha(j)}\times\vec{\tau}_j - \vec{\Omega}_{\alpha(k)}\times\vec{\tau}_k\right), \tag{5.350}$$

gde je

$$\overline{F_kF_j} = \left|\vec{r}_{C_j} + \vec{\tau}_j - \vec{r}_{C_k} - \vec{\tau}_k\right|. \tag{5.351}$$

Uzimajući u obzir poslednja dva izraza relacija (5.346) dobija oblik

$$\begin{aligned} Q_\alpha^c = -c\left(\left|\vec{r}_{C_j} - \vec{r}_{C_k} + \vec{\tau}_j - \vec{\tau}_k\right| - l_0\right)\frac{\vec{r}_{C_j} - \vec{r}_{C_k} + \vec{\tau}_j - \vec{\tau}_k}{\left|\vec{r}_{C_j} - \vec{r}_{C_k} + \vec{\tau}_j - \vec{\tau}_k\right|}\cdot \\ \cdot\left(\vec{T}_{\alpha(j)} - \vec{T}_{\alpha(k)} + \vec{\Omega}_{\alpha(j)}\times\vec{\tau}_j - \vec{\Omega}_{\alpha(k)}\times\vec{\tau}_k\right). \end{aligned} \tag{5.352}$$

Prema (5.346) i prema očiglednoj relaciji

$$\overline{F_kF_j} = \overline{F_kF_j}\left(q^{k+1}, q^{k+2},\ldots,q^j\right), \tag{5.353}$$

sledi

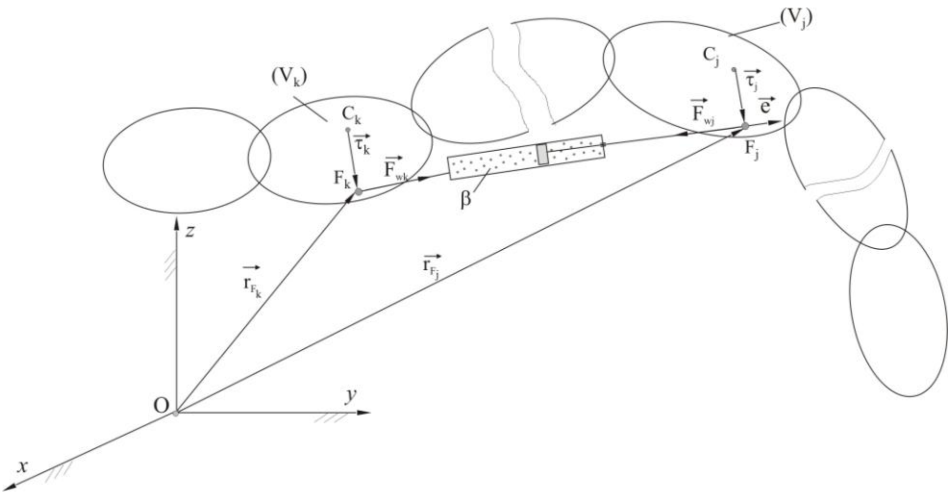
$$Q_\alpha^c = 0 \;\; \forall\alpha = 1,2,\ldots,k \wedge j+1, j+2,\ldots,n. \tag{5.354}$$

Specijalno, ako je jedan kraj opruge vezan za postolje (tački F_0) uzima se (postolje se označava indeksom $k = 0$)

$$\vec{r}_{C_0} = 0, \quad \vec{\rho}_0 = \overrightarrow{OF_0}. \tag{5.355}$$

5.8.9.3. Generalisane sile od sila viskoznog trenja

Za tačke $F_k \in (V_i)$ i $F_j \in (V_j)$ sistema tela u obliku otvorenog kinematičkog lanca bez grananja sa segmentima $(V_1),(V_2),...,(V_n)$ vezani su krajevi amortizera (vidi sl.34) napunjenog tečnošću. U toku kretanja klipa u odnosu na cilindar amortizera javlja se sila viskoznog trenja čiji je intezitet proporcionalan prvom stepenu brzine klipa u odnosu na cilindar (β - konstanta proporcionalnosti).



sl.34

Uzimajući u obzir da važi

$$\vec{F}_{wj} = -\vec{F}_{wk} = -\beta \vec{v}_{rk}, \tag{5.356}$$

gde je $\vec{F}_{wj}$ sila viskoznog trenja koja deluje na klip, $\vec{F}_{wk}$ sila viskoznog trenja koja deluje na cilindar amortizera, $\vec{v}_{rk}$ relativna brzina klipa u odnosu na amortizer, izraz za virtualni rad sila viskoznog trenja glasi

$$\delta A^w = \vec{F}_{wk} \cdot \delta \vec{r}_{F_k} + \vec{F}_{wj} \cdot \delta \vec{r}_{F_j} = \vec{F}_{wj} \cdot \delta\left(\overrightarrow{F_k F_j}\right). \tag{5.357}$$

Očigledno je (vidi sl.34)

$$\overrightarrow{F_k F_j} = \overline{F_k F_j}\, \vec{e}, \ |\vec{e}| = 1, \tag{5.358}$$

tako da se dobija relacija

$$\delta\left(\overrightarrow{F_k F_j}\right) = \vec{e}\,\delta\left(\overline{F_k F_j}\right) + \overline{F_k F_j}\,\delta \vec{e}, \tag{5.359}$$

koja sa izrazom

$$\vec{v}_{rk} = \vec{e}\,\frac{d}{dt}\left(\overline{F_k F_j}\right), \tag{5.360}$$

i izrazima (8.59) i (8.60) dovodi do relacije

$$\delta A^w = -\beta\,\frac{d}{dt}\left(\overline{F_k F_j}\right)\delta\left(\overline{F_k F_j}\right), \tag{5.361}$$

pri čemu je uzeto u obzir da važi

$$\vec{e}\cdot\delta\vec{e} = 0. \tag{5.362}$$

Pošto je

$$\frac{d}{dt}\left(\overline{F_k F_j}\right) = \sum_{\beta=1}^{n} \frac{\partial\left(\overline{F_k F_j}\right)}{\partial q^\beta}\dot{q}^\beta \ , \tag{5.363}$$

ili (vidi (5.348))

$$\frac{d}{dt}\left(\overline{F_k F_j}\right) = \sum_{\beta=1}^{n} \frac{\overrightarrow{F_k F_j}}{\overline{F_k F_j}}\cdot\frac{\partial\left(\overrightarrow{F_k F_j}\right)}{\partial q^\beta}\dot{q}^\beta \ , \tag{5.364}$$

i analogno

$$\delta\left(\overline{F_k F_j}\right) = \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\overrightarrow{F_k F_j}}{\overline{F_k F_j}}\cdot\frac{\partial\left(\overrightarrow{F_k F_j}\right)}{\partial q^\alpha}\delta q^\alpha \ , \tag{5.365}$$

izraz (5.361) dobija oblik

$$\delta A^w = -\beta\sum_{\alpha=1}^{n}\sum_{\beta=1}^{n} \frac{\overrightarrow{F_k F_j}}{\overline{F_k F_j}}\cdot\frac{\partial\left(\overrightarrow{F_k F_j}\right)}{\partial q^\beta}\dot{q}^\beta\,\frac{\overrightarrow{F_k F_j}}{\overline{F_k F_j}}\cdot\frac{\partial\left(\overrightarrow{F_k F_j}\right)}{\partial q^\alpha}\delta q^\alpha \ , \tag{5.366}$$

iz koga se dobija izraz za traženu generalisanu silu u obliku

$$Q_\alpha{}^w = -\beta\sum_{\beta=1}^{n} \frac{\overrightarrow{F_k F_j}}{\overline{F_k F_j}}\cdot\frac{\partial\left(\overrightarrow{F_k F_j}\right)}{\partial q^\beta}\frac{\overrightarrow{F_k F_j}}{\overline{F_k F_j}}\cdot\frac{\partial\left(\overrightarrow{F_k F_j}\right)}{\partial q^\alpha}\dot{q}^\beta, \tag{5.367}$$

ili (vidi (5.349) i (5.350))

$$Q_\alpha^w = -\beta\sum_{\beta=1}^{n} \frac{\vec{r}_{C_j} - \vec{r}_{C_k} + \vec{\tau}_j - \vec{\tau}_k}{\left|\vec{r}_{C_j} - \vec{r}_{C_k} + \vec{\tau}_j - \vec{\tau}_k\right|^2}\cdot\left(\vec{T}_{\beta(j)} - \vec{T}_{\beta(k)} + \vec{\Omega}_{\beta(j)}\times\vec{\tau}_j - \vec{\Omega}_{\beta(k)}\times\vec{\tau}_k\right) *$$
$$* \left(\vec{r}_{C_j} - \vec{r}_{C_k} + \vec{\tau}_j - \vec{\tau}_k\right)\cdot\left(\vec{T}_{\alpha(j)} - \vec{T}_{\alpha(k)} + \vec{\Omega}_{\alpha(j)}\times\vec{\tau}_j - \vec{\Omega}_{\alpha(k)}\times\vec{\tau}_k\right)\dot{q}^\beta \ ,$$

(5.368)

5.8.9.4. Generalisane sile od sistema pogonskih sila (robotski sistem)

Relativno kretanje proizvoljnog segmenta (V_i) u odnosu na segment (V_{i-1}) ostvaruje se pomoću pogonskih motora. Motor koji ostvaruje kretanje segmenta (V_i) u odnosu na (V_{i-1}) (vidi sl.35) deluje na (V_i) pogonskom silom $\vec{P}_i$ (u slučaju $\xi_i = 1$), odnosno spregom $\vec{\mathfrak{M}}_i$ pogonskih sila čiji je moment $\vec{M}_i$, (u slučaju $\bar{\xi}_i = 1$). Takođe, motor deluje na segment (V_{i-1}) pogonskom silom $\vec{P}_i'$ odnosno spregom $\vec{\mathfrak{M}}_i'$ pogonskih sila čiji je moment $\vec{M}_i'$. Uzmimo da su za pogonske sile $\vec{P}_i$ i $\vec{P}_i'$ napadne tačke $O_i' \in (V_i)$ i $O_i \in (V_{i-1})$ respektivno. Osim toga važi relacija

$$\vec{P}_i' = -\vec{P}_i,\ \vec{M}_i' = -\vec{M}_i,\ i = 1, 2, ..., n. \tag{5.369}$$

Virtualni rad sprega sila $\vec{\mathfrak{M}}_i$, koji deluje na kruto telo (V_i) čiji moment je $\vec{M}_i$ izračunavamo kao virtualni rad sistema sila $(\vec{F}_{i1}, \vec{F}_{i2})$ čije su napadne tačke $A_i \in (V_i)$ i $B_i \in (V_i)$ respektivno, pri čemu važi

$$\vec{F}_{2i} = -\vec{F}_{1i},\ \vec{M}_i = \vec{M}_{A_i}(\vec{F}_{2i}) = \vec{M}_{B_i}(\vec{F}_{1i}). \tag{5.370}$$

Pod gornjim uslovom, kao što je poznato, biće

$$\vec{\mathfrak{M}}_i \sim (\vec{F}_{1i}; \vec{F}_{2i}). \tag{5.371}$$

Kao što je rečeno, važi

$$\delta A(\vec{\mathfrak{M}}_i) = \delta A(\vec{F}_{1i}) + \delta A(\vec{F}_{2i}), \tag{5.372}$$

ili

$$\delta A(\vec{\mathfrak{M}}_i) = \vec{F}_{1i} \cdot \delta \vec{r}_{A_i} + \vec{F}_{2i} \cdot \delta \vec{r}_{B_i}, \tag{5.373}$$

gde su $\vec{r}_{A_i}$ i $\vec{r}_{B_i}$ vektori položaja tačaka A_i i B_i respektivno, u odnosu na koordinatni početak O inercijalnog koordinatnog sistema $Oxyz$. Poslednja relacija prema (5.370) dobija oblik

$$\delta A(\vec{\mathfrak{M}}_i) = \vec{F}_{1i} \cdot \delta(\vec{r}_{A_i} - \vec{r}_{B_i}), \tag{5.374}$$

ili, kako je

$$\delta(\vec{r}_{A_i} - \vec{r}_{B_i}) = \delta(\overrightarrow{B_i A_i}), \tag{5.375}$$

oblik

$$\delta A(\vec{\mathfrak{M}}_i) = \vec{F}_{1i} \cdot \delta(\overrightarrow{B_i A_i}), \tag{5.376}$$

