Mehanika leta projektila – III

KOORDINATNI SISTEMI

Svi koordinatni sistemi u daljem tekstu su izvedeni na bazi predloženog ANSI Standarda koordinatnih sistema za atmosferski let (Prilog 1) , obzirom da neki drugi standard (međunarodni ili jugoslovenski) i ne postoji. U podnaslovima su dati puni nazivi koordinatnih sistema, dok su skraćeni nazivi (koji će biti korišćeni u daljem tekstu) dati kurzivom.

Geocentrični inercijalni sistem

Inercijalni koordinatni sistem, fiksiran u prostoru:

0 - u centru Zemlje

X_I - u početnom trenutku (trenutak starta) prolazi kroz presek ekvatora i Grenwich-kog meridijana ili meridijana lansirne tačke u pravcu neba

Y_I - kompletira desni trijedar

Z_I - koincidentna sa zemljinom glavnom (obrtnom) osom u pravcu severa

U daljem tekstu, ovaj koordinatni sistem ćemo nazivati skraćeno ***Inercijalni koordinatni sistem.***

Geocentrični sistem vezan za Zemlju

Koordinatni sistem vezan za Zemlju (rotira zajedno sa Zemljom):

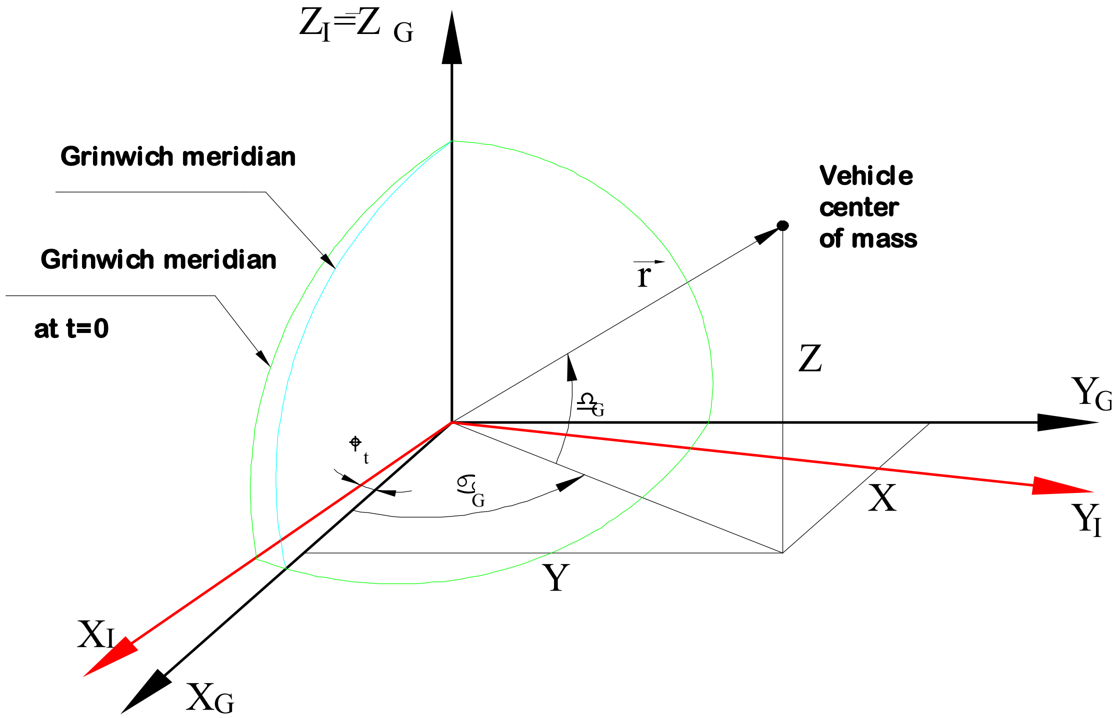
0 - u centru Zemlje

X_G - prolazi kroz presek ekvatora i Grenwich-kog meridijana ili meridijana lansirne tačke u pravcu neba

