

Ovaj dokument sadrži zadatke iz predmeta Elektrotehnika na Mašinskom fakultetu u Beogradu. Zadaci su koncipirani tako da prate tematske celine sa predavanja i omogućavaju vežbanje ključnih pojmova i metoda. Zadaci su numerisani i raspoređeni prema oblastima koje se obrađuju na predavanjima. Preporučuje se da pokušate samostalno da rešite svaki zadatak, a zatim uporedite svoj postupak sa ponuđenim rešenjima. Posebnu pažnju obratite na analizu vektorskih veličina, jedinica i fizičkih pretpostavki. U nekim zadacima data su i potpitanja koja podstiču razumevanje i diskusiju. Kroz zadatke ćete uočiti sledeće oznake:



Za važne komentare i mesta gde studenti često greše.



Za dodatna pitanja vezano za zadatak.



Za one koji žele da rade više - ne dolazi na ispitu!.



Za ideju, komentar na izvođenje.



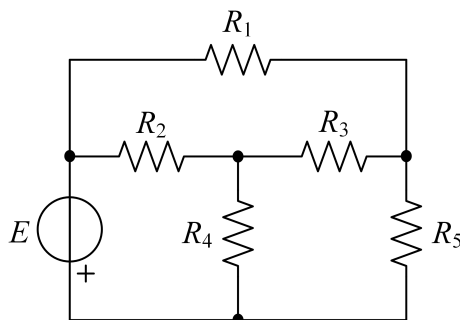
Za preporuku uz zadatak.

Konsultacije: Za dodatna pojašnjenja i pitanja u vezi sa predmetom možete me kontaktirati putem:

- Email: vbecejac@mas.bg.ac.rs
- U živo: tokom termina konsultacija **sredom u 10 časova** u Laboratoriji za elektrotehniku i elektroniku (soba 2, pored Studentske službe).

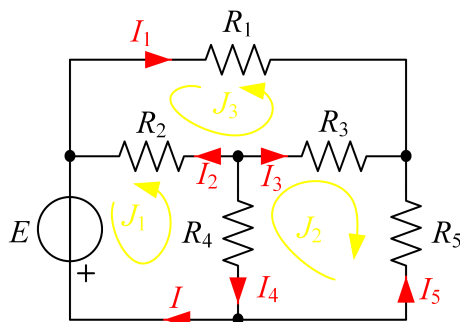
1 Stalne struje

1. Za prikazano kolo stalne struje poznato je $E = 21 \text{ V}$, $R_1 = 1 \Omega$, $R_2 = 2 \Omega$, $R_3 = 1 \Omega$, $R_4 = 1 \Omega$ i $R_5 = 2 \Omega$. Izračunati **a)** sve struje u kolu, **b)** ukupnu snagu Džulovih gubitaka u kolu.



REŠENJE: Primenom metode konturnih struja, za konture prikazane na slici dobija se

$$\begin{aligned} J_1 : & (R_2 + R_4) J_1 + R_4 J_2 - R_2 J_3 = E \\ J_2 : & R_4 J_1 + (R_3 + R_4 + R_5) J_2 + R_3 J_3 = 0 \\ J_3 : & -R_2 J_1 + R_3 J_2 + (R_1 + R_2 + R_3) J_3 = 0. \end{aligned}$$



Zamenom brojnih vrednosti dobija se sistem jednačina

$$\begin{aligned} 3J_1 + J_2 - 2J_3 &= 21 \\ J_1 + 4J_2 + J_3 &= 0 \\ -2J_1 + J_2 + 4J_3 &= 0 \end{aligned}$$

čije je rešenje $J_1 = 15 \text{ A}$, $J_2 = -6 \text{ A}$ i $J_3 = 9 \text{ A}$.