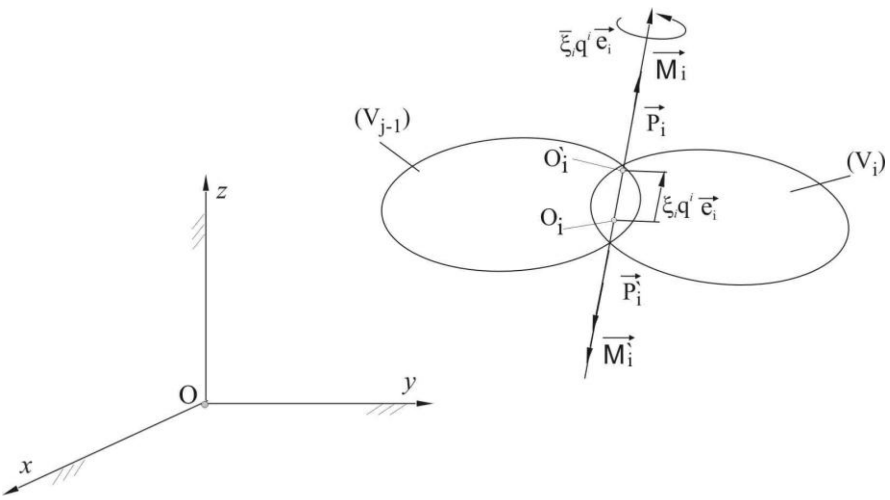
ili

$$\delta A(\vec{\mathfrak{M}}_{\mathrm{i}}) = \sum_{\alpha=1}^{n} \vec{F}_{1i} \cdot (\Omega_{\alpha(i)} \times \overrightarrow{B_i A_i}) \delta q^{\alpha} , \tag{5.377}$$

što dovodi do rezultata

$$\delta A(\vec{\mathfrak{M}}_{\mathrm{i}}) = \sum_{\alpha=1}^{n} \vec{M}_i \cdot \vec{\Omega}_{\alpha(i)} \delta q^{\alpha} . \tag{5.378}$$

Vratimo se nadalje određivanju virutalnog rada sistema pogonskih sila koje deluju na sistem tela u obliku otvorenog kinematičkog lanca bez grananja. Očigledno je



sl.35

$$\delta A^{p} = \sum_{i=1}^{n} \delta A\left(\vec{M}_i\right) + \delta A\left(\vec{M}'_i\right) + \delta A\left(\vec{P}_i\right) + \delta A\left(\vec{P}'_i\right), \tag{5.379}$$

što prema (5.378) i (5.323) dovodi do

$$\delta A^{p} = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{\alpha=1}^{n} \left(\vec{M}_i \cdot \vec{\Omega}_{\alpha(i)} + \vec{M}'_i \cdot \vec{\Omega}_{\alpha(i-1)} \right) \right) \delta q^{\alpha} + \sum_{i=1}^{n} \left(\vec{P}_i \cdot \delta \vec{r}_{O'_i} + \vec{P}'_i \cdot \delta \vec{r}_{O_i} \right), \tag{5.380}$$

što se može napisati i u obliku

$$\delta A^{p} = \sum_{\alpha=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \vec{M}_i \cdot \left(\vec{\Omega}_{\alpha(i)} - \vec{\Omega}_{\alpha(i-1)} \right) \delta q^{\alpha} + \sum_{\alpha=1}^{n} \vec{P}_{\alpha} \cdot \delta\left(\vec{r}_{O'_{\alpha}} - \vec{r}_{O_{\alpha}} \right). \tag{5.381}$$

Kako je

$$\delta\left(\vec{r}_{O'\alpha} - \vec{r}_{O\alpha} \right) = \delta\left(\xi_{\alpha} \vec{e}_{\alpha} q^{\alpha} \right), \tag{5.382}$$

i

$$\vec{P}_\alpha \cdot \delta\left(\vec{r}_{O'\alpha} - \vec{r}_{O\alpha}\right) = \vec{P}_\alpha \cdot \vec{e}_\alpha \xi_\alpha \delta q^\alpha , \tag{5.383}$$

jer je

$$\vec{P}_\alpha \cdot \delta\vec{e}_\alpha = 0 , \tag{5.384}$$

sledi da (5.381) ima i sledeću formu

$$\delta A^p = \sum_{\alpha=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} \vec{M}_i \cdot \left(\vec{\Omega}_{\alpha(i)} - \vec{\Omega}_{\alpha(i-1)} \right) + \xi_\alpha \vec{P}_\alpha \cdot \vec{e}_\alpha \right) \delta q^\alpha , \tag{5.385}$$

iz koje se dobija tražena generalisana sila u obliku

$$Q_\alpha^p = \sum_{i=1}^{n} \vec{M}_i \cdot \left(\vec{\Omega}_{\alpha(i)} - \vec{\Omega}_{\alpha(i-1)} \right) + \xi_\alpha \vec{P}_\alpha \cdot \vec{e}_\alpha . \tag{5.386}$$

Poznato je da važe relacije

$$\begin{aligned} &\vec{\Omega}_{\alpha(i)} = 0 \quad \forall\ \alpha < i, \\ &\vec{\Omega}_{\alpha(i)} = \bar{\xi}_\alpha \vec{e}_\alpha \quad \forall\ \alpha \geq i, \end{aligned} \tag{5.387}$$

koje izraz (5.386), uzimajući u obzir da je $\vec{\Omega}_{\alpha(i)} \equiv 0,$ dovode na oblik

$$Q_\alpha^p = \left(\bar{\xi}_\alpha \vec{M}_\alpha + \vec{P}_\alpha \xi_\alpha \right) \cdot \vec{e}_\alpha , \;\; \alpha = 1, 2, ..., n. \tag{5.388}$$

Primetimo da se do poslednje relacije dolazi direktno ako se sračuna virtualni rad sistema pogonskih sila koji deluje na RS pod uslovom da je virtualno pomeranje RS određeno na sledeći način:

$$\delta q^1 = \delta q^2 = ... = \delta q^{\alpha-1}, \delta q^\alpha \neq 0, \delta q^{\alpha+1} = \delta q^{\alpha+2} = ... = \delta q^n = 0. \tag{5.389}$$

5.8.10. Kontravarijantni oblik diferencijalnih jednačina kretanja osnovnog sistema tela

Pokazano je da koordinate osnovnog metričkog tenzora (vidi (5.292) i dalje) predstavljaju koeficijente pozitivno definitne kvadratne forme. Iz tog razloga je uvek ispunjena relacija

$$\det\left[a_{\alpha\beta} \right] \neq 0 , \tag{5.390}$$

što omogućuje da se pronađe inverzna matrica matrice $[a_{\alpha\beta}]$, tj. matrica

$$\left[a^{\alpha\beta} \right] = \left[a_{\alpha\beta} \right]^{-1}, \; \left[a^{\alpha\beta} \right] \in R^{n\times n} . \tag{5.391}$$

Očigledno je sada da važi

$$\sum_{\gamma=1}^{n} a^{\gamma\delta} a_{\alpha\gamma} = \delta_{\gamma}^{\delta}, \tag{5.392}$$

gde je δ_{γ}^{δ} - Kronekerov delta simbol $(\delta_{\gamma}^{\delta} = 1 \ \forall \ \delta = \gamma, \ \delta_{\gamma}^{\delta} = 0 \ \forall \ \delta \neq \gamma)$. Diferencijalne jednačine kretanja (RS) u kovarijantnom obliku (vidi (5.304) i (5.305)):

$$\sum_{\alpha=1}^{n} a_{\alpha\gamma} \ddot{q}^{\alpha} + \sum_{\alpha=1}^{n}\sum_{\beta=1}^{n} \Gamma_{\alpha\beta,\gamma} \dot{q}^{\alpha} \dot{q}^{\beta} = Q_{\gamma}, \ \gamma = 1,2,...,n, \tag{5.393}$$

dovode do sledeće relacije

$$\sum_{\gamma=1}^{n} a^{\gamma\delta} \left(\sum_{\alpha=1}^{n} a_{\alpha\gamma} \ddot{q}^{\alpha} + \sum_{\alpha=1}^{n}\sum_{\beta=1}^{n} \Gamma_{\alpha\beta,\gamma} \dot{q}^{\alpha} \dot{q}^{\beta} \right) = \sum_{\gamma=1}^{n} a^{\gamma\delta} Q_{\gamma}, \ \gamma, \delta = 1,2,...,n, \tag{5.394}$$

ili

$$\sum_{\alpha=1}^{n} \left(\sum_{\gamma=1}^{n} a^{\gamma\delta} a_{\alpha\gamma} \right) \ddot{q}^{\alpha} + \sum_{\alpha=1}^{n}\sum_{\beta=1}^{n} \left(\sum_{\gamma=1}^{n} a^{\gamma\delta} \Gamma_{\alpha\beta,\gamma} \right) \dot{q}^{\alpha} \dot{q}^{\beta} = Q^{\delta}, \tag{5.395}$$

gde je

$$Q^{\delta} = \sum_{\gamma=1}^{n} a^{\gamma\delta} Q_{\gamma}. \tag{5.396}$$

Prema (5.392) izraz (5.395) dobija oblik

$$\ddot{q}^{\delta} + \sum_{\alpha=1}^{n}\sum_{\beta=1}^{n} \Gamma_{\alpha\beta}^{\delta} \dot{q}^{\alpha} \dot{q}^{\beta} = Q^{\delta}, \tag{5.397}$$

gde veličine na levoj strani donje jednakosti

$$\Gamma_{\alpha\beta}^{\delta} = \sum_{\gamma=1}^{n} a^{\gamma\delta} \Gamma_{\alpha\beta,\gamma}, \tag{5.398}$$

predstavljaju Kristofelove simbole druge vrste. Jednačine (8.100) nazivaju se diferencijalnim jednačinama u kontravarijantnom obliku a veličine $a^{\alpha\beta}$ (vidi (8.94)) nazivaju se *kontravarijantnim koordinatama* osnovnog metričkog tenzora. Takođe, Q^{δ} predstavljaju *kontravirijantne koordinate generalisane sile.*

5.8.11. Princip idealnosti veza sistema tela

Ako u sistemu krutih tela u obliku otvorenog kinematičkog lanca bez grananja izdvojimo telo (segment) (V_i), sistem reakcija veza (5.223) koji deluje na (V_i), sa napadnim tačkama (5.224) ima za glavni vektor i glavni moment sračunat za centar inercije C_i segmenta (V_i), veličine $\vec{R}_{R(i)}$ i $\vec{M}^{r}_{C_iR(i)}$, respektivno. Pretpostavimo da su veze između segmenata idealne. Princip idealnosti veza (bez obzira da li je u pitanju otvoreni kinematički lanac ili neki drugi model sistema tela) ima poznati oblik

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{m_i}\vec{R}_{k(i)}\cdot\delta\vec{r}_{k(i)}\right)=0\,, \tag{5.399}$$

gde je $\vec{r}_{k(i)}=\overrightarrow{OB}_{k(i)}$ vektor položaja napadne tačke $B_{k(i)}\in(V_i)$ reakcije veze $\vec{R}_{k(i)}$ u odnosu na koordinatni početak inercijalnog koordinatnog sistema $Oxyz$. Ponavljajući razmatranje dato izrazima (5.323) - (5.326) dolazi se do relacije

$$\vec{R}_{k(i)}\cdot\delta\vec{r}_{k(i)}=\sum_{\alpha=1}^{n}\left(\vec{R}_{k(i)}\cdot\vec{T}_{\alpha(i)}+\vec{M}_{C_i}\left(\vec{R}_{k(i)}\right)\cdot\vec{\Omega}_{\alpha(i)}\right)\delta q^{\alpha}=0\,. \tag{5.400}$$

Takođe, analogno razmatranju datim izrazima (5.326) - (5.328) dobija se (5.399) u obliku

$$\sum_{i=1}^{n}\left[\sum_{\alpha=1}^{n}\left(\vec{R}_{R(i)}\cdot\vec{T}_{\alpha(i)}+\vec{M}^{r}_{C_iR(i)}\cdot\vec{\Omega}_{\alpha(i)}\right)\right]\delta q^{\alpha}=0\,, \tag{5.401}$$

odnosno

$$\sum_{\alpha=1}^{n}\left[\sum_{i=1}^{n}\left(\vec{R}_{R(i)}\cdot\vec{T}_{\alpha(i)}+\vec{M}^{r}_{C_iR(i)}\cdot\vec{\Omega}_{\alpha(i)}\right)\right]\delta q^{\alpha}=0\,, \tag{5.402}$$

gde su glavni vektor i glavni moment sistema reakcija veza (5.223) sračunat u odnosu na centar inercije segment (V_i), određeni izrazima

$$\begin{aligned}\vec{R}_{R(i)}&=\sum_{k=1}^{m_i}\vec{R}_{k(i)},\\ \vec{M}^{r}_{C_iR(i)}&=\sum_{k=1}^{m_i}\vec{M}_{C_i}\left(\vec{R}_{k(i)}\right).\end{aligned} \tag{5.403}$$

U slučaju RS u obliku otovrenog kinematičkog lanca bez grananja, sistem generalisanih koordinata $(q^1,q^2,...,q^n)$ je nezavisan. Pošto važi (vidi (5.399))

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m_i}\vec{R}_{(i)k}\cdot\delta\vec{r}_{(i)k}=\sum_{\alpha=1}^{n}Q^{r}_{\alpha}\cdot\delta q^{\alpha}=0\,, \tag{5.404}$$

gde je Q^{r}_{α} generalisana sila od sistema reakcija veza

$$\left(\left(\vec{R}_{1(1)}, \vec{R}_{2(1)}, ..., \vec{R}_{m_1(1)}\right), \left(\vec{R}_{1(1)}, \vec{R}_{2(1)}, ..., \vec{R}_{m_2(1)}\right), ..., \left(\vec{R}_{1(1)}, \vec{R}_{2(1)}, ..., \vec{R}_{m_n(1)}\right)\right), \tag{5.405}$$

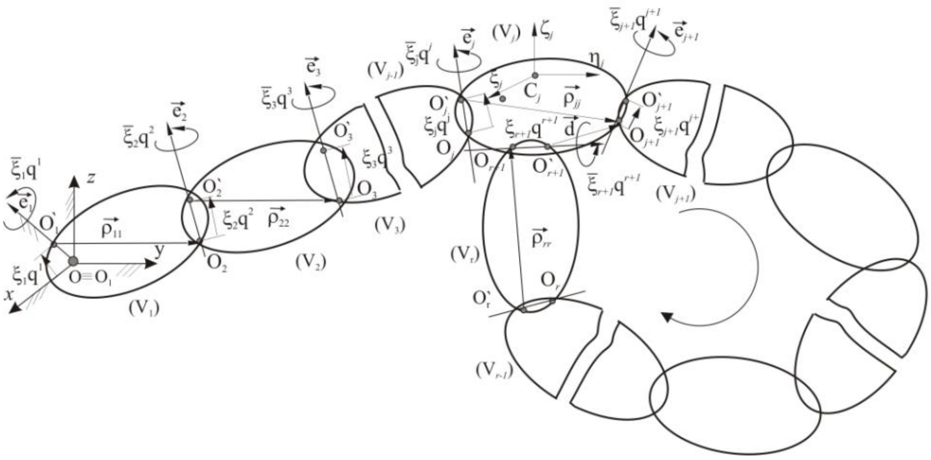
upoređivanjem (5.404) i (5.402) i uzimanjem u obzir da su varijacije koordinata $(q^1, q^2, ..., q^n)$ nezavisne, dobijamo

$$Q_\alpha^r = \sum_{i=1}^{n} \left(\vec{R}_{R(i)} \cdot \vec{T}_{\alpha(i)} + \vec{M}^r_{C_i R(i)} \cdot \vec{\Omega}_{\alpha(i)}\right) = 0, \ \alpha = 1,2,...,n. \tag{5.406}$$

Poslednja relacija predstavlja princip idealnosti veza (RS) u obliku otvorenog kinematičkog lanca (sl.35).

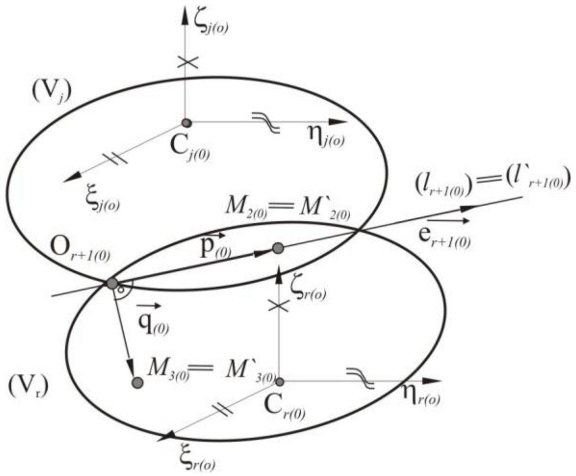
5.8.12. Zatvoreni kinematički lanac

Razmotrimo zatvoreni kinematički lanac (sl.36) sa r krutih segmenata, [12]-[17]. Relativno kretanje segmenta (V_α) u odnosu na segment $(V_{\alpha-1})$ određeno je koordinatom q^α čija je pozitivna orijentacija definisana vektorom $\vec{e}_\alpha$. Izuzetak od ovog pravila u redosledu odnosi se na segment (V_j) - taj segment vrši relativno kretanje i u odnosu na segment (V_r). Osa u odnosu na koju segment (V_j) vrši translatorno (obrtno) kretanje u odnosu na (V_r) orijentisana je vektorom $\vec{e}_{r+1}$. Deo mehaničkog sistema koji se nalazi povezan u zatvoreni kinematički lanac orijentisan je kružnom strelicom (vidi sl.36) koja označava u odnosu na koje kruto telo posmatrano telo vrši relativno kretanje: U tom delu mehaničkog sistema prenosno kretanje vrši prvo telo na koje se nailazi pri kretanju od posmatranog tela u smeru suprotnom od smera pomenute kružne strelice.



Sl.36

Neka se posmatrani kinematički lanac nalazi u referentnoj konfiguraciji. Uočimo na telu (V_r) tri tačke M_1, M_2 i M_3 a na telu (V_j) takođe tri tačke M_1', M_2' i M_3', pri čemu važi (oznaka (0) odnosi se na referentnu konfiguraciju) $M_{\alpha(0)} = M'_{\alpha(0)}$, $\alpha = 1,2,3$, i osim toga (vidi sl.37)



Sl.37

$$M_{1(0)} = O_{r+1(0)},$$
$$M_{1(0)},\ M_{2(0)} \in \left(l_{r+1}\right)_{(0)}, \tag{5.407}$$
$$M'_{1(0)},\ M'_{2(0)} \in \left(l'_{r+1}\right)_{(0)},$$

gde je (l_{r+1}) osa zgloba koji povezuje (V_j) i (V_r), pri čemu je očigledno da važi

$$\left(l_{r+1}\right)_{(0)} \equiv \left(l'_{r+1}\right)_{(0)}. \tag{5.408}$$

Neka, osim toga, važi i

$$\overrightarrow{M_{1(0)}M_{3(0)}} \perp \overrightarrow{M_{1(0)}M_{2(0)}}. \tag{5.409}$$

Za „otvoren” lanac (konfiguracija u odsustvu zgloba $r+1$) uvodimo vektore

$$\overrightarrow{M_1M_2} = \vec{p}, \quad \overrightarrow{M_1'M'_2} = \vec{p}',$$
$$\overrightarrow{M_1M_3} = \vec{q}, \quad \overrightarrow{M_1'M'_3} = \vec{q}', \tag{5.410}$$

pri čemu je

$$|\vec{p}| = |\vec{q}| = |\vec{p}'| = |\vec{q}'| = 1, \quad \vec{p} = \vec{e}_{r+1}. \tag{5.411}$$

U toj konfiguraciji biće očigledno ispunjeni uslovi (u prvoj fazi razmatranja pretpostavićemo da segmenti (V_j) i (V_r) mogu da zauzmu položaj kao da zgloba $r+1$ nema, pa se, u drugoj fazi, postavljaju uslovi kojima praktično ponovo “zatvaramo” lanac – ovi uslovi biće iskazani jednačinama veza):

$$\vec{p} \perp \vec{q}, \quad \vec{p}\,' \perp \vec{q}\,' \tag{5.412}$$

Takođe važi $\left(\vec{r}_\alpha' = \overrightarrow{OM_\alpha'},\ \vec{r}_\alpha = \overrightarrow{OM_\alpha},\quad \alpha = 1,2,3 \right)$:

$$\vec{r}_\alpha' = \vec{r}_\alpha'(q^1,...,q^j),\ \alpha = 1,2,3, \tag{5.413}$$

$$\vec{r}_\alpha = \vec{r}_\alpha(q^1,...,q^r),\ \alpha = 1,2,3. \tag{5.414}$$

5.8.12.1. Slučaj kada segmente (V_r) i (V_j) povezuje prizmatični zglob

Razmotrimo slučaj kada segmente (V_r) i (V_j) povezuje prizmatični zglob. Iz uslova koje nameće pravolinijsko translatorno kretanje segmenta (V_j) u odnosu na segment (V_r) (dakle, lanac se ponovo “zatvara”)

$$\vec{r}_\alpha + \vec{e}_{r+1} q^{r+1} = \vec{r}_\alpha',\ \alpha = 1,2,3, \tag{5.415}$$

sledi

$$\vec{r}_2 - \vec{r}_1 = \vec{r}_2' - \vec{r}_1' \Rightarrow \vec{p} = \vec{p}\,', \tag{5.416}$$

$$\vec{r}_3 - \vec{r}_1 = \vec{r}_3' - \vec{r}_1' \Rightarrow \vec{q} = \vec{q}\,'. \tag{5.417}$$

Imajući u vidu da je

$$\vec{r}_1 = \vec{r}_1' + \vec{d} + \sum_{k=j+1}^{r} \vec{\rho}_{kk} + \xi_k \vec{e}_k q^k, \tag{5.418}$$

ili, prema prvoj relaciji u (5.415),

$$\vec{d} + \vec{e}_{r+1} q^{r+1} + \sum_{k=j+1}^{r} \vec{\rho}_{kk} + \xi_k \vec{e}_k q^k = 0, \tag{5.419}$$

umesto (5.415) moguće je napisati sledeći skup relacija

$$\begin{aligned} &\vec{p} = \vec{p}\,', \\ &\vec{q} = \vec{q}\,', \\ &\sum_{k=j+1}^{r} \vec{\rho}_{kk} + \xi_k \vec{e}_k q^k + \vec{d} + \vec{e}_{r+1} q^{r+1} = 0, \end{aligned} \tag{5.420}$$

koje predstavljaju jednačine veza (uslova zatvaranja kinematičkog lanca) u vektorskom obliku. Prve dve relacije u (5.420) povlače za sobom i ovu očiglednu posledicu

$$\vec{r} = \vec{r}\,', \tag{5.421}$$

gde je

$$\vec{r} = \vec{p} \times \vec{q},\ \vec{r}' = \vec{p}' \times \vec{q}'\ . \tag{5.422}$$

Relacije (5.420) daju 9 skalarnih jednačina koje ne predstavljaju skup nezavisnih jednačina. Iz prve relacije (5.420) sledi

$$\left[A_{j,r}\right]\left\{\vec{p}^{(r)}\right\} = \left\{\vec{p}'^{(j)}\right\}, \tag{5.423}$$

odakle, uzimajući u obzir da važi

$$\left\{\vec{p}^{(r)}\right\} = \left\{\vec{p}'^{(j)}\right\} = \left\{\vec{p}_{(0)}\right\}, \tag{5.424}$$

dobijamo

$$\left[A_{j,r}\right]\left\{\vec{p}_{(0)}\right\} = \left\{\vec{p}_{(0)}\right\}. \tag{5.425}$$

Potpuno analogno, iz druge jednačine u (5.420) i (5.421) sledi, respektivno,

$$\begin{aligned} \left[A_{j,r}\right]\left\{\vec{q}_{(0)}\right\} &= \left\{\vec{q}_{(0)}\right\}, \\ \left[A_{j,r}\right]\left\{\vec{r}_{(0)}\right\} &= \left\{\vec{r}_{(0)}\right\}. \end{aligned} \tag{5.426}$$

Prema (5.411) sledi

$$\left\{\vec{p}_{(0)}\right\} = \left\{\vec{e}_{r+1}^{\,(r+1)}\right\}, \tag{5.427}$$

a iz (5.425):

$$\begin{aligned} \left(\vec{p}_{(0)}\right)\left[A_{j,r}\right]\left\{\vec{p}_{(0)}\right\} &= 1, \\ \left(\vec{q}_{(0)}\right)\left[A_{j,r}\right]\left\{\vec{p}_{(0)}\right\} &= 0, \\ \left(\vec{r}_{(0)}\right)\left[A_{j,r}\right]\left\{\vec{p}_{(0)}\right\} &= 0, \end{aligned} \tag{5.428}$$

gde je (vidi (5.422))

$$\vec{r}_{(0)} = \vec{p}_{(0)} \times \vec{q}_{(0)}\,. \tag{5.429}$$

Na potpumo analogan način iz (5.426) dobijamo i

$$\begin{aligned} \left(\vec{p}_{(0)}\right)\left[A_{j,r}\right]\left\{\vec{q}_{(0)}\right\} &= 1, \\ \left(\vec{q}_{(0)}\right)\left[A_{j,r}\right]\left\{\vec{q}_{(0)}\right\} &= 0, \\ \left(\vec{r}_{(0)}\right)\left[A_{j,r}\right]\left\{\vec{q}_{(0)}\right\} &= 0, \end{aligned} \tag{5.430}$$

i

$$\begin{aligned} \left(\vec{p}_{(0)}\right)\left[A_{j,r}\right]\left\{\vec{r}_{(0)}\right\} &= 1, \\ \left(\vec{q}_{(0)}\right)\left[A_{j,r}\right]\left\{\vec{r}_{(0)}\right\} &= 0, \\ \left(\vec{r}_{(0)}\right)\left[A_{j,r}\right]\left\{\vec{r}_{(0)}\right\} &= 0, \end{aligned} \tag{5.431}$$

Izrazi (5.428), (5.430) i (5.431) mogu da se napišu i u obliku

$$\begin{bmatrix} (\vec{p}_{(0)}) \\ (\vec{q}_{(0)}) \\ (\vec{r}_{(0)}) \end{bmatrix} \left[A_{j,r} \right] \left[\{\vec{p}_{(0)}\} \vdots \{\vec{q}_{(0)}\} \vdots \{\vec{r}_{(0)}\} \right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \tag{5.432}$$

ili

$$[\gamma]\left[A_{j,r}\right][\gamma]^T = [I], \tag{5.433}$$

gde je

$$[\gamma] = \begin{bmatrix} (\vec{p}_{(0)}) \\ (\vec{q}_{(0)}) \\ (\vec{r}_{(0)}) \end{bmatrix}, \quad [\gamma]^T = [\gamma]^{-1}, \; [I] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{5.434}$$

Iz (5.433) neposredno sledi

$$\left[A_{j,r}\right] = [I] \Rightarrow \left[\alpha_{\alpha\beta}^{j,r}\right] = [I], \tag{5.435}$$

ili

$$\alpha_{\alpha\beta}^{j,r}(q^{j+1}, q^{j+2}, ..., q^r) = \delta_{\alpha\beta}, \; \alpha, \beta = 1,2,3, \tag{5.436}$$

gde su $\alpha_{\alpha\beta}^{j,r}$ $(\alpha, \beta = 1,2,3)$ - elementi matrice $[A_{j,r}]$, a $\delta_{\alpha\beta}$ - Kronekerovi simboli za koje važi: $\delta_{\alpha\beta} = 1 \; \forall \alpha = \beta$; $\delta_{\alpha\beta} = 0 \; \forall \alpha \neq \beta$. Prema osobini matrice ortogonalnih transformacija sledi

$$\begin{gathered} \sum_{\beta=1}^{3} (\alpha_{\beta\alpha}^{j,r})^2 \equiv 1, \quad \alpha = 1,2,3, \\ \sum_{\beta=1}^{3} \alpha_{\beta 1}^{j,r} \alpha_{\beta 2}^{j,r} \equiv 0, \; \sum_{\beta=1}^{3} \alpha_{\beta 1}^{j,r} \alpha_{\beta 3}^{j,r} \equiv 0, \; \sum_{\beta=1}^{3} \alpha_{\beta 2}^{j,r} \alpha_{\beta 3}^{j,r} \equiv 0, \end{gathered} \tag{5.437}$$

odakle se zaključuje da je iz (5.436) moguće dobiti najviše tri nezavisne jednačine veza.

Drugi skup jednačina veza dobijamo iz poslednjeg izraza u (5.420), nakon eliminacije koordinate q^{r+1}:

$$\begin{gathered} (\vec{q}_{(0)}) \sum_{k=j+1}^{r} \left[A_{j,r}\right] \{\vec{\rho}_{kk} + \xi_k q^k \vec{e}_k\} + (\vec{q}_{(0)})\{\vec{d}\} = 0, \\ (\vec{r}_{(0)}) \sum_{k=j+1}^{r} \left[A_{j,r}\right] \{\vec{\rho}_{kk} + \xi_k q^k \vec{e}_k\} + (\vec{r}_{(0)})\{\vec{d}\} = 0. \end{gathered} \tag{5.438}$$

Nezavisne veze nalaze se, dakle, u relacijama (5.436) i (5.438) i ima ih *najviše pet.*

Kinematički oblik jednačina veza dobićemo diferenciranjem po vremenu izraza (11.14). Iz prve dve relacije u (11.14) na taj način dobijamo

$$\begin{aligned} &\vec{\omega}_r \times \vec{p} = \vec{\omega}_j \times \vec{p}', \\ &\vec{\omega}_r \times \vec{q} = \vec{\omega}_j \times \vec{q}' \end{aligned} \qquad (5.439)$$

ili

$$\begin{aligned} &(\vec{\omega}_r - \vec{\omega}_j) \times \vec{p} = 0, \\ &(\vec{\omega}_r - \vec{\omega}_j) \times \vec{q} = 0. \end{aligned} \qquad (5.440)$$

Poslednje relacije dovode do očiglednog rezultata (koji se dobija direktno kada se uzme u obzir da segmente (V_r) i (V_j) povezuje prizmatični zglob):

$$(\vec{\omega}_r - \vec{\omega}_j) = 0, \qquad (5.441)$$

ili

$$\sum_{k=j+1}^{r} \vec{e}_k \dot{q}^k = 0, \qquad (5.442)$$

što se može napisati u matričnoj obliku

$$\sum_{k=j+1}^{r} \left[A_{j,k}\right]\left\{\vec{e}_k^{(k)}\right\}\dot{q}^k = 0, \qquad (5.443)$$

ili

$$\begin{aligned} &\sum_{k=j+1}^{r} (\alpha_{11}^{j,k} e_{k1} + \alpha_{12}^{j,k} e_{k2} + \alpha_{13}^{j,k} e_{k3})\dot{q}^k = 0, \\ &\sum_{k=j+1}^{r} (\alpha_{21}^{j,k} e_{k1} + \alpha_{22}^{j,k} e_{k2} + \alpha_{23}^{j,k} e_{k3})\dot{q}^k = 0, \\ &\sum_{k=j+1}^{r} (\alpha_{31}^{j,k} e_{k1} + \alpha_{32}^{j,k} e_{k2} + \alpha_{33}^{j,k} e_{k3})\dot{q}^k = 0, \end{aligned} \qquad (5.444)$$

gde je $\alpha_{\alpha\beta}^{j,k}$ - element matrice $[A_{j,k}]$, $e_{k\alpha}$ - element matrice $\{\vec{e}_k^{(k)}\}$, $\alpha, \beta = 1,2,3.$ Očigledno je da su jednačine veza (11.38) nezavisne ako je

$$rank\left[\left\{\vec{e}_{j+1}^{(j)}\right\} \vdots \left\{\vec{e}_{j+2}^{(j)}\right\} \vdots \cdots \vdots \left\{\vec{e}_r^{(j)}\right\}\right] = 3, \qquad (5.445)$$

a to će biti ispunjeno ako su tri bilo koja vektora $\vec{e}_k$ $(k = j+1,..r)$ nekomplanarna.

Diferenciranjem po vremenu poslednjeg izraza u (5.420) dobijamo

$$\sum_{\alpha=j+1}^{r}\left[\bar{\xi}_{\alpha}\vec{e}_{\alpha}\times(\sum_{k=\alpha}^{r}\vec{\rho}_{kk}+\xi_{k}\vec{e}_{k}q^{k})+\xi_{\alpha}\vec{e}_{\alpha}\right]\dot{q}^{\alpha}+\vec{e}_{r+1}\dot{q}^{r+1}=0, \qquad (5.446)$$

što se, uvodeći vektore

$$\vec{\Im}_{\alpha(r)}=\bar{\xi}_{\alpha}\vec{e}_{\alpha}\times(\sum_{k=\alpha}^{r}\vec{\rho}_{kk}+\xi_{k}\vec{e}_{k}q^{k})+\xi_{\alpha}\vec{e}_{\alpha}, \qquad (5.447)$$

može napisati u obliku

$$\sum_{\alpha=j+1}^{r}\vec{\Im}_{\alpha(r)}\dot{q}^{\alpha}+\vec{e}_{r+1}\dot{q}^{r+1}=0. \qquad (5.448)$$

Eliminacijom brzine $\dot{q}^{r+1}$ iz (5.448) dobijamo dve skalarne jednačine

$$\begin{aligned}&\left(\vec{q}_{(0)}\right)\sum_{\alpha=j+1}^{r}\left\{\vec{\Im}_{\alpha(r)}^{(j)}\right\}\dot{q}^{\alpha}=0,\\&\left(\vec{r}_{(0)}\right)\sum_{\alpha=j+1}^{r}\left\{\vec{\Im}_{\alpha(r)}^{(j)}\right\}\dot{q}^{\alpha}=0.\end{aligned} \qquad (5.449)$$

Nezavisne veze u kinematičkom obliku nalaze se, dakle, u relacijama (5.444) i (5.449) i ima ih *najviše pet.*

Napomena. Do relacije (5.436) može da se dođe i sledećim razmatranjem. Odaberimo tačku M_3 tako da važi $M_3 \notin (l_{r+1})$. Uzećemo da i dalje važi $M_{3(0)} \equiv M'_{3(0)}$. I u ovom slučaju je $\overrightarrow{M_1M_3}=\vec{q}$, pri čemu je intenzitet vektora $\vec{q}$ proizvoljan. Takođe, i u ovom slučaju važi

$$\left[A_{j,r}\right]\left\{\vec{q}^{(r)}\right\}=\left\{\vec{q}'^{(j)}\right\}. \qquad (5.450)$$

Uzimajući u obzir da koordinata q^{r+1} određuje kretanje segmenta (V_j) u odnosu na segment (V_r) sledi

$$\left\{\vec{q}^{(r)}\right\}=\left[A_{r+1}\right]\left\{\vec{q}'^{(j)}\right\}, \qquad (5.451)$$

ili , s obzirom na vrstu zgloba $r+1$:

$$\left\{\vec{q}^{(r)}\right\}=\left[I\right]\left\{\vec{q}'^{(j)}\right\}, \qquad (5.452)$$

konačno sledi

$$\left[A_{j,r}\right]\left\{\vec{q}^{(r)}\right\}=\left\{\vec{q}^{(r)}\right\}. \qquad (5.453)$$

što, s obzirom na proizvoljnost izbora vektora $\vec{q}$ ponovo dovodi do (5.437).