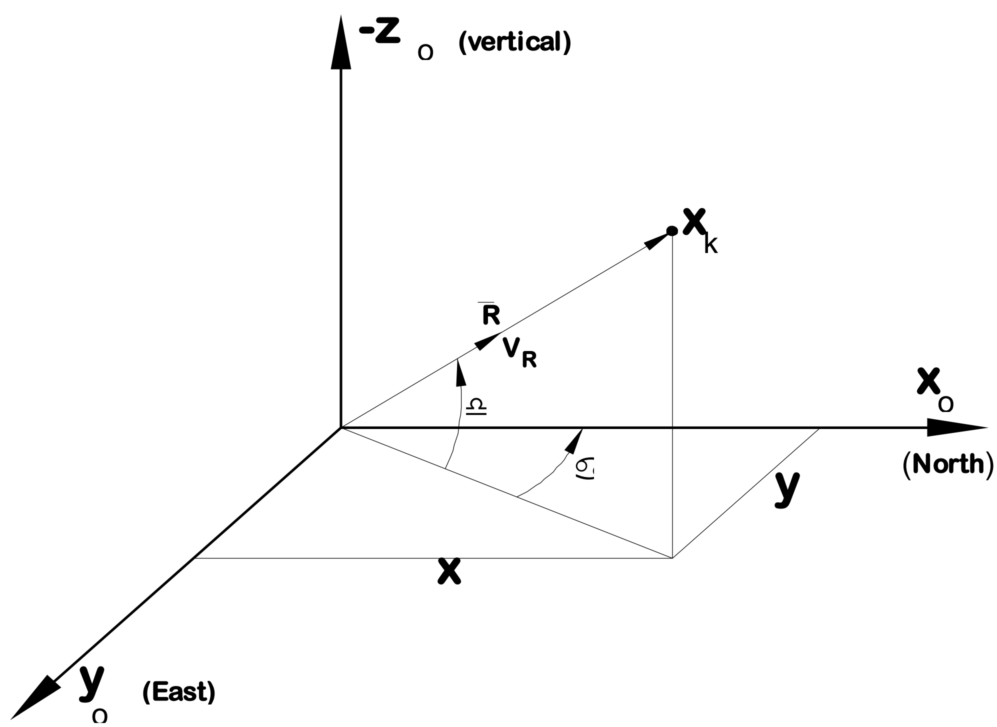
Y_G - kompletira desni trijedar

Z_G - koincidentna sa zemljinom glavnom (obrtnom) osom u pravcu severa

U daljem tekstu, ovaj koordinatni sistem ćemo nazivati skraćeno ***Geocentrični koordinatni sistem.***



Z_I=Z_G
Grinwich meridian
Grinwich meridian
at t=0
Vehicle
center
of mass
r
Z
Y_G
X
Y_I
Y
X_I
X_G



-z_o (vertical)
x_k
R
V_R
x_o
(North)
y
x
y_o (East)

Sl.2.13. Geocentrični sistem vezan za Zemlju

Normalni sistem vezan za Zemlju

Normalni sistem vezan za Zemlju:

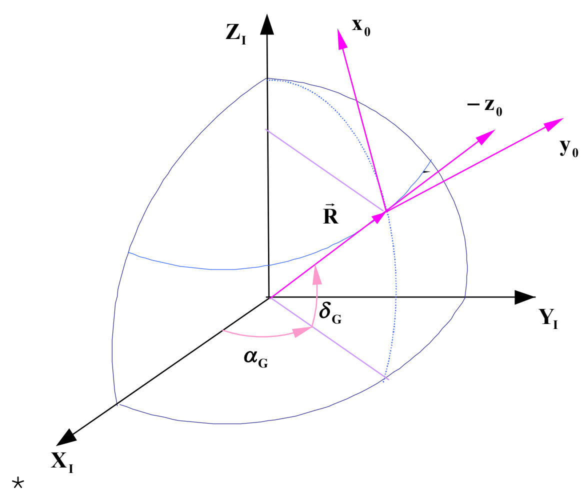
0 - u projekciji centra masa projektila na zemljinu površinu

x_0 - horizontalna, u pravcu severa,

y_0 - horizontalna, u pravcu istoka

z_0 - vertikalna, u pravcu centra Zemlje

U daljem tekstu, ovaj koordinatni sistem ćemo nazivati skraćeno ***Normalni koordinatni sistem.***



Sl.2.14 Normalni sistem vezan za Zemlju

Azimutalni sistem vezan za Zemlju

Azimutalni sistem vezan za zemlju predstavlja Normalni koordinatni sistem zaokrenut za ugao lansirnog azimuta oko $\mathbf{z_0}$-ose

0 - u projekciji centra masa projektila na zemljinu površinu

x_A - horizontalna, u pravcu zaokrenutom za ugao **AZ** u odnosu na sever,

y_A - horizontalna, u pravcu zaokrenutom za **AZ** u odnosu na istok,

z_A - vertikalna, u pravcu centra Zemlje (koincidentna sa z_o

U daljem tekstu ovaj koordinatni sistem ćemo nazivati skraćeno ***Azimutalni koordinatni sistem***.

Sistem vezan za projektil

Sistem vezan za projektil:

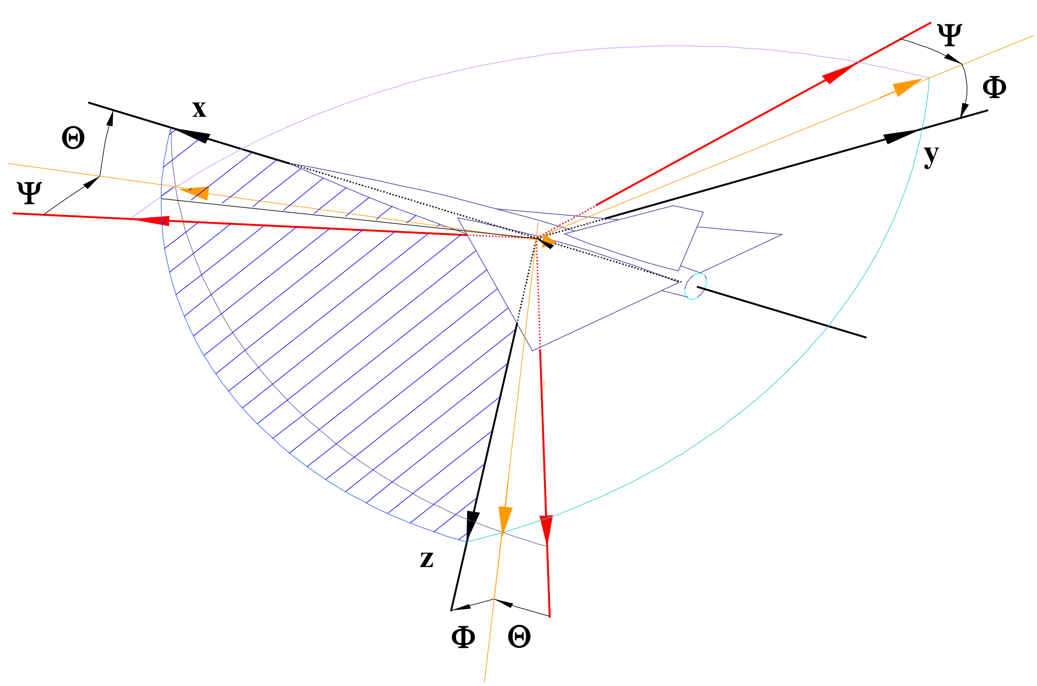
0 - u centru masa projektila

x - koincidentna sa glavnom (uzdužnom) osom projektila (glavnom inercionom osom)

y - koincidentna sa poprečnom osom projektila (pozitivan smer - desno)

z - koincidentna sa normalnom osom projektila (smer takav da formira desni trijedar)

U daljem tekstu, ovaj koordinatni sistem ćemo nazivati skraćeno ***Vezani koordinatni sistem.***



Sl.2.15 Normalni sistem vezan za projektil

Sistem vezan za aerodinamičku brzinu projektila

Sistem vezan za aerodinamičku brzinu projektila

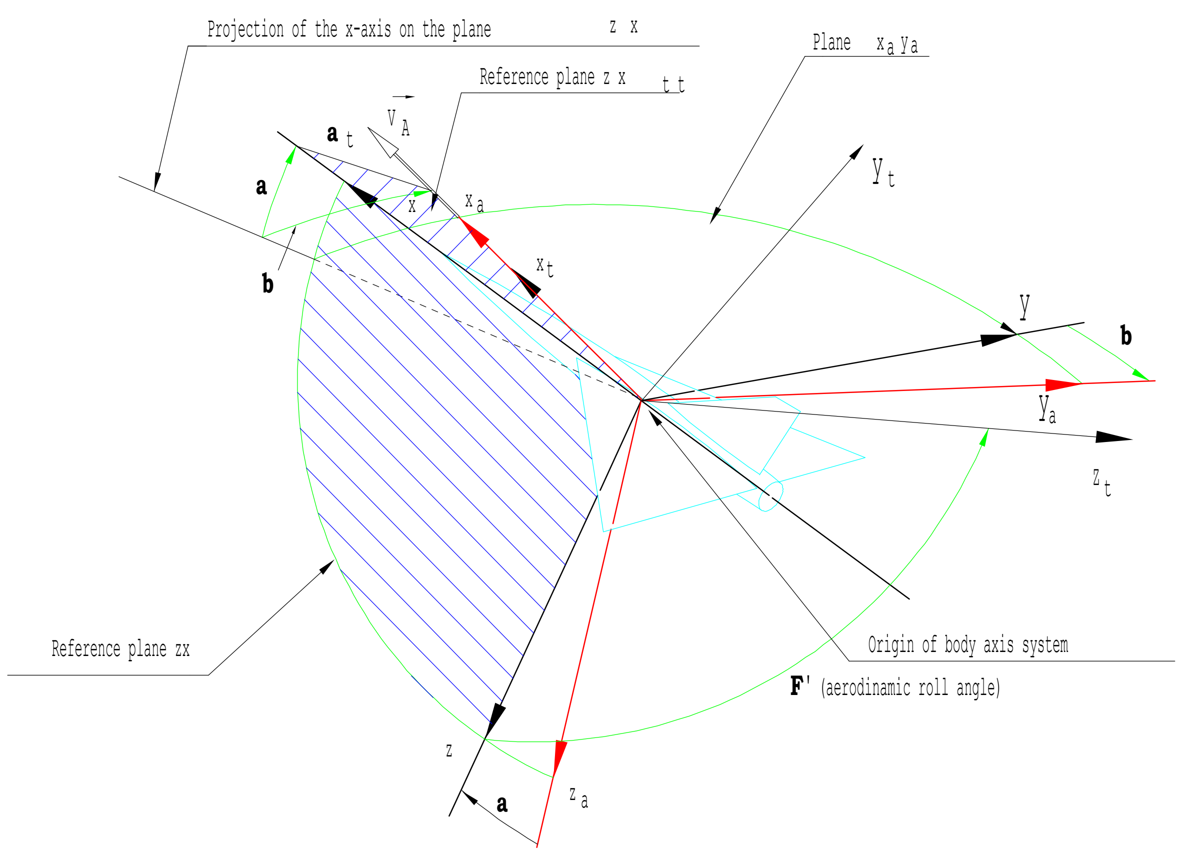
0 - u centru masa projektila

x_a - koincidentan sa vektorom aerodinamičke brzine projektila

y_a - normalan na aerodinamičku brzinu, u normalnoj ravni projektila (pravac "nagore")

z_a - normalan na aerodinamičku brzinu, u poprečnoj ravni projektila (pravac takav da gradi desni trijedar)

U daljem tekstu, ovaj koordinatni sistem ćemo nazivati skraćeno ***Brzinski koordinatni sistem.***



Sl.2.16 Brzinski i koordinatni sistem projektila

Sistem vezan za žiroskopsku platformu

Inercijalni sistem, u početnom trenutku (trenutak lansiranja) identičan sistemu vezanom za projektil

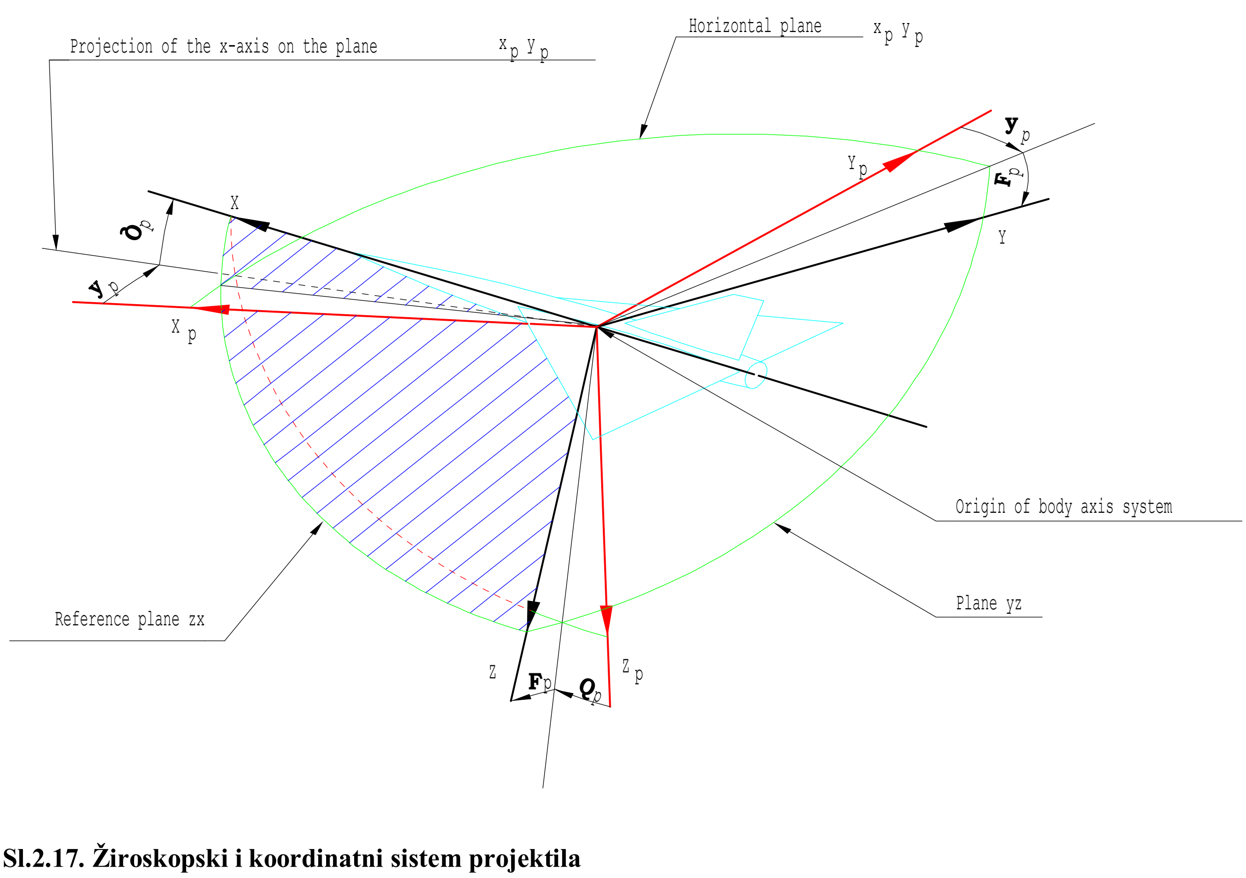
0 - u centru masa projektila

x_p - koincidentan sa x osom u trenutku lansiranja

y_p - koincidentan sa y osom u trenutnku lansiranja

z_p - koincidentan sa z osom u trenutnku lansiranja

U daljem tekstu, ovaj koordinatni sistem ćemo nazivati skraćeno ***Žiroskopski koordinatni sistem.***



Sl.2.17. Žiroskopski i koordinatni sistem projektila

MATRICE TRANSFORMACIJE

U sledećim sekcijama će biti definisane i određene sve matrice transformacije iz jednog sistema u drugi.

Inercijalni u Geocentrični vezan za Zemlju

Matrica transformacije iz Inercijalnog u Geocentrični koordinatni sistem, je definisana vrednošću ugla rotacije Zemlje (u odnosu na položaj u trenutku lansiranja):

$$\begin{bmatrix} X_G \\ Y_G \\ Z_G \end{bmatrix} = T_I^G \begin{bmatrix} X_I \\ Y_I \\ Z_I \end{bmatrix} \qquad \textbf{(0-1)}$$

$$T_I^G = \begin{bmatrix} \cos(\Omega t) & \sin(\Omega t) & 0 \\ -\sin(\Omega t) & \cos(\Omega t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \textbf{(0-2)}$$

$$\begin{bmatrix} X_I \\ Y_I \\ Z_I \end{bmatrix} = T_G^I \begin{bmatrix} X_G \\ Y_G \\ Z_G \end{bmatrix} \qquