

Mehanika leta projektila – II

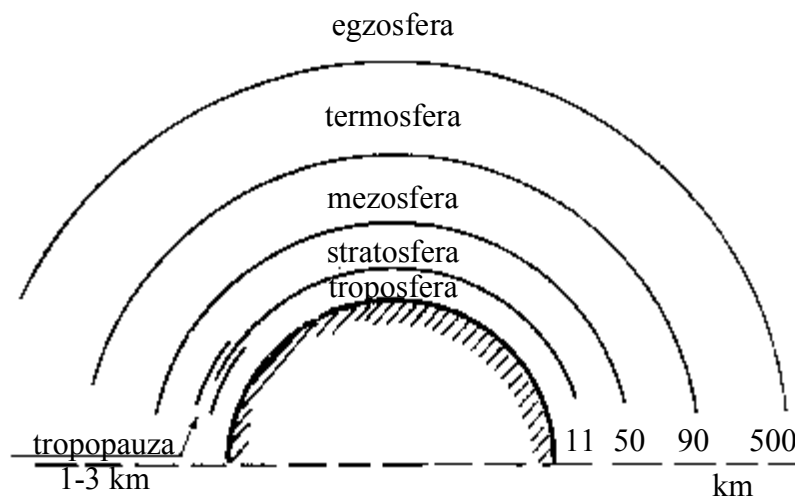
Spoljni uslovi – Karakteristike okoline

Zemljina atmosfera

Vazdušni omotač koji okružuje Zemlju naziva se atmosfera. Od Zemljine površine do 5 km visine nalazi se 50% celokupne mase vazduha, 90% do 20 km visine, a oko 99% do 30 do 35 km visine. Gornju granicu do koje se prostire atmosfera određuje prelazni sloj iz koga se izbačeni molekuli vazduha više ne vraćaju u atmosferu. Celokupna masa Zemljine atmosfere čini nešto manje od jednog milionitog dela Zemljine mase.

Podela atmosfere na temperaturne

Osnovni fizički parametri atmosfere – gustina, temperatura, pritisak, brzina zvuka i vetar, svojim vrednostima utiču na karakteristike kretanja tela (aerodinamička sila). Ukoliko se temperatura vazduha posmatra kao osnovni parametar, što je od velikog interesa za proračune dinamike leta, atmosferu možemo podeliti na pet osnovnih slojeva prema karakteru raspodele temperature sa visinom: troposfera, stratosfera, mezosfera, termosfera i egzosfera.



Sl. 1.1 Podela atmosfere na slojeve

Troposfera sadrži 75 % ukupne mase atmosfere i prostire se do 11 km visine. Visina ovog sloja opada ka polovima a raste u ekvatorijalnim oblastima (do 16 km). Visina troposfere zavisi od godišnjeg doba i povećava se ljeti a smanjuje zimi.

Temperatura vazduha u proseku opada **6,5 C** na svakih hiljadu metara. Troposfera sadrži glavni deo vodene pare i zbog toga se u njoj stvaraju oblaci koji daju padavine. Značajno mesto zauzimaju horizontalna i vertikalna kretanja vazdušnih masa – vetrovi. Promena matematičkog očekivanja konstantnog srednjeg vetra sa visinom može se približno opisati stepenim zakonom:

$$\frac{W_0}{W_{01}} = \left(\frac{H}{H_1} \right)^n \quad (1.1)$$

gde je indeksom "1" označena etalon.

Vrednost stepena n zavisi od meteoroloških uslova i kreće se u granicama od 0.15 do 0.2.

Tropopauza je prelazni sloj atmosfere između troposfere i stratosfere. Obično ima debljinu od 1 do 3 km. U njoj prestaje opadanje temperature sa visinom, dok su dnevne promene temperature najveće. Značajna je zbog pojave tropskih vetrova koji mogu da dostignu brzinu do 110 m/s (sl.). Tropski vetar nastaje kretanjem toplog vazduha od ekvatora ka polovima, a njegov intenzitet zavisi od razlike temperatura. Usled obrtanja Zemlje javlja se Coriolis-Koriolisova sila koja menja pravac vetra i na severnoj hemisferi skreće ga od jugozapada ka severoistoku, a na južnoj od severozapada ka jugoistoku.