5.8.12.2. Slučaj kada segmente (V_r) i (V_j) povezuje cilindrični zglob

Razmotrimo slučaj kada kruta tela (V_r) i (V_j) povezuje cilindrični zglob. Iz uslova koje nameće obrtanje krutog tela (V_j) u odnosu na kruto telo (V_r) dobijamo

$$\begin{aligned}&\vec{r}_1 = \vec{r}_1',\\ &\vec{r}_2 = \vec{r}_2',\\ &\vec{r}_3 + \Delta\vec{r}_3 = \vec{r}_3',\end{aligned} \tag{5.454}$$

gde je

$$\Delta\vec{r}_3 = \vec{e}_{r+1}\times(\vec{e}_{r+1}\times\vec{q})(1-\cos q^{r+1}) + \vec{e}_{r+1}\times\vec{q}\sin q^{r+1}. \tag{5.455}$$

Iz (5.454) sledi

$$\begin{aligned}&\vec{r}_1 = \vec{r}_1',\\ &\vec{r}_2 - \vec{r}_1 = \vec{r}_2' - \vec{r}_1',\\ &\vec{r}_3 - \vec{r}_1 + \Delta\vec{r}_3 = \vec{r}_3' - \vec{r}_1',\end{aligned} \tag{5.456}$$

ili (vidi sl.36)

$$\begin{aligned}&\vec{p} = \vec{p}',\\ &\vec{q} + \vec{e}_{r+1}\times(\vec{e}_{r+1}\times\vec{q})(1-\cos q^{r+1}) + \vec{e}_{r+1}\times\vec{q}\sin q^{r+1} = \vec{q}'.\end{aligned} \tag{5.457}$$

Imajući u vidu da je

$$\vec{r}_1 + \vec{d} + \sum_{k=j+1}^{r} \vec{\rho}_{kk} + \xi_k \vec{e}_k q^k = \vec{r}_1', \tag{5.458}$$

prema prvoj relaciji u (5.456) dobija se

$$\vec{d} + \sum_{k=j+1}^{r} \vec{\rho}_{kk} + \xi_k \vec{e}_k q^k = 0. \tag{5.459}$$

Drugi izraz u (5.457), s obzirom na prvi izraz u (5.457) dobija oblik

$$\vec{p}\times\left[\vec{q} + \vec{e}_{r+1}\times(\vec{e}_{r+1}\times\vec{q})(1-\cos q^{r+1}) + \vec{e}_{r+1}\times\vec{q}\sin q^{r+1}\right] = \vec{p}'\times\vec{q}', \tag{5.460}$$

ili

$$\vec{r} + \vec{e}_{r+1}\times(\vec{e}_{r+1}\times\vec{r})(1-\cos q^{r+1}) + \vec{e}_{r+1}\times\vec{r}\sin q^{r+1} = \vec{r}', \tag{5.461}$$

pri čemu treba imati u vidu da je $\vec{e}_{r+1} = \vec{p}$. S obzirom na ovu relaciju i relacije (5.457) i (5.458), sledi

$$\begin{aligned}
&\vec{p} = \vec{p}\,',\\
&\vec{q} + \vec{p} \times (\vec{p} \times \vec{q})(1 - \cos q^{r+1}) + \vec{p} \times \vec{q} \sin q^{r+1} = \vec{q}\,',\\
&\vec{r} + \vec{p} \times (\vec{p} \times \vec{r})(1 - \cos q^{r+1}) + \vec{p} \times \vec{r} \sin q^{r+1} = \vec{r}\,',\\
&\sum_{k=j+1}^{r} \vec{\rho}_{kk} + \xi_k \vec{e}_k q^k + \vec{d} = 0.
\end{aligned} \tag{5.462}$$

Prva tri izraza u (5.462) u matričnoj formi glase

$$\begin{aligned}
&\left[A_{j,r}\right]\left\{\vec{p}^{\,(r)}\right\} = \left\{\vec{p}\,'^{(j)}\right\},\\
&\left\{\vec{q}\,'^{(r)}\right\} = \left[A_{j,r}\right]\left\{\vec{q}\,'^{(j)}\right\},\\
&\left\{\vec{r}\,'^{(r)}\right\} = \left[A_{j,r}\right]\left\{\vec{r}\,'^{(j)}\right\},
\end{aligned} \tag{5.463}$$

gde je uzeto u obzir da važi

$$\begin{aligned}
&\left\{\vec{q}^{\,(r)}\right\} = \left\{\vec{q}\,'^{(j)}\right\},\\
&\left\{\vec{r}^{\,(r)}\right\} = \left\{\vec{r}\,'^{(j)}\right\},
\end{aligned} \tag{5.464}$$

i gde je

$$\left[A_{r+1}\right] = [I] + \left[p_{(0)}^{d}\right]^2 - \left[p_{(0)}^{d}\right]^2 \cos q^{r+1} + \left[p_{(0)}^{d}\right] \sin q^{r+1}. \tag{5.465}$$

Uzimajući u obzir da važi

$$\begin{aligned}
&\left\{\vec{p}^{\,(r)}\right\} = \left\{\vec{p}\,'^{(j)}\right\} = \left\{\vec{p}_{(0)}\right\},\\
&\left\{\vec{q}\,'^{(j)}\right\} = \left[A_{j,r}\right]\left\{\vec{q}\,'^{(r)}\right\},\ \left\{\vec{q}\,'^{(j)}\right\} = \left\{\vec{q}_{(0)}\right\},\\
&\left\{\vec{r}\,'^{(j)}\right\} = \left[A_{j,r}\right]\left\{\vec{r}\,'^{(r)}\right\},\ \left\{\vec{r}\,'^{(j)}\right\} = \left\{\vec{r}_{(0)}\right\}
\end{aligned} \tag{5.466}$$

sledi da prva tri izraza u (5.462) možemo da dovedemo na oblik

$$\begin{aligned}
&\left[A_{j,r}\right]\left\{\vec{p}_{(0)}\right\} = \left\{\vec{p}_{(0)}\right\},\\
&\left[A_{j,r+1}\right]\left\{\vec{q}_{(0)}\right\} = \left\{\vec{q}_{(0)}\right\},\\
&\left[A_{j,r+1}\right]\left\{\vec{r}_{(0)}\right\} = \left\{\vec{r}_{(0)}\right\},
\end{aligned} \tag{5.467}$$

ili

$$\begin{aligned}
&\left[A_{j,r}\right]^T \left\{\vec{p}_{(0)}\right\} = \left\{\vec{p}_{(0)}\right\},\\
&\left[A_{j,r}\right]^T \left\{\vec{q}_{(0)}\right\} = \left[A_{r+1}\right]\left\{\vec{q}_{(0)}\right\},\\
&\left[A_{j,r}\right]^T \left\{\vec{r}_{(0)}\right\} = \left[A_{r+1}\right]\left\{\vec{r}_{(0)}\right\}.
\end{aligned} \tag{5.468}$$

Uzimajući u obzir da važi

$$\left[A_{r+1}\right]\left\{\vec{p}_{(0)}\right\}=\left\{\vec{p}_{(0)}\right\}, \tag{5.469}$$

relacije (5.468) mogu da se napišu u obliku

$$\left[A_{j,r}\right]^T\left[\left\{\vec{p}_{(0)}\right\}\vdots\left\{\vec{q}_{(0)}\right\}\vdots\left\{\vec{r}_{(0)}\right\}\right]=\left[A_{r+1}\right]\left[\left\{\vec{p}_{(0)}\right\}\vdots\left\{\vec{q}_{(0)}\right\}\vdots\left\{\vec{r}_{(0)}\right\}\right], \tag{5.470}$$

ili (vidi (5.435))

$$\left[A_{j,r}\right]^T\left[\gamma\right]^T=\left[A_{r+1}\right]\left[\gamma\right]^T, \tag{5.471}$$

odakle se, uzimajući u obzir da $\left[\gamma\right]$ predstavlja matricu ortogonalnih transformacija, lako dobija relacija

$$\left[A_{j,r+1}\right]=\left[I\right], \tag{5.472}$$

gde je

$$\left[I\right]=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}. \tag{5.473}$$

Otuda, dolazimo do zaključka da u skupu od devet veza (5.472) najviše tri su nezavisne. Lako se pokazuje da bar u jednoj od te tri veze figuriše koordinata q^{r+1}. Isključivanjem te koordinate iz tih veza ili isključivanjem veze u kojoj figuriše ta koordinata (ako figuriše u samo jednoj vezi) ostaju dve veze kao moguće nezavisne.

Oblik veza pogodan za eliminaciju koordinate q^{r+1} dobija se narednim razmatranjem. Matrična relacija (5.471) pomnožena sa leve strane matricom $\left[\gamma\right]$ daje izraz

$$\left[\gamma\right]\left[A_{j,r}\right]^T\left[\gamma\right]^T=\left[\gamma\right]\left[A_{r+1}\right]\left[\gamma\right]^T, \tag{5.474}$$

koji dovodi do sledećih relacija

$$\begin{aligned}
&\left(\vec{p}_{(0)}\right)\left[A_{j,r}\right]^T\left\{\vec{p}_{(0)}\right\}=1,\\
&\left(\vec{q}_{(0)}\right)\left[A_{j,r}\right]^T\left\{\vec{p}_{(0)}\right\}=0,\\
&\left(\vec{r}_{(0)}\right)\left[A_{j,r}\right]^T\left\{\vec{p}_{(0)}\right\}=0,\\
&\left(\vec{p}_{(0)}\right)\left[A_{j,r}\right]^T\left\{\vec{q}_{(0)}\right\}=0,\\
&\left(\vec{q}_{(0)}\right)\left[A_{j,r}\right]^T\left\{\vec{q}_{(0)}\right\}=\cos q^{r+1},\\
&\left(\vec{r}_{(0)}\right)\left[A_{j,r}\right]^T\left\{\vec{q}_{(0)}\right\}=\sin q^{r+1},\\
&\left(\vec{p}_{(0)}\right)\left[A_{j,r}\right]^T\left\{\vec{r}_{(0)}\right\}=0,\\
&\left(\vec{q}_{(0)}\right)\left[A_{j,r}\right]^T\left\{\vec{r}_{(0)}\right\}=-\sin q^{r+1},\\
&\left(\vec{r}_{(0)}\right)\left[A_{j,r}\right]^T\left\{\vec{r}_{(0)}\right\}=\cos q^{r+1}.
\end{aligned} \tag{5.475}$$

Ako uvedemo sledeću matricu ortogonalnih transformacija

$$[D]=[\gamma]\left[A_{j,r}\right]^T[\gamma]^T, \tag{5.476}$$

gde je

$$[D]=\begin{bmatrix}\delta_{11}^{j,r} & \delta_{12}^{j,r} & \delta_{13}^{j,r}\\ \delta_{21}^{j,r} & \delta_{22}^{j,r} & \delta_{23}^{j,r}\\ \delta_{31}^{j,r} & \delta_{32}^{j,r} & \delta_{33}^{j,r}\end{bmatrix},\ \delta_{\alpha\beta}^{j,r}=\delta_{\alpha\beta}^{j,r}(q^{j+1},...,q^r),\ \alpha,\beta=1,2,3, \tag{5.477}$$

relacije (5.465) dobijaju oblik

$$\begin{aligned}
&\delta_{11}^{j,r}(q^{j+1},...,q^r)=1,\\
&\delta_{12}^{j,r}(q^{j+1},...,q^r)=0,\\
&\delta_{13}^{j,r}(q^{j+1},...,q^r)=0,\\
&\delta_{21}^{j,r}(q^{j+1},...,q^r)=0,\\
&\delta_{22}^{j,r}(q^{j+1},...,q^r)=\cos q^{r+1},\\
&\delta_{23}^{j,r}(q^{j+1},...,q^r)=-\sin q^{r+1},\\
&\delta_{31}^{j,r}(q^{j+1},...,q^r)=0,\\
&\delta_{32}^{j,r}(q^{j+1},...,q^r)=\sin q^{r+1},\\
&\delta_{33}^{j,r}(q^{j+1},...,q^r)=\cos q^{r+1}.
\end{aligned} \tag{5.478}$$

U skupu od devet veza (5.478) najviše tri su nezavisne. Pokazuje da bar u jednoj od te tri veze figuriše koordinata q^{r+1}. Isključivanjem te koordinate, kako je već rečeno, iz tih veza ili isključivanjem veze u kojoj figuriše ta koordinata (ako figuriše u samo jednoj vezi) ostaju dve veze kao moguće nezavisne.

Dalje, iz poslednje relacije u (5.463) dobijaju se kao moguće nezavisne veze sledeći izrazi

$$\begin{aligned}
&\left(\vec{p}_{(0)}\right)\sum_{k=j+1}^{r}\left[A_{j,k}\right]\left\{\vec{\rho}_{kk}^{(k)}+\xi_k q^k \vec{e}_k^{(k)}\right\}+\left(\vec{p}_{(0)}\right)\left\{\vec{d}\right\}=0,\\
&\left(\vec{q}_{(0)}\right)\sum_{k=j+1}^{r}\left[A_{j,k}\right]\left\{\vec{\rho}_{kk}^{(k)}+\xi_k q^k \vec{e}_k^{(k)}\right\}+\left(\vec{q}_{(0)}\right)\left\{\vec{d}\right\}=0,\\
&\left(\vec{r}_{(0)}\right)\sum_{k=j+1}^{r}\left[A_{j,k}\right]\left\{\vec{\rho}_{kk}^{(k)}+\xi_k q^k \vec{e}_k^{(k)}\right\}+\left(\vec{r}_{(0)}\right)\left\{\vec{d}\right\}=0.
\end{aligned}\tag{5.479}$$

Na taj način skup nezavisnih veza nalazi se u (5.478) i (5.479) a ima ih najviše *pet*.

4) Kinematički oblik jednačina veza dobiće se diferenciranjem prve i četvrte relacije u (11.56) po vremenu (umesto prve relacija u (5.462) može da se iskoristi ili druga ili trća relacija). Diferenciranjem prve relacije u (11.56) dobija se

$$\vec{\omega}_r \times \vec{p} = \vec{\omega}_j \times \vec{p}' \tag{5.480}$$

ili

$$(\vec{\omega}_r - \vec{\omega}_j)\times \vec{p}' = 0 \tag{5.481}$$

odakle je

$$\vec{\omega}_r - \vec{\omega}_j = \lambda \vec{p}' \tag{5.482}$$

tj.

$$\sum_{k=j+1}^{r} \vec{e}_k \dot{q}^k = \lambda \vec{p}', \tag{5.483}$$

što dovodi do relacija

$$\begin{aligned}
&\left(\vec{q}_{(0)}\right)\sum_{k=j+1}^{r}\left[A_{j,k}\right]\left\{\vec{e}_k^{(k)}\right\}\dot{q}^k=0,\\
&\left(\vec{r}_{(0)}\right)\sum_{k=j+1}^{r}\left[A_{j,k}\right]\left\{\vec{e}_k^{(k)}\right\}\dot{q}^k=0.
\end{aligned}\tag{5.484}$$

Ako razložimo vektore $\vec{e}_k$ $(k = j+1,...,r)$ na komponentu $\underline{\vec{e}}_k$ upravne na $\vec{e}_{r+1}$ i komponentu $\mu\vec{p}$ kolinearnu sa $\vec{p}'$ ($\vec{p} = \vec{p}'$), gde je

$$\underline{\vec{e}}_k = (\vec{q}' \cdot \vec{e}_k)\vec{q}' + (\vec{r}' \cdot \vec{e}_k)\vec{r}', \mu = (\vec{p}' \cdot \vec{e}_k), \tag{5.485}$$

izraz (5.483) možemo da napišemo u obliku u kome je eliminisana generalisana brzina $\dot{q}^{r+1}$:

$$\sum_{k=j+1}^{r} \underline{\vec{e}}_k \dot{q}^k = 0, \tag{5.486}$$

odakle sledi da će (5.483) biti nezavisne ako su ma koja dva vektora $\underline{\vec{e}}_k$ $(k = j+1,\ldots,r)$ nekolinearna.

Diferenciranjem četvrtog izraza u (5.462) po vremenu dobijamo (vidi slučaj prizmatičnog zgloba)

$$\sum_{\alpha=j+1}^{r} \left[\bar{\xi}_\alpha \vec{e}_\alpha \times \left(\sum_{k=\alpha}^{r} \vec{\rho}_{kk} + \xi_k \vec{e}_k q^k \right) + \xi_\alpha \vec{e}_\alpha \right] \dot{q}^\alpha = 0, \tag{5.487}$$

ili (vidi i (5.447))

$$\sum_{\alpha=j+1}^{r} \vec{\Im}_{\alpha(r)} \dot{q}^\alpha = 0, \tag{5.488}$$

odakle sledi da će sledeće tri skalarne jednačine koje se dobijaju iz (5.488) biti nezavisne ako su tri bilo koja vektora $\vec{\Im}_{\alpha(r)}$ $(\alpha = j+1,\ldots,r)$ nekomplanarna. Relacija (5.488) može da se napiše i u skalarnom obliku

$$\begin{aligned}
&(\vec{p}_{(0)}) \sum_{\alpha=j+1}^{r} \{\vec{\Im}_{\alpha(r)}^{(j)}\} \dot{q}^\alpha = 0, \\
&(\vec{q}_{(0)}) \sum_{\alpha=j+1}^{r} \{\vec{\Im}_{\alpha(r)}^{(j)}\} \dot{q}^\alpha = 0, \\
&(\vec{r}_{(0)}) \sum_{\alpha=j+1}^{r} \{\vec{\Im}_{\alpha(r)}^{(j)}\} \dot{q}^\alpha = 0.
\end{aligned} \tag{5.489}$$

Dakle, skup jednačina veza dat je relacijama (5.484) i (5.489) a nezavisnih ima najviše *pet*.

5.8.13. Diferencijalne jednačina kretanja zatvorenog kinematičkog lanca

Razmotrimo višestruko zatvoren kinematički lanac sa n segmenata. „otvaranjem“ lanca (rastavljanjem po zglobovima) na k mesta dobijamo kinematički lanac sa strukturom topološkog drveta sa m stepeni slobode kretanja pri čemu je

$$m = n - l,\ l < n,\ l \le 5k\,, \tag{5.490}$$

Veze nastale iz uslova „otvaranja“ lanca imaju oblik

$$f^{\nu}(q^1,...,q^n) = 0,\ \nu = 1,...,l \tag{5.491}$$

i nezavisne su, tj. važi

$$rank\left[\partial f^{\nu} / \partial q^{\alpha}\right] = l,\ \alpha = 1,...,n \tag{5.492}$$

Pretpostavimo da smo, primenjujući postupak koji se odnosi na otvorene kinematičke lance sa strukturom topološkog drveta, formirali osnovni metrički tenzor

$$a_{\alpha\beta} = a_{\alpha\beta}(q^1,...,q^n),\ \alpha,\beta = 1,...,n \tag{5.493}$$

i odredili generalisane sile

$$Q_{\alpha} = Q_{\alpha}(q^1,...,q^n),\ \ \alpha = 1,...,n \tag{5.494}$$

ne vodeći računa o jednačinama veza (5.491). Korišćenjem Lagranž-Dalamberovog principa u generalisanim koordinatama

$$\sum_{\alpha=1}^{n}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^{\alpha}} - \frac{\partial T}{\partial q^{\alpha}} - Q_{\alpha}\right)\delta q^{\alpha} = 0 \tag{5.495}$$

gde je kinetička energija razmatranog sistema data u obliku

$$T = \frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{n}\sum_{\beta=1}^{n} a_{\alpha\beta}\dot{q}^{\alpha}\dot{q}^{\beta}\,, \tag{5.496}$$

i gde su δq^{α} izohrone varijacije generalisanih koordinata $\delta q^1,...,\delta q^n$. Sa kovarijantnim oblikom izraza u zagradi relacija (5.495) dobija oblik

$$\sum_{\alpha=1}^{n}\left(\sum_{\beta=1}^{n} a_{\alpha\beta}\ddot{q}^{\beta} + \sum_{\gamma=1}^{n}\sum_{\beta=1}^{n}\Gamma_{\beta\gamma,\alpha}\dot{q}^{\beta}\dot{q}^{\gamma} - Q_{\alpha}\right)\delta q^{\alpha} = 0. \tag{5.497}$$

Varirajmo, nadalje, veze (5.491). Dobijamo

$$\sum_{\alpha=1}^{n}\frac{\partial f^{\nu}}{\partial q^{\alpha}}\delta q^{\alpha} = 0, \tag{5.498}$$

ili, nakon množenja skalarnim funkcijama $\lambda_{\nu} = \lambda_{\nu}(t)$,

$$\sum_{\alpha=1}^{n}\lambda_{\nu}\frac{\partial f^{\nu}}{\partial q^{\alpha}}\delta q^{\alpha} = 0. \tag{5.499}$$

Sabiranjem poslednjeg izraza sa (5.497) dobijamo

$$\sum_{\alpha=1}^{n}\left(\sum_{\beta=1}^{n}a_{\alpha\beta}\ddot{q}^{\beta}+\sum_{\gamma=1}^{n}\sum_{\beta=1}^{n}\Gamma_{\beta\gamma,\alpha}\dot{q}^{\beta}\dot{q}^{\gamma}-Q_{\alpha}+\lambda_{\nu}\frac{\partial f^{\nu}}{\partial q^{\alpha}}\right)\delta q^{\alpha}=0 \qquad (5.500)$$

ili

$$\begin{aligned}&\sum_{b=1}^{m}\left(\sum_{\beta=1}^{n}a_{b\beta}\ddot{q}^{\beta}+\sum_{\gamma=1}^{n}\sum_{\beta=1}^{n}\Gamma_{\beta\gamma,b}\dot{q}^{\beta}\dot{q}^{\gamma}-Q_{b}+\lambda_{\nu}\frac{\partial f^{\nu}}{\partial q^{b}}\right)\delta q^{b}\\&+\sum_{\rho=m+1}^{n}\left(\sum_{\beta=1}^{n}a_{\rho\beta}\ddot{q}^{\beta}+\sum_{\gamma=1}^{n}\sum_{\beta=1}^{n}\Gamma_{\beta\gamma,\rho}\dot{q}^{\beta}\dot{q}^{\gamma}-Q_{\rho}+\lambda_{\nu}\frac{\partial f^{\nu}}{\partial q^{\rho}}\right)\delta q^{\rho}=0.\end{aligned} \qquad (5.501)$$

Kako je ispunjen uslov (5.492) sledi da iz (5.499) možemo da odredimo l zavisnih varijacija generalisanih koordinata kao linearnu kombinaciju m nezavisnih varijacija generalisanih koordinata. Ne umanjujući opštost razmatranja smatraćemo da su nezavisne varijacije $\delta q^{1},...,\delta q^{m}$ a zavisne $\delta q^{m+1},...,\delta q^{n}$ (ako to nije ispunjeno uvek se može pribeći prenumeraciji koordinata do ispunjenja toga uslova). Odaberimo sada skalarne funkcije $\lambda_{\nu}=\lambda_{\nu}(t)$ tako da važi ($\rho=m+1,...,n$)

$$\sum_{\beta=1}^{n}a_{\rho\beta}\ddot{q}^{\beta}+\sum_{\gamma=1}^{n}\sum_{\beta=1}^{n}\Gamma_{\beta\gamma,\rho}\dot{q}^{\beta}\dot{q}^{\gamma}-Q_{\rho}+\sum_{\nu=1}^{l}\lambda_{\nu}\frac{\partial f^{\nu}}{\partial q^{\rho}}=0, \qquad (5.502)$$

što je moguće učiniti jer je $\det[\partial f^{\nu}/\partial q^{\rho}]\neq 0$. Odatle se dobija

$$\lambda_{\nu}=\sum_{\rho=m+1}^{n}\varphi_{\nu}^{\rho}\left(\sum_{\beta=1}^{n}a_{\rho\beta}\ddot{q}^{\beta}+\sum_{\gamma=1}^{n}\sum_{\beta=1}^{n}\Gamma_{\beta\gamma,\rho}\dot{q}^{\beta}\dot{q}^{\gamma}-Q_{\rho}\right), \qquad (5.503)$$

gde je $[\varphi_{\nu}^{\rho}]$ inverzna matrica matrice $[\partial f^{\nu}/\partial q^{\rho}]$. Na taj način u (5.500) ostaje

$$\sum_{b=1}^{m}\left(\sum_{\beta=1}^{n}a_{b\beta}\ddot{q}^{\beta}+\sum_{\gamma=1}^{n}\sum_{\beta=1}^{n}\Gamma_{\beta\gamma,b}\dot{q}^{\beta}\dot{q}^{\gamma}-Q_{b}+\sum_{\nu=1}^{l}\lambda_{\nu}\frac{\partial f^{\nu}}{\partial q^{b}}\right)\delta q^{b}=0 \qquad (5.504)$$

odakle, zbog nezavisnosti δq^{b} sledi

$$\sum_{\beta=1}^{n}a_{b\beta}\ddot{q}^{\beta}+\sum_{\gamma=1}^{n}\sum_{\beta=1}^{n}\Gamma_{\beta\gamma,b}\dot{q}^{\beta}\dot{q}^{\gamma}-Q_{b}+\sum_{\nu=1}^{l}\lambda_{\nu}\frac{\partial f^{\nu}}{\partial q^{b}}=0,\ b=1,...,m. \qquad (5.505)$$

Poslednje jednačine, zajedno sa (5.502) dovode do Lagranževih jednačina sa množiteljima veza u obliku ([6])

$$\sum_{\beta=1}^{n} a_{\alpha\beta}\ddot{q}^{\beta} + \sum_{\gamma=1}^{n}\sum_{\beta=1}^{n}\Gamma_{\beta\gamma,\alpha}\dot{q}^{\beta}\dot{q}^{\gamma} - Q_{\alpha} + \sum_{\nu=1}^{l}\lambda_{\nu}\frac{\partial f^{\nu}}{\partial q^{\alpha}} = 0,\ \alpha = 1,\dots,n, \qquad (5.506)$$

koje sa (5.491) sačinjavaju potpun skup diferencijalnih i algebarskih jednačina za određivanje nepoznatih funkcija $q^{\alpha} = q^{\alpha}(t)$ i $\lambda_{\nu} = \lambda_{\nu}(t)$. O određivanju generalisanih sila i koordinata metričkog tenzora bilo je ranije reči.

5.8.14. Kinematički lanac sa grananjem*

Da bi se proces formiranja diferencijalnih jednačina kretanja sistema tela automatizovao potrebno je, posle "otvaranja" zatvorenih delova kinematičkog lanca i formiranja strukture topološkog drveta, da se izvrši numeracija segmenata kinematičkog lanca na sledeći način. Najpre se ustanovi, polazeći od segmenta koji vrši pravolinijsku translaciju ili rotaciju u odnosu na nepomično postolje, niz segmenata koji će formirati "stablo" topološkog drveta. Posle toga se formiraju "prve grane" topološkog drveta, polazeći od segmenata koji su zglobom vezani za segmente stabla. Zatim se formiraju "druge grane", polazeći od segmenata vezanih za "prve grane" stabla. Postupak se nastavlja dalje, u zavisnosti od složenosti sistema tela formiranjem "trećih grana", itd. Numeracija segmenata počinje od segmenta (V_1) zglobom vezanim za postolje i to na takav način da je indeks kojim je numerisan bilo koji segment, na putu od (V_1) prema vrhu "stabla" ili "grane", veći od indeksa segmenta koji mu prethodi na tom putu.

Razmotrimo deo otvorenog kinematičkog lanca sa strukturom topološkog drveta (vidi sl.38). Kao što je već rečeno, kruto telo koje se nalazi u podnožju stabla i vezano je cilindričnim (prizmatičnim) zglobom za nepomično postolje označeno je sa (V_1) i njemu pripada koordinatni početak O inercijalnog koordinatnog sistema $Oxyz$. Ustanovimo direktan put (l_1) izmedju tela (V_1) i tela (V_{q2}). Taj put prolazi samo jednom kroz tela koja se na njemu nalaze. Kako je rečeno, indeksi tela na tom putu su u rastućem poretku: $(V_1),(V_2),\dots,(V_j),(V_{p_1}),(V_{p_1+1}),\dots,(V_{q_1})$. Dalje, ustanovimo direktan put (l_2) izmedju tela (V_1) i tela (V_{q2}). Taj put, takođe, prolazi samo jednom kroz tela koja se na njemu nalaze. Indeksi tela na tom putu su, takođe, u rastućem poretku: $(V_1),(V_2),\dots,(V_j),(V_{p_2}),(V_{p_2+1}),\dots,(V_{q_2})$. Ponavljajući taj postupak dolazimo do direktnog puta (l_s) izmedju tela (V_1) i tela (V_{q_s}). Indeksi tela na tom putu su u rastućem poretku: $(V_1),(V_2),\dots,(V_j),(V_{p_s}),(V_{p_s+1}),\dots,(V_{q_s})$. Na

---

* Preuzeto iz [35], iz dela monografije koji je napisao V. Čović.

telu (V_j), na kome se vrši grananje kinematičkog lanca (to jest, to telo je zglobovima vezano za više od dva tela) definisani su vektori položaja

$$\vec{\rho}_{jp_r} = \overrightarrow{O_j O'_{p_r}},\ r = 1,2,...,s \tag{5.507}$$

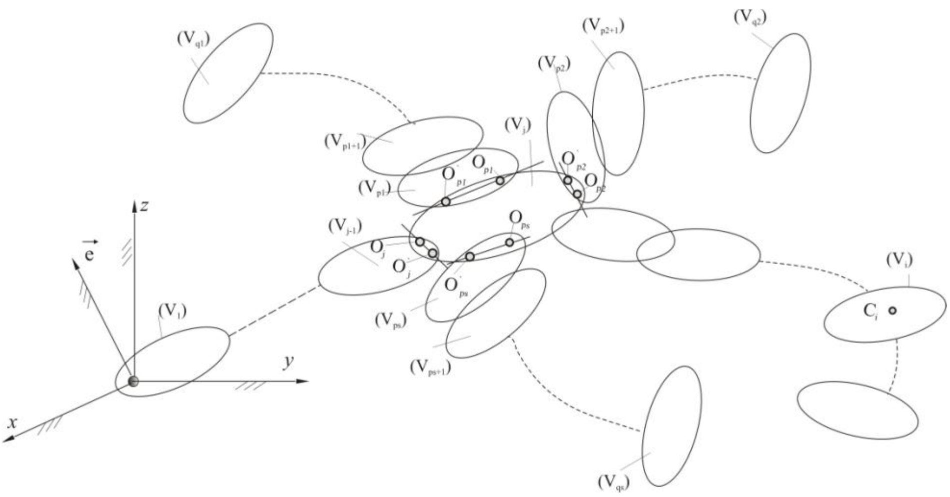
koji određuju vektor položaja $\vec{\rho}_{jj}$ na sledeći način ($\vec{\rho}_{jj}$ - vektor položaja koji figuriše u izrazu za vektor položaja centra inercije segmenta (V_i)):

$$\begin{aligned} &\vec{\rho}_{jj} = \vec{\rho}_{jp_1} \quad ako\ (V_i) \in (l_1),\\ &\vec{\rho}_{jj} = \vec{\rho}_{jp_2} \quad ako\ (V_i) \in (l_2),\\ &\text{...............} \quad \text{...................}\\ &\text{...............} \quad \text{....................}\\ &\vec{\rho}_{jj} = \vec{\rho}_{jp_s} \quad ako\ (V_i) \in (l_s), \end{aligned} \tag{5.508}$$

pri čemu je numeracija izvedena tako da važi

$$j < p_1 < q_1 < p_2 < q_2 < ... < p_s < q_s\,. \tag{5.509}$$

Indeks i koji figuriše u (5.508) odnosi se na telo (V_i) (tj. na put od (V_1) do (V_i)).

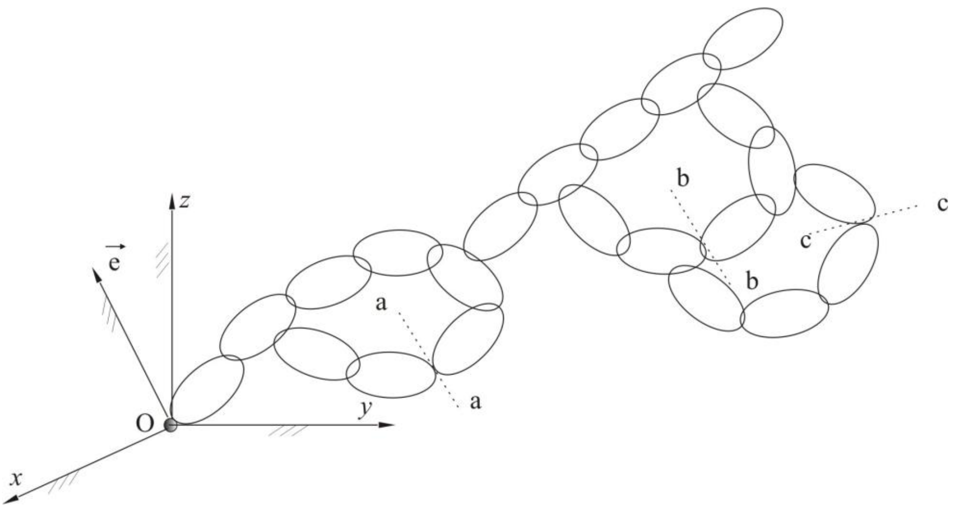


Sl.38

Izloženi postupak ilustrujmo sledećim primerom. Neka je sistem tela dat u obliku zatvorenog kinematičkog lanca koji sačinjava skup od 22 segemenata, slika 11.4. Pretvorimo posmatrani lanac prekidanjem na mestima *a-a* ,*b-b* i *c-c*, (vidi sl.39) u lanac sa strukturom topološkog drveta (sl.40). Uvedimo matrice

$$\{\eta_{(i)}\} \in R^{i\times 1},\ i = 1,2,...,22 \tag{5.510}$$

na sledeći način. Element matrice $\eta_{k(i)}$ jednak je jedinici ako se na direktnom putu od segmenta (V_i) do segmenta (V_1) nalazi segement (V_k). Ukoliko se (V_k) ne nalazi na tom putu pomenuti element biće jednak nuli. Sve pomenute matrice su šematski prikazane u tabeli 2



Sl.39

Vektor položaja centra inercije C_i proizvoljnog segmenta dat je izrazom

$$\overrightarrow{OC_i} = \vec{r}_i = \sum_{k=1}^{i} \eta_{k(i)} \left(\vec{\rho}_{kk} + \xi_k \vec{e}_k q^k \right) + \vec{\rho}_i \,. \tag{5.511}$$

odakle je

$$\begin{aligned} \vec{T}_{\alpha(i)} &= \eta_{\alpha(i)} \bar{\xi}_\alpha \vec{e}_\alpha \times \left[\sum_{k=\alpha}^{i} \eta_{k(i)} \left(\vec{\rho}_{kk} + \xi_k \vec{e}_k q^k \right) + \vec{\rho}_i \right] + \eta_{\alpha(i)} \xi_\alpha \vec{e}_\alpha \quad \forall \alpha \le i, \\ \vec{T}_{\alpha(i)} &= 0 \quad \forall \alpha > i. \end{aligned} \tag{5.512}$$

Takodje, u slučaju vektora $\vec{\tau}_i$, čiji su početak i kraj vezani za segment (V_i), važiće

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{\tau}_i}{\partial q^\alpha} &= \eta_{\alpha(i)} \bar{\xi}_\alpha \vec{e}_\alpha \times \vec{\tau}_i \quad \forall \alpha \le i, \\ \frac{\partial \vec{\tau}_i}{\partial q^\alpha} &= 0 \qquad\qquad\quad \forall \alpha > i. \end{aligned} \tag{5.513}$$

Sledi da su koeficijenti metričkog tenzora određeni izrazom (vidi (5.293))

$$a_{\alpha\beta(i)} = \sum_{i=1}^{n} m_i \left(\vec{T}_{\alpha(i)} \right) \{ \vec{T}_{\beta(i)} \} + \sum_{i=1}^{n} \left(\eta_{\alpha(i)} \vec{\Omega}_{\alpha(i)} \right) \left[J_{C_i} \right] \{ \eta_{\beta(i)} \vec{\Omega}_{\beta(i)} \}, \quad (5.514)$$

a Kristofelovi simboli prve vrste (vidi (5.159) i (5.312)):

$$\begin{aligned}\Gamma_{\alpha\beta,\gamma} = &\sum_{i=1}^{n} m_i \eta_{a(i)} \bar{\xi}_a \left(\vec{e}_a^{(c)} \times \vec{T}_{b(i)}^{(c)} \right) \{ \vec{T}_{\gamma(i)}^{(c)} \} + \\ &+ \sum_{i=1}^{n} \eta_{a(i)} \eta_{\gamma(i)} \eta_{b(i)} \left(\vec{\Omega}_{b(i)}^{(i)} \times \vec{\Omega}_{\gamma(i)}^{(i)} \right) \left[\Pi_i \right] \{ \vec{\Omega}_{a(i)}^{(i)} \} .\end{aligned} \quad (5.515)$$

Matrica transformacije koordinata iz koordinatnog sistema $C_i \xi_i \eta_i \zeta_i$, vezanog za segment (V_i), u inercijalni koordinatni sistem $Oxyz$ ima oblik:

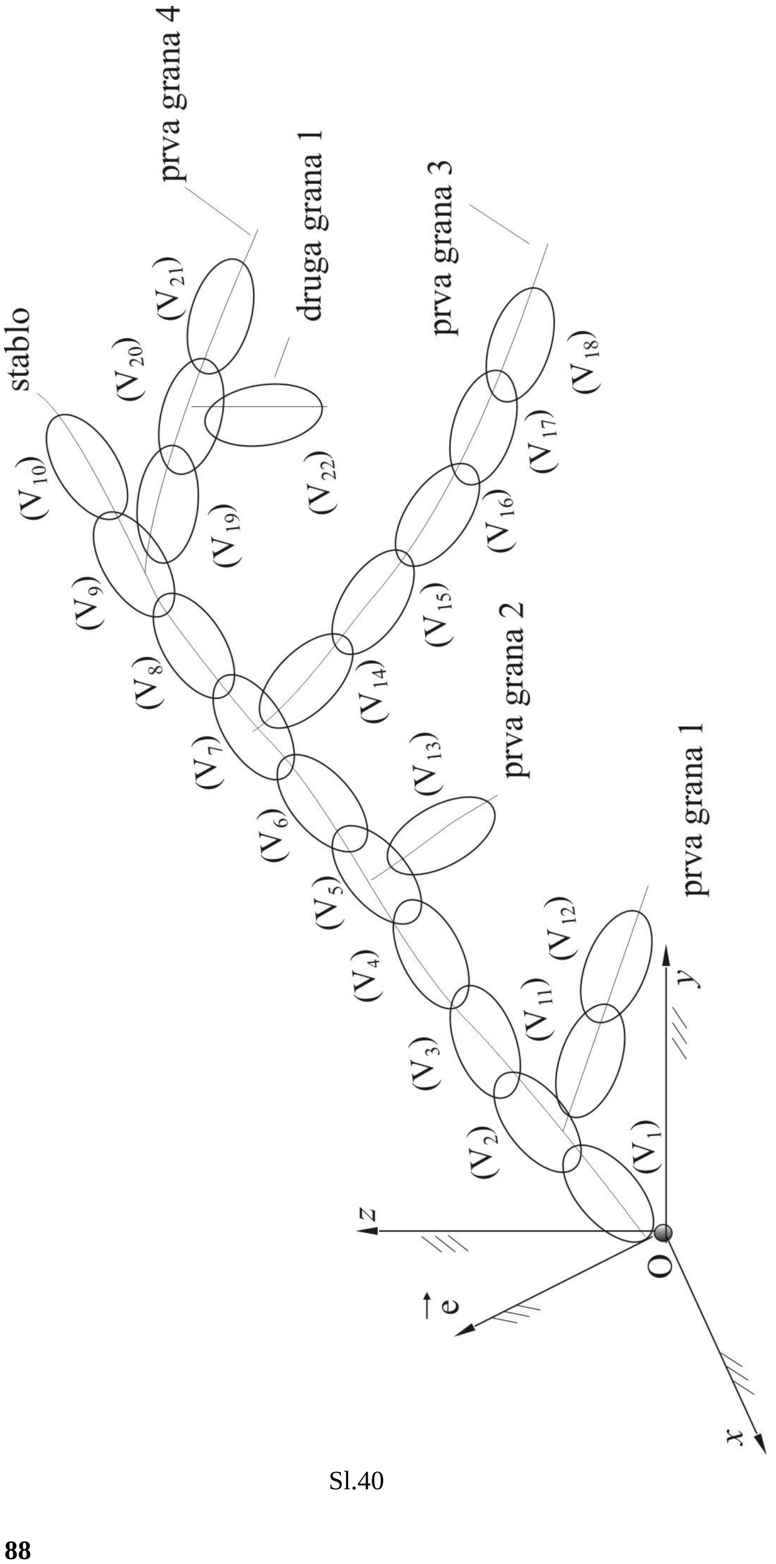
$$\left[A_{0,i} \right] = \prod_{k=1}^{i} \left[A_k^r \right], \quad (5.516)$$

gde je

$$\left[A_k^r \right] = \left[I \right] + \eta_{k(i)} \bar{\xi}_k \left(\left[e_k^d \right] \left(1 - \cos q^k \right) + \left[e_k^d \right] \sin q^k \right), \quad (5.517)$$

Koordinate kovarijantnog metričkog tenzora $a_{\alpha\beta}$ nalaze se standardnim postupkom, a u slučaju da se segment $(V_{\underline{\alpha\beta}})$ ne nalazi na putu od $(V_{\overline{\alpha\beta}})$ do (V_1) pokazuje se da važi $a_{\alpha\beta} = 0$. Slično, za Kristofelove simbole prve vrste $\Gamma_{\alpha\beta,\gamma}$, u slučaju da se na putu od segmenta sa indeksom $\overline{\alpha\beta\gamma}$ do segmenta (V_1) ne nalazi bar jedan od dva segmenta sa preostalim indeksima, pokazuje se da važi $\Gamma_{\alpha\beta,\gamma} = 0$.

Ako je u pitanju kinematički lanac sa strukturom topološkog drveta, nastao „otvaranjem" zatvorenog kinemaričkog lanca, koeficijenti metričkog tenzora i Kristofelovi simboli formiraju se postupkom koji je ovde prikazan. Međutim, diferencijalne jednačine formiraju se u obliku (5.506), kako je već rečeno u prethodnom paragrafu.



stablo
prva grana 4
druga grana 1
prva grana 3
prva grana 2
prva grana 1
(V_{1})
(V_{2})
(V_{3})
(V_{4})
(V_{5})
(V_{6})
(V_{7})
(V_{8})
(V_{9})
(V_{10})
(V_{11})
(V_{12})
(V_{13})
(V_{14})
(V_{15})
(V_{16})
(V_{17})
(V_{18})
(V_{19})
(V_{20})
(V_{21})
(V_{22})
x
y
z
O
$\vec{e}$

Sl.40

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**	**21**	**22**
η(22)	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	1
η(21)	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	
η(20)	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1		
η(19)	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1			
η(18)	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1				
η(17)	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1					
η(16)	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	1	1	1						
η(15)	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	1	1							
η(14)	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	1								
η(13)	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1									
η(12)	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1										
η(11)	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1											
η(10)	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1												
η(9)	1	1	1	1	1	1	1	1	1													
η(8)	1	1	1	1	1	1	1	1														
η(7)	1	1	1	1	1	1	1															
η(6)	1	1	1	1	1	1																
η(5)	1	1	1	1	1																	
η(4)	1	1	1	1																		
η(3)	1	1	1																			
η(2)	1	1																				
η(1)	1																					

tabela 2

Primetimo da formiranje diferencijalnih jednačina kretanja, na primer, robotskih sistema u simboličkoj formi danas predstavlja gotovo rutinski posao zahvaljujići velikom broju poznatih programa iz oblasti matematike kao i izvanrednim performansama personalnih računara. Uzimajući u obzir činjenicu da na robotske sisteme deluju uglavnom sile pogona i sile zemljine teže, u slučaju da je mehanički model robotskog sistema dat u obliku otvorenog kinematičkog lanca, očigledno je da je za iznalaženje pomenutih jednačina dovoljno da se odredi metrički tenzor toga robotskog sistema.

[1] Wittenburg J., *Dynamics of Systems of Rigid Bodies,* B. G. Teubner, Stuttgart, 1977.
[2] Čović V., Lazarević, M., *Mehanika robota*, Mašinski fakultet, Beograd, 2009.
[3] Lazarević M., *Zbirka zadataka iz mehanike robota*, Mašinski fakultet, Beograd, 2006.
[4] Bakša A., *Teorija mehanizama*, Prirodno-matematički fakultet, Beograd, 1983.
[5] Marković S, *Automatsko formiranje diferencijalnih jednačina kretanja sistema krutih tela u analitičkom obliku*, magistarska teza, Beograd, 1992.
[6] Lurje A. I*., Analitička mehanika*, Gosud. izdav. F. M., Moskva, 1961.
[7] Čović V., Lukačević M., *Classical Mechanics in the Monograph Real Time Dynamics of Manipulation Robots,* Proc. II International Seminar and Symposium Automation and Robots, Beograd, 1987.
[8] Čović V., Lukačević M., *Contribution to the Dynamics of Active Mechanisms*, ZAMM 67, 1987.
[9] Rusov S., Čović V., *O planarnom tenzoru inercije u dinamici robota*, zbornik radova III konferencije SAUM, Vrnjačka Banja, 1989.
[10] Anđelić T., *Tenzorski račun*, Naučna Knjiga, Beograd,1967.
[11] Pars, L.A.*, A Treatise on Analytical Dynamics,* Heinemann, London, 1968.
[12] Čović V., *Formiranje dopunskih jednačina veze pri transformaciji mehaničkog sistema sa zatvorenim kinematskim lancima u kinematski sistem strukture topološkog drveta (II*), Simpozijum iz opšte mehanike, Zbornik radova, Novi Sad, 1994.
[13] Marković S., *Formiranje dopunskih jednačina veze pri transformaciji mehaničkog sistema sa zatvorenim kinematskim lancima u kinematski sistem strukture topološkog drveta (I*), Simpozijum iz opšte mehanike, Zbornik radova, Novi Sad, 1994.
[14] Čović V., Marković S., *Symbolic Form Computation of the Complete Dynamics of Robotic Systems with the Closed Kinematic Chains Structure, Part I:Theory,* Proceedings of the First Int. Conf. on Neural, Parallel and Scientific Computing, Atlanta, 1995.
[15] Čović V., Marković S., *Symbolic Form Computation of the Complete Dynamics of Robotic Systems with the Closed Kinematic Chains Structure, Part II:Computation and Applications,* Proceedings of the First Int. Conf. on Neural, Parallel and Scientific Computing, Atlanta, 1995.
[16] Čović M. V., Lukačević, M. M., *Extension of the Bernoulli's Case of Brachistochornic Motion to the Multibody System in the Form of a Closed Kinematic Chain*, Facta Universitatis, Series: Mechanics, Automatic Control and Robotics Vol.2, No. 9, 1999.
[17] Čović V., Vesković M., *Extension of the Bernoulli's Case of a Brachistochronic Motion to the Multibody System Having the Form of a*

Kinematic Chain With External Constraints, European Journal of Mechanics A / Solids 21, pp. 347-354, 2002.