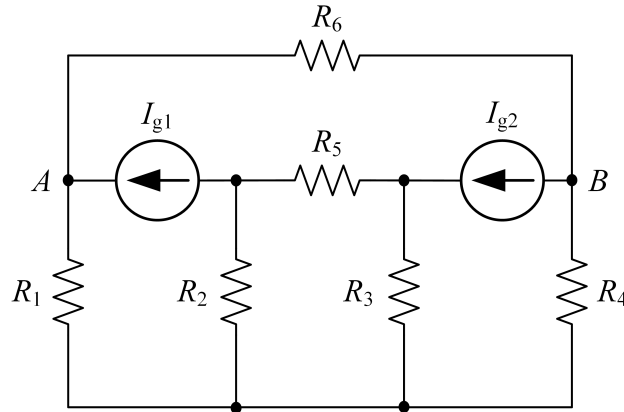
a) Struje u kolu su sada, prema usvojenim referentnim smerovima

$$\begin{aligned} I_1 &= -J_3 = -9 \text{ A}, & I_2 &= J_1 - J_3 = 6 \text{ A} \\ I_3 &= J_2 + J_3 = 3 \text{ A}, & I_4 &= -J_1 - J_2 = -9 \text{ A} \\ I_5 &= -J_2 = 6 \text{ A}, & I &= -J_1 = -15 \text{ A}. \end{aligned}$$

b) Ukupna snaga Džulovih gubitaka se može dobiti kao zbir snage na svim otpornicima, međutim, to bi iziskivalo dosta vremena. Primetimo da u kolu postoji samo jedan generator pa je, prema zakonu održanja snage, ukupna snaga Džulovih gubitaka

$$P_{\text{Juk}} = -EI = -21 \cdot (-15) = 315 \text{ W}.$$

2. Za kolo sa slike poznato je $R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = 4 \text{ k}\Omega$, $R_5 = R_6 = 2 \text{ k}\Omega$, $I_{g1} = 80 \text{ mA}$ i $I_{g2} = 40 \text{ mA}$. Izračunati snagu na otporniku R_4 i napon U_{AB} .



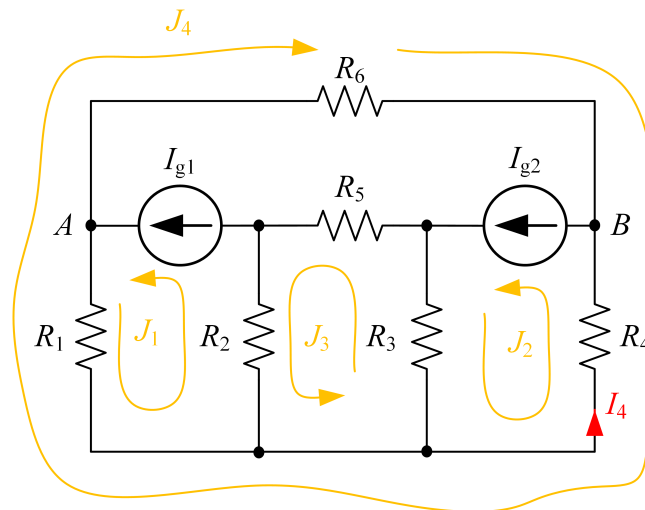
REŠENJE: U ovom kolu postoje idealni strujni generatori, pa se konture moraju odabrati na takav način da je svaki strujni generator obuhvaćen samo jednom konturom. Za konture odabrane kao na slici, pišemo jednačine:

$$J_1 = I_{g1}$$

$$J_2 = I_{g2}$$

$$-R_2 J_1 - R_3 J_2 + (R_2 + R_3 + R_5) J_3 = 0$$

$$-R_1 J_1 - R_4 J_2 + (R_1 + R_4 + R_6) J_4 = 0.$$



Zamenom brojnih vrednosti dobija se

$$J_1 = 80 \text{ mA}, \quad J_2 = 40 \text{ mA}$$

$$-4 \cdot 80 - 4 \cdot 40 + 10 \cdot J_3 = 0 \implies J_3 = 48 \text{ mA}$$

$$-4 \cdot 80 - 4 \cdot 40 + 10 J_4 = 0 \implies J_4 = 48 \text{ mA}.$$

Prema odabranom referentnom smeru za struju I_4 se dobija

$$I_4 = J_2 - J_4 = 40 - 48 = -8 \text{ mA}.$$

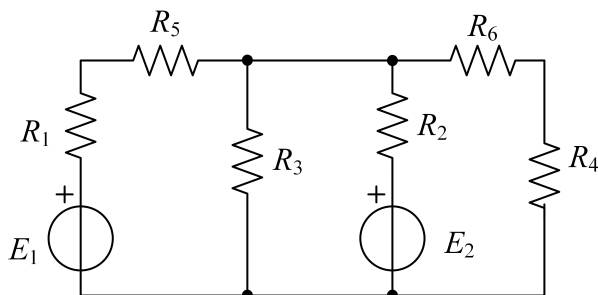
Tražena snaga je

$$P_{R4} = R_4 I_4^2 = 4 \cdot 64 = 256 \text{ mW}.$$

Napon U_{AB} je

$$\begin{aligned} U_{AB} &= R_1 (J_1 - J_4) + R_4 (J_2 - J_4) \\ &= 4 \cdot (80 - 48) + 4 (40 - 48) \\ &= 4 \cdot 32 + 4 \cdot (-8) \\ &= 96 \text{ V}. \end{aligned}$$

3. U prikazanom kolu jednosmerne struje, ems izvora su $E_1 = 3 \text{ V}$, $E_2 = 9 \text{ V}$, otpornosti otpornika su $R_1 = 50 \Omega$, $R_2 = 100 \Omega$, $R_3 = 600 \Omega$, $R_4 = 400 \Omega$, $R_5 = 150 \Omega$ i $R_6 = 200 \Omega$. Izračunati snagu Džulovih gubitaka na otporniku R_2 .



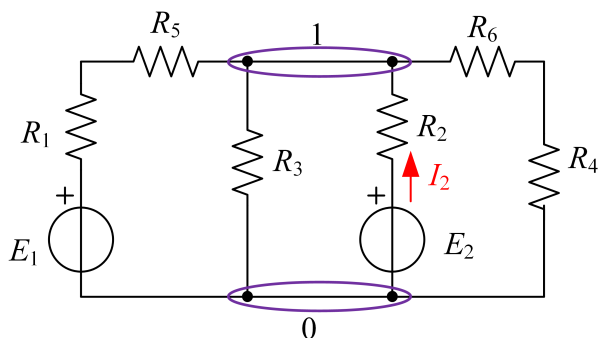
REŠENJE: Zadatak ćemo rešiti primenom metode potencijala čvorova. U kolu ima dva čvora, pa imamo jednu jednačinu po ovom metodu.

$$V_1 \left(\frac{1}{R_1 + R_5} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_6 + R_4} \right) = \frac{E_1}{R_1 + R_5} + \frac{E_2}{R_2}$$

$$V_1 \left(\frac{1}{200} + \frac{1}{600} + \frac{1}{100} + \frac{1}{600} \right) = \frac{3}{200} + \frac{9}{100}$$

$$V_1 \cdot \frac{11}{600} = \frac{21}{200} \Rightarrow V_1 = \frac{63}{11} \text{ V} = 5,7273 \text{ V}.$$

Struja koja je uspostavljena u grani sa R_2 i E_2 je

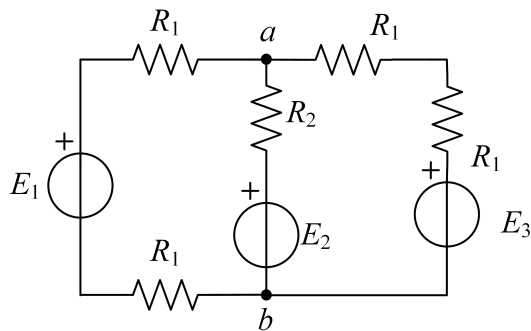


$$I_2 = \frac{V_0 - V_1 + E_2}{R_2} = \frac{9 - 5,7273}{100} = 0,033 \text{ A} = 33 \text{ mA}$$

pa je

$$P_{R2} = R_2 I_2^2 = 0,11 \text{ W}.$$

4. Za kolo stalne struje sa slike poznate su otpornosti otpornika $R_1 = 1 \Omega$, $R_2 = 2 \Omega$, ems generatora $E_1 = 2 \text{ V}$, $E_2 = E_3 = 4 \text{ V}$. Izračunati napon U_{ab} .



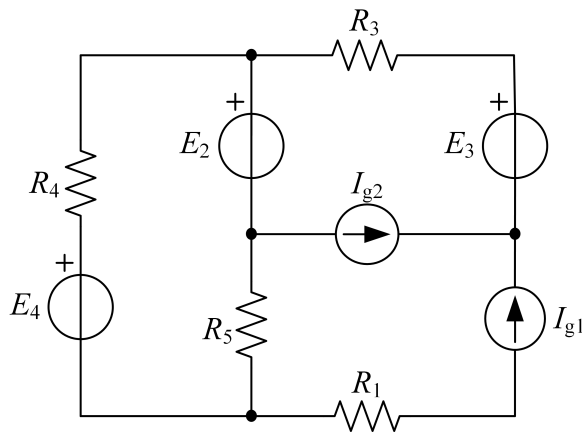
REŠENJE: U kolu postoje samo dva čvora, a i b pa je zgodno primeniti metod potencijala čvorova. Usvajanjem da je čvor b referentni možemo pisati

$$V_a \left(\frac{1}{R_1 + R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_1 + R_1} \right) = \frac{E_1}{R_1 + R_1} + \frac{E_2}{R_2} + \frac{E_3}{R_1 + R_1}$$

$$V_a \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) = \frac{2}{2} + \frac{4}{2} + \frac{4}{2} \iff V_a \cdot \frac{3}{2} = \frac{10}{2} \implies V_a = \frac{10}{3} \text{ V}.$$

Ovo je ujedno i napon U_{ab} .

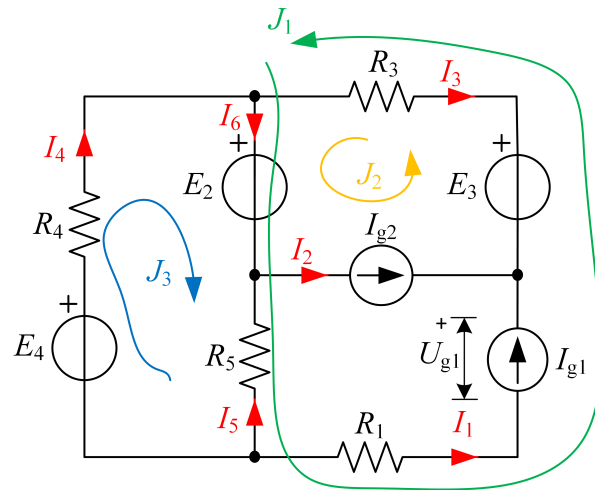
5. U kolu na slici poznato je $I_{g1} = 12 \text{ A}$, $I_{g2} = 6 \text{ A}$, $E_2 = 30 \text{ V}$, $E_3 = 20 \text{ V}$, $E_4 = 40 \text{ V}$, $R_1 = 10 \Omega$, $R_3 = 40 \Omega$, $R_4 = 20 \Omega$, $R_5 = 30 \Omega$. a) Izračunati sve struje u kolu. b) Izračunati snagu strujnog generatora I_{g1} .



REŠENJE: a) Prema metodi konturnih struja pišemo jednačine

$$J_1 = I_{g1} = 12 \text{ A}, \quad J_2 = I_{g2} = 6 \text{ A}$$

$$R_5 J_1 + (R_4 + R_5) J_3 = E_4 - E_2 \iff 30 \cdot 12 + 50 \cdot J_3 = 10 \implies J_3 = -7 \text{ A}.$$



Prema označenim referentnim smerovima struje u kolu su:

$$I_1 = J_1 = 12 \text{ A}, \quad I_2 = I_{g2} = 6 \text{ A}, \quad I_3 = -J_1 - J_2 = -18 \text{ A}$$

$$I_4 = J_3 = -7 \text{ A}, \quad I_5 = -J_1 - J_3 = -5 \text{ A}, \quad I_6 = J_2 + J_1 + J_3 = 11 \text{ A}.$$

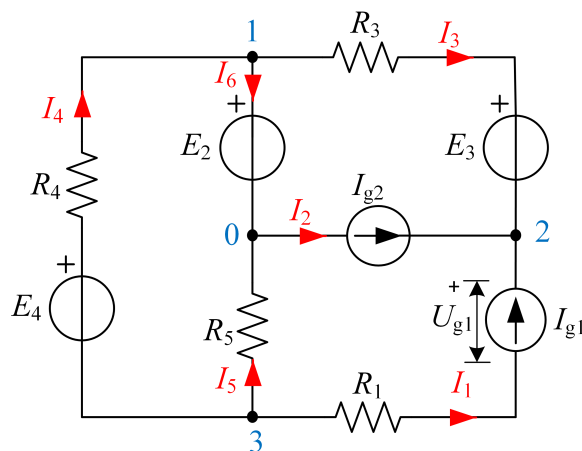
b) Napon idealnog strujnog generatora I_{g1} je

$$\begin{aligned} U_{g1} &= -E_3 - R_3 I_3 + E_2 - R_5 I_5 + R_1 I_1 \\ &= -20 - 40 \cdot (-18) + 30 - 30 \cdot (-5) + 10 \cdot 12 \\ &= 1000 \text{ V}. \end{aligned}$$

Snaga je

$$P_{I_{g1}} = U_{g1} I_{g1} = 1000 \cdot 12 = 12000 \text{ W} = 12 \text{ kW}.$$

Zadatak ćemo rešiti i na drugi način, primenom metode potencijala čvorova. Primetiti da je idealni naponski generator sam u grani. Stoga, jedan od tih čvorova mora biti referentni. Proizvoljno biramo koji će biti od ta dva. Potencijal čvora 1 u ovom slučaju je odmah određen i nije potrebno pisati jednačinu po metodi potencijala čvorova. Dakle,



$$V_1 = E_2 = 30 \text{ V}.$$

$$\text{čvor 2: } -\frac{1}{R_3} V_1 + \frac{1}{R_3} V_2 = -\frac{E_3}{R_3} + I_{g2} + I_{g1}$$

$$\text{čvor 3: } -\frac{1}{R_4}V_1 + \left(\frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5}\right)V_3 = -I_{g1} - \frac{E_4}{R_4}.$$



Primetiti da otpornik R_1 nigde ne učestvuje u jednačinama po metodu potencijala čvorova jer je vezan na red sa idealnim strujnim generatorom.

Zamenom brojnih vrednosti se dobija:

$$-\frac{30}{40} + \frac{V_2}{40} = -\frac{20}{40} + 6 + 12 \implies V_2 = 730 \text{ V}$$

$$-\frac{30}{20} + \left(\frac{1}{20} + \frac{1}{30}\right)V_3 = -12 - \frac{40}{20} \implies V_3 = -150 \text{ V}.$$

Struje u kolu su

$$I_1 = I_{g1} = 12 \text{ A}, \quad I_2 = I_{g2} = 6 \text{ A},$$

$$I_3 = \frac{V_1 - V_2 - E_3}{R_3} = \frac{30 - 730 - 20}{40} = -18 \text{ A}.$$

$$I_4 = \frac{V_3 - V_1 + E_4}{R_4} = \frac{-150 - 30 + 40}{20} = -7 \text{ A}$$

$$I_5 = \frac{V_3 - V_0}{R_5} = \frac{-150}{30} = -5 \text{ A}$$

$$I_6 = I_4 - I_3 = -7 + 18 = 11 \text{ A}.$$

Napon na strujnom generatoru je

$$U_{23} = U_{g1} - R_1 I_1 \iff V_2 - V_3 = U_{g1} - R_1 I_1$$

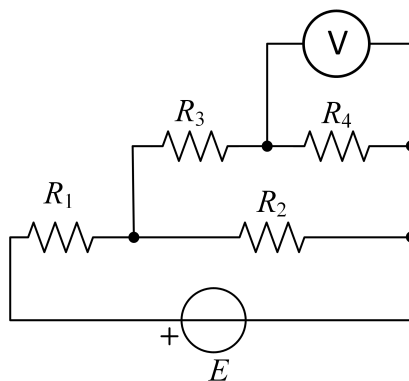
pa je

$$U_{g1} = 730 + 150 + 10 \cdot 12 = 1000 \text{ V},$$

a odavde je snaga

$$P_{I_{g1}} = U_{g1} I_{g1} = 12 \text{ kW}.$$

6. U kolu stalne struje sa slike poznato je: $E = 18 \text{ V}$, $R_1 = 400 \Omega$, $R_3 = 100 \Omega$ i $R_4 = 500 \Omega$. Ukoliko je pokazivanje idealnog voltmetra $U_V = 5 \text{ V}$, izračunati vrednost otpornosti R_2 .

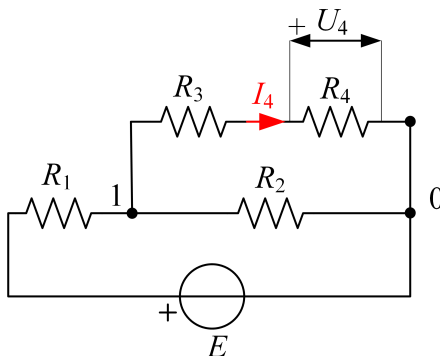


REŠENJE: Otpornost idealnog voltmetra je beskonačno velika, $R_v \rightarrow \infty$ pa ga možemo zameniti otvorenom vezom. Tada je struja kroz otpornik R_4

$$I_4 = \frac{U_V}{R_4} = \frac{5}{500} = 10 \text{ mA}.$$

Ovo je ujedno i struja kroz otpornik R_3 . Napon između tačaka 1 i 0 je

$$U_{10} = (R_3 + R_4) I_4 = 600 \cdot 10 \cdot 10^{-3} = 6 \text{ V}.$$

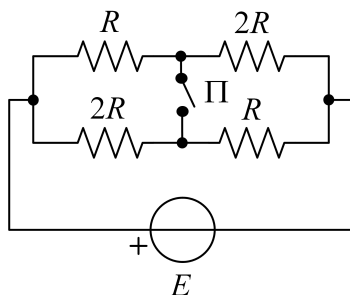


Primenom metode potencijala čvorova pišemo

$$U_{10} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3 + R_4} \right) = \frac{E}{R_1}$$

$$6 \cdot \left(\frac{1}{400} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{600} \right) = \frac{18}{400} \Rightarrow R_2 = 300 \Omega.$$

7. Odrediti priraštaj snage idealnog naponskog generatora $E = 6 \text{ V}$ prouzrokovan zatvaranjem prekidača Π . Otpornost otpornika je $R = 2 \text{ k}\Omega$.



REŠENJE: Kako bismo odredili snagu idealnog naponskog generatora potrebno je odrediti struju kroz njegove priključke. Kada je prekidač otvoren, tada je ekvivalentan otpor koji idealni naponski generator vidi

$$R_O = (R + 2R) \parallel (2R + R) = 3R \parallel 3R = \frac{3R \cdot 3R}{3R + 3R} = \frac{3R}{2}.$$

Struja kroz idealni naponski generator je

$$I_O = \frac{E}{\frac{3R}{2}} = \frac{2E}{3R}.$$

Kada se prekidač zatvori, tada je ekvivalentan otpor koji idealni naponski generator vidi

$$R_Z = R \parallel 2R + 2R \parallel R = \frac{R \cdot 2R}{R + 2R} + \frac{R \cdot 2R}{R + 2R} = \frac{2R}{3} + \frac{2R}{3} = \frac{4R}{3},$$

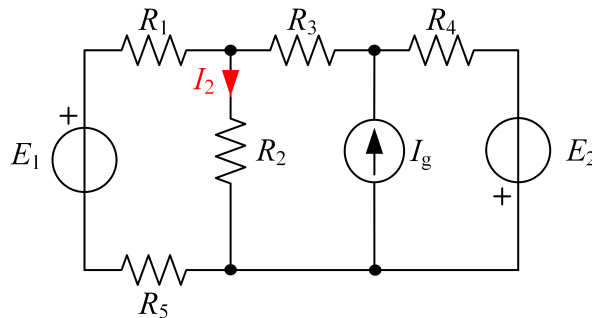
pa je struja kroz idealni naponski generator

$$I_Z = \frac{E}{\frac{4R}{3}} = \frac{3E}{4R}.$$

Priraštaj snage je

$$\begin{aligned} \Delta P_E &= P_E^{(z)} - P_E^{(o)} = EI_Z - EI_O = E^2 \left(\frac{2}{3R} - \frac{3}{4R} \right) \\ &= 36 \left(\frac{2}{6} - \frac{3}{8} \right) = -1,5 \text{ mW}. \end{aligned}$$

8. U kolu stalne struje prikazanom na slici poznato je $E_1 = 15 \text{ V}$, $E_2 = 20 \text{ V}$, $I_g = 2 \text{ A}$, $R_1 = 10 \Omega$, $R_2 = 100 \Omega$, $R_5 = 40 \Omega$, $R_3 = R_4 = 50 \Omega$. Primenom teoreme superpozicije izračunati struju I_2 .

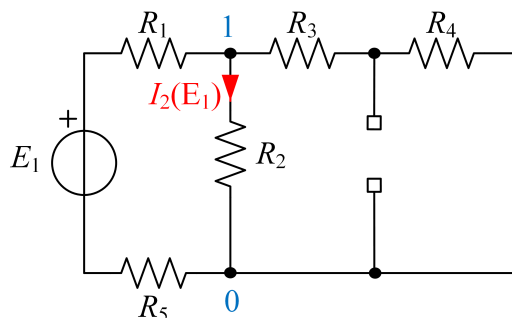


REŠENJE: Prema teoreme superpozicije struja I_2 jednaka je

$$I_2 = I_2(E_1) + I_2(I_g) + I_2(E_2),$$

gde su $I_2(E_1)$, $I_2(I_g)$ i $I_2(E_2)$ odzivi kada u kolu deluje samo jedna eksitacija (generator).

Kada u kolu deluje samo idealni naponski generator E_1 , kolo je prikazano na slici.



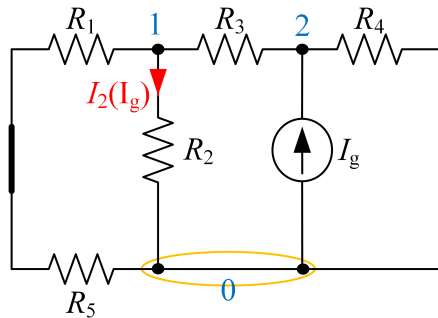
Traženu struju možemo dobiti na više načina. Jedan od njih je metod potencijala čvorova

$$\begin{aligned} V_1 \left(\frac{1}{R_1 + R_5} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3 + R_4} \right) &= \frac{E_1}{R_1 + R_5} \\ \Leftrightarrow V_1 \left(\frac{1}{50} + \frac{1}{100} + \frac{1}{100} \right) &= \frac{20}{50} \Rightarrow V_1 = 10 \text{ V}. \end{aligned}$$

Tražena struja je

$$I_2(E_1) = \frac{V_1}{R_2} = \frac{10}{100} = 10 \text{ mA}.$$

Kada u kolu deluje samo idealni strujni generator I_g , kolo je prikazano na slici.



Struja će biti izračunata metodom potencijala čvorova.

$$\text{čvor 1: } V_1 \left(\frac{1}{R_1 + R_5} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right) - V_2 \cdot \frac{1}{R_3} = 0$$

$$\text{čvor 2: } -V_1 \cdot \frac{1}{R_3} + V_2 \left(\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} \right) = I_g.$$

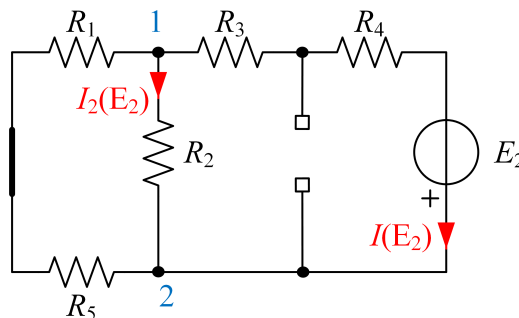
Zamenom brojeva se dobija sistem od dve jednačine sa dve nepoznate:

$$\begin{aligned} V_1 \cdot \left(\frac{1}{50} + \frac{1}{100} + \frac{1}{50} \right) - V_2 \cdot \frac{1}{50} &= 0 \\ -V_1 \cdot \frac{1}{50} + V_2 \left(\frac{1}{50} + \frac{1}{50} \right) &= 2, \end{aligned}$$

odake je $V_1 = 25 \text{ V}$ i $V_2 = \frac{125}{2} \text{ V}$. Tražena struja je

$$I_2(I_g) = \frac{V_1}{R_2} = \frac{25}{100} = 250 \text{ mA}.$$

Kada u kolu deluje samo idealni naponski generator E_2 , kolo je prikazano na slici.



Zadatak može biti rešen na više načina (za samostalni rad uraditi preko metode potencijala čvorova ili konturnih struja). Ovde će biti primenjene jednostavne transfiguracije otporničke mreže. Primetimo da je otpornost koju vidi idealni naponski generator

$$\begin{aligned} R_e &= (R_1 + R_5) \parallel R_2 + R_3 + R_4 = 50 \parallel 100 + 100 = \frac{50 \cdot 100}{150} + 100 \\ &= \frac{400}{3} \Omega. \end{aligned}$$

Sada je, prema Omovom zakonu za prosto kolo

$$I(E_2) = \frac{E_2}{R_e} = \frac{20}{\frac{400}{3}} = 150 \text{ mA},$$

a napon

$$U_{12} = (R_3 + R_4) I(E_2) - E_2 = 15 - 20 = -5,$$

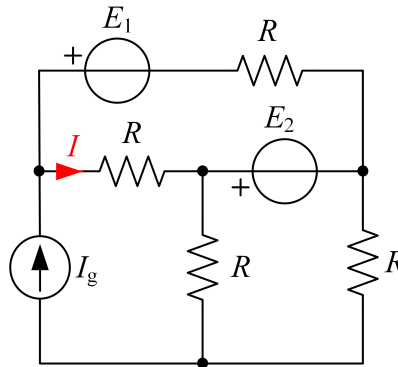
pa je

$$I(E_2) = \frac{U_{12}}{R_2} = \frac{-5}{100} = -50 \text{ mA}.$$

Konačno,

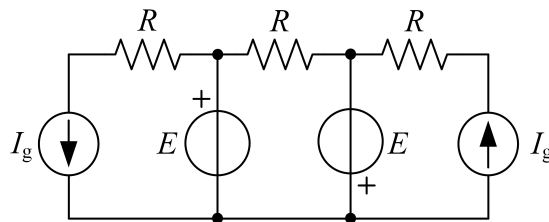
$$\begin{aligned} I_2 &= I_2(E_1) + I_2(I_g) + I_2(E_2) \\ &= 10 + 250 - 50 = 210 \text{ mA}. \end{aligned}$$

9. (Za samostalni rad) Primenom teoreme superpozicije, izračunati struju I u kolu. Poznato je $E_1 = 12 \text{ V}$, $E_2 = 6 \text{ V}$, $I_g = 2 \text{ mA}$ i $R = 2 \text{ k}\Omega$.



REZULTAT: $I = 2,5 \text{ mA}$.

10. (Za samostalni rad) Za prikazano kolo, proizvoljnom metodom izračunati ukupnu snagu otpornika. Poznato je $E = 1 \text{ V}$, $I_g = 1 \text{ A}$ i $R = 1 \Omega$.



REZULTAT: $P_{Ruk} = 6 \text{ W}$.