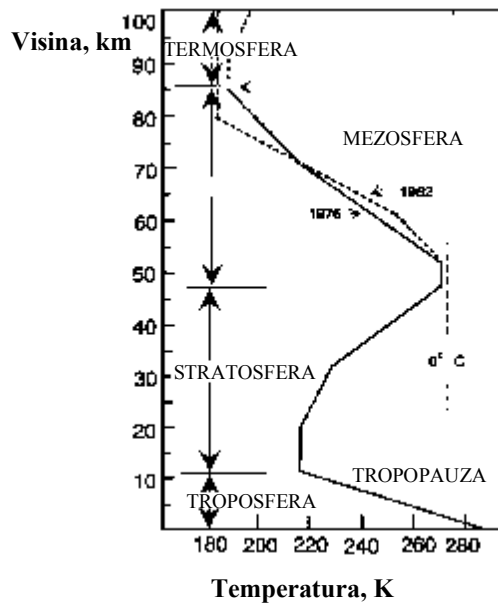
Sledeći sloj – stratosfera, prostire se od 11000 do 50000 m iznad Zemljine površine. Do visine od 35000 m temperatura je konstantna i njena srednja vrednost iznosi **-56.5 C**. Sa daljim porastom visine temperatura raste i približava se vrednosti od **0 C**. Ovo povećanje temperature posledica je povećane količine ozona koja apsorbuje toplotnu energiju ultravioletnog zračenja i zagreva se. Stratosfera je sloj u kome još mogu da rade motori koji koriste vazduh za sagorevanje goriva (turbomlazni i nabojno-mlazni motori).

Sloj atmosfere od 50000 do 90000 m naziva se mezosfera. U donjim slojevima temperatura dostiže **0 C**, a zatim ponovo opada. Nagli pad temperature, koji je posledica smanjene količine ozona, uzrok je pojave jakih vertikalnih strujanja.

Termosfera se prostire od 90 000 do 500 000 m. U ovoj zoni se dolazi do snažne jonizacije vazduha pod uticajem ultravioletnog zračenja Sunca, tako da se temperatura ponovo povećava i dostiže vrednosti i do **773 C**. Međutim, ovo nije termodinamika temperatura, jer vazduh više ne možemo posmatrati kao fluid već kao skup čestica (molekula) na koji se ne može primeniti kinetička teorija gasova (slobodno-molekularno kretanje).

Sloj iznad termosfere naziva se egzosfera. Atmosfera je znatno razređena tako da je gustina reda veličine molekula. Čestice gasova kreću se brzinama koje mogu biti i veće od brzine odvajanja od polja gravitacije Zemlje, koja iznosi 7.9 km/s. Zbog toga takve čestice savlađuju silu Zemljine teže i odlaze u međuplanetarni prostor.

Promena temperature sa visinom data je na sl.1.2.



SI 1.2. Promena temperature sa visinom

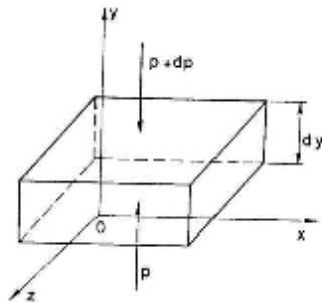
Važne karakteristike atmosfere su pritisak i gustina, koje su povezane sa temperaturom, tj. sa porastom visine monotono opadaju. Promene u horizontalnom pravcu u posmatranom trenutku vremena su neznatne. Zakon promene pritiska sa visinom izveden je pod pretpostavkom da ne postoje strujanja vazduha. Sloj vazduha visine dH nalazi se u stanju ravnoteže, tako da je razlika pritiska koji deluju na gornju i donju površinu sloja S jednaka težini sloja vazduha:

$$S(p + dp) - Sp = -SdH \rho g \quad (1.2)$$

$$dp = -\rho g dH \quad (1.3)$$

$$S(p + dp) - Sp = -SdH \rho g \quad (1.4)$$

$$dp = -\rho g dH \quad (1.5)$$



Koristeći jednačinu stanja

$$p = \rho RT \quad (1-6)$$

dobija se:

$$\frac{dp}{p} = -\frac{g}{RT} dH \quad (1-7)$$

Sa porastom nadmorske visine gustina vazduha opada, otpor kretanju projektila se smanjuje, što uslovljava povećanje dometa projektila. Ovaj podenostavljeni model atmosfere se koristi za proračun *standardne atmosfere*.

Sastav atmosfere

Atmosfera je smeša nekoliko osnovnih gasova, hemijskih jedinjenja i raznih gasovitih, tečnih i čvrstih primesa. U prizemnim slojevima ima približno sledeći sastav:

Azot	N ₂	78.03 %
Kiseonik	O ₂	21.99 %
Argon	Ar	0.94 %
Ugljendioksid	CO ₂	0.03 %
Vodonik	H ₂	0.01 %

kao i male količine drugih gasova i vodene pare. Zbog toga što je atmosfera mešavina gasova različitih osobina, komponente ove mešavine se raspoređuju po visini u različitim odnosima shodno njihovoj gustini. S porastom visine količina kiseonika i azota opada, najpre lagano pa sve brže i brže, ustupajući mesto lakšim komponentama. Vodena para, najvažnija primesa vazduha, omogućava stvaranje oblaka i padavina, slabi Sunčevo zračenje i čuva toplotu koju Zemlja zrači.

Zemlja i njeno gravitaciono polje

Kretanje Zemlje

Zemlja izvodi složeno kretanje koje se sastoji od sledećih kretanja:

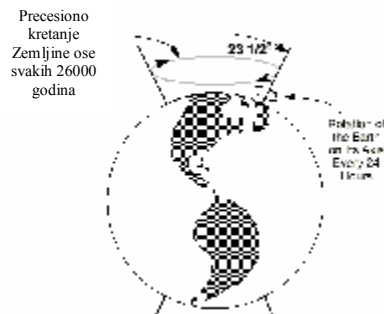
- obrtanje oko sopstvene ose sa zapada na istok, sa periodom od 23 h 56 min 4,091 s što je jednako 86164,091 s srednjeg sunčevog vremena. Dužina dana od 24 h predstavlja relativnu ugaonu brzinu zemlje u odnosu na sunce koja obuhvata ne

samo rotaciju oko sopstvene ose već i rotaciju na putanji oko sunca Ugaona brzina rotacije zemlje jednaka je:

$$\Omega = \frac{2\pi}{86164.091} = 7.292115 \cdot 10^{-5} \text{ rad/s}$$

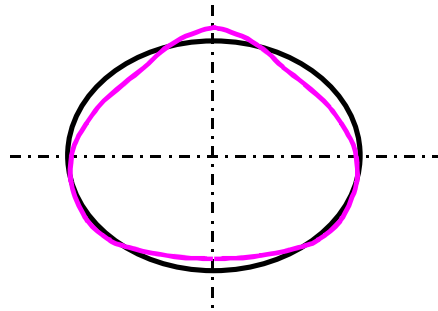
- Vektor ugaone brzine Zemlje ima pravac ose rotacije a usmeren je od južnog ka severnom polu.
- godišnje obrtanje oko Sunca sa srednjom brzinom kretanja po orbiti od 100 000 km/h ima period 365 dana, 6 časova i 9 minuta.
- nutaciono kretanje zemljine ose sa periodom oko 18,6 godina i amplitudom koja ne prelazi **9,2"**
- precesiono kretanje zemljine ose je posledica uticaja gravitacije Meseca, koja teži da pomeri zemljinu osu normalno na ravan njegove orbite. Zemljina osa opisuje krug od **23,5°** sa periodom oko 26000 godina.
- kretanje zajedno sa sunčevim sistemom u odnosu na druge zvezde.

Pri određivanju leta projektila sva ova složena kretanja Zemlje (osim prvog – rotacije oko sopstvene ose) imaju zanemarljiv uticaj. Uticaji povezani sa rotacijom Zemlje igraju veoma veliku ulogu u dinamici balističkih raketa srednjeg i velikog dometa..



Oblik Zemlje

Zemlja nije savršena lopta već je znatno bliža elipsoidu (osa koincidentna sa osom rotacije je nešto kraća od ekvatorijalne ose). Metodama preciznog merenja poremećaja putanja veštačkih satelita ustanovljena je veća spljoštenost južne Zemljine polulopte u odnosu na severnu. Ovo ukazuje da je Zemljin opšti oblik sličan krušci i naziva se *apioid*.

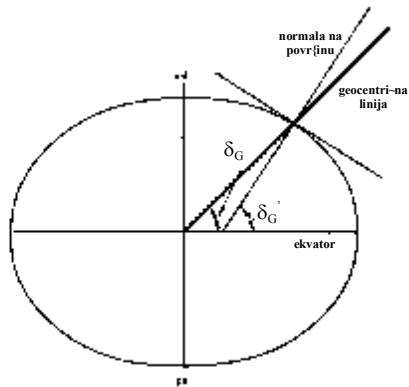


sl. 1.4. Oblik Zemlje - apioid

Najjednostavnija aproksimacija oblika zemlje je ipak lopta prečnika **6371005 m** (međunarodni standard WGS-84). Ova aproksimacija daje sasvim zadovoljavajuće rezultate za domete do 1000 km. Međutim, za veće domete je neophodna preciznija aproksimacija.

Površina Zemlje sa svim svojim neravninama naziva se fizička površina Zemlje. Fizičku površinu Zemlje je praktično nemoguće opisati matematički. Zbog toga je potrebno odrediti telo koje bi po obliku i razmeri bilo najbliže Zemlji, a čija bi se površina mogla matematički opisati.

Od svih geometrijskih tela geoid predstavlja najbliži opis realne Zemljine površine. Ako bi Zemlja predstavljala fluidno telo, sa istom raspodelom mase, pod dejstvom Zemljine rotacije njena slobodna površina bi predstavljala geoid. Geoid predstavlja ekvipotencijalnu površinu Zemljinog gravitacionog polja, koja se poklapa sa neporemećenim srednjim nivoom mora. Ova površina se prostire ispod kontinenata. Pravac lokalnog "efektivnog" gravitacionog polja je svuda duž normale na površinu geoida. Veličina geoida je određena srednjim nivoom mora; a oblik je određen vektorom lokalnog efektivnog gravitacionog ubrzanja ili efektivne gravitacione sile (sile teže) koja je normalna na površinu geoida u svakoj tački. Ovo je necentrično gravitacionog polje koje se koristi za analizu interkontinentalnih letova i putanja satelita.

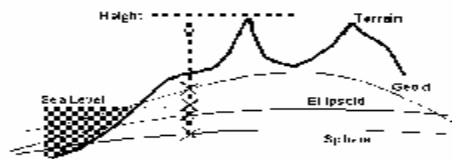


SI 1.5. Eliptični poprečni presek Zemlje

Referentni elipsoid je najjednostavnija matematička figura koja je najbliža geoidu. Ova figura se dobija rotacijom elipse ($a=6378137$ m, $b=6356752.3$ m) oko male ose, koja odgovara Zemljinoj osi obrtanja. Rezultat je sferoid ili obrtni elipsoid.

Iz poremećaja putanja Zemljinih veštačkih satelita zaključeno je da opšti oblik Zemlje nije obrtni, već troosni elipsoid, odnosno da je i Zemljin ekvator elipsa. Velika osa ekvatorske elipse duža je za oko 400 m od male ose.

Za relativno najjednostavniji matematički opis Zemljine površine, neophodan za navigaciju, smatraće se sfera.



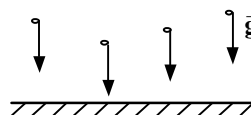
Zemljino gravitaciono polje

Spoljna balistika razmatra kretanje tela u centralnom gravitacionom polju Zemlje.

Za domete manje od 100 km, Zemlju možemo smatrati ravnom površinom sa homogenim gravitacionim poljem. Ovaj model nije puno u upotrebi.

Homogeno paralelno gravitaciono polje

Ubrzanje sile privlačenja ne zavisi od visine i usmereno je po normali na površinu Zemlje ($g=\text{const}$).



Centralno gravitaciono polje

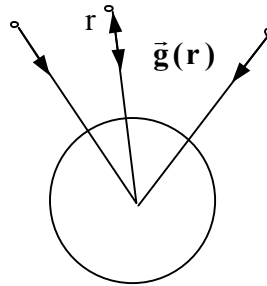
Ubrzanje sile privlačenja obrnuto je proporcionalno kvadratu rastojanja do centra Zemlje i usmereno je po radijusu ka centru Zemlje. Vektor ubrzanja sile privlačenja u centralnom polju dat je jednačinom:

$$\vec{g} = -\frac{\Gamma \cdot M}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r} \quad (1-8)$$

gde je:

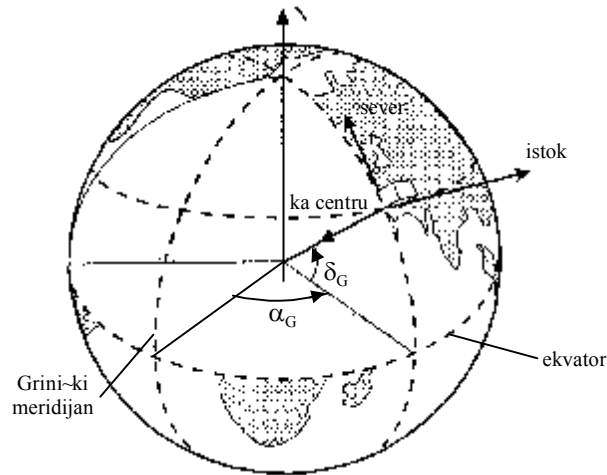
- Γ - gravitaciona konstanta
- M - masa Zemlje
- r - rastojanje između centra Zemlje i centra mase projektila

$$\Gamma M = 3,986004418 \cdot 10^{14} m^3 / s^2$$



Zemaljske koordinate

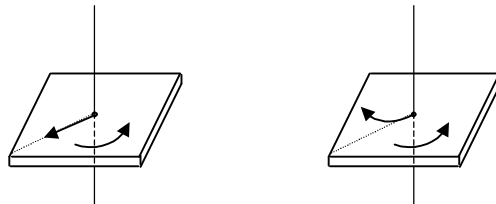
Ekvator je zamišljeni krug na površini sfere čiji se centar poklapa sa centrom sfere. Veliki krugovi koji prolaze kroz severni i južni pol se nazivaju meridijani, ili linije geografskih dužina. Na bilo kojoj tački na Zemljinoj površini može se definisati meridijan. Osnovni meridijan, od koga se mere istočni i zapadni meridijani, predstavlja meridijan koji označava položaj Kraljevske opservatorije u Griniču, Engleska. Geografska dužina (α_G) se izražava u stepenima, minutima i sekundima po luku od 0 do 180 stepeni istočno ili zapadno od osnovnog meridijana. Početna tačka od koje se mere severne i južne koordinate na Zemljinoj površini je ekvator. Krugovi u paralelnim ravnima koji se mere severno i južno u odnosu na ekvator nazivaju se paralele ili linije geografske širine. Geografska širina (δ_G) se takodje izražava u stepenima, minutima i sekundama po luku u odnosu na centar Zemlje.



Sisteme referencije možemo podeliti na inercijalne i neinercijalne. Neinercijalni sistemi imaju ubrzanje u odnosu na zvezde nekretnice i u odnosu na Suncu. Svaki sistem koji rotira nije inercijalni sistem (jer na njega deluje ubrzanje normalno na pravac vektora brzine). Ukoliko postoji relativno kretanje inercijalnog sistema ono je bez ubrzanja, odnosno ravnomerno pravolinijsko. U inercijalnim sistemima važi Newton-ov zakon inercije.

Zbog kratkog vremena leta projektila, može se uzeti u obzir samo Zemljino obrtno kretanje oko sopstvene ose. Koordinatni sistem koji je vezan za centar Zemlje i ne rotira zajedno sa Zemljom možemo smatrati inercijalnim. Koordinatni sistem koji je vezan za bilo koju tačku na površini Zemlje je neinercijalni jer rotira zajedno sa Zemljom. Međutim, za određene slučajeve (relativno kratki dometi i relativno male brzine leta), koordinatni sistem koji rotira zajedno sa zemljom može se uslovno smatrati inercijalnim.

Za posmatrača koji se nalazi u neinercijalnom koordinatnom sistemu kretanje tela biće sasvim drugačije nego za posmatrača u inercijalnom koordinatnom sistemu. Razmotrimo primer ploče koja se obrće oko vertikalne ose koja prolazi kroz sredinu ploče.



Neka se nekoj kugli koja se nalazi na osi rotacije, saopšti samo početna brzina u radijalnom pravcu. Za posmatrača izvan ploče (u inercijalnom koordinatnom sistemu) kugla će se kretati pravolinijski konstantnom brzinom, bez ikakvog ubrzanja (trenje se zanemaruje). Kretanje kugle za posmatrača na ploči (u neinercijalnom koordinatnom sistemu) biće krivolinijsko, odnosno sa ubrzanjem. Kugla će skretati sa pravca u kome je dobila početnu brzinu i to skretanje će biti suprotno od smera rotacije ploče. Posmatrač u neinercijalnom koordinatnom sistemu može zaključiti da na kuglu deluje sila upravna na pravac početne brzine i vrši skretanje sa tog pravca po kome bi se kugla kretala po inerciji. Ova sila se zove Coriolisova sila i može se izračunati pomoću izraza:

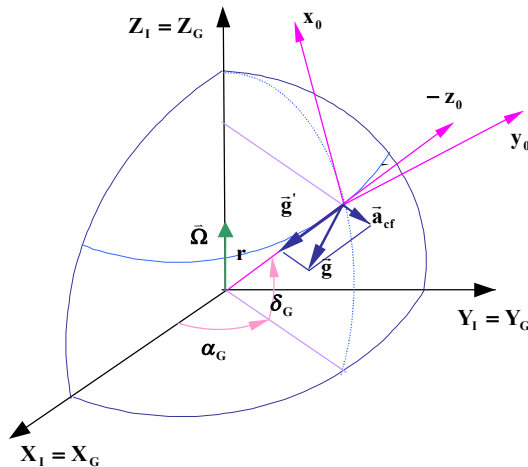
$$\vec{F}_C = -2m (\vec{\omega} \times \vec{V}) \quad (1-9)$$

Coriolisova sila je matematička, fiktivna veličina (koja u osnovi predstavlja inercijalnu silu), koja se mora uzeti u obzir pri posmatranju kretanja tela u neinercijalnim sistemima.

Posmatrač u neinercijalnom koordinatnom sistemu mora uzeti u obzir i rotaciju Zemlje preko centrifugalnog ubrzanja (koje je takodje fiktivna veličina koja u osnovi predstavlja silu inercije):

$$\begin{aligned} \vec{a}_{cf} &= (\vec{r} \times \vec{\Omega}) \times \vec{\Omega} \\ |\vec{a}_{cf}| &= r \cdot \Omega^2 \cos \delta_G \end{aligned} \quad (1-10)$$

gde je δ_G geografska širina.



Sila teže ili efektivna gravitaciona sila predstavlja vektorski zbir sile privlačenja (gravitacione sile) i prenosne inercijalne sile (centrifugalne sile):

$$\vec{G} = \vec{G}' + \vec{F}_{pn}^{in} \quad (1-11)$$

gde je prenosna inercijalna sila (centrifugalna sila) data jednačinom:

$$\vec{F}_{pn}^{in} = m \cdot \vec{a}_{cf} \quad (1-12)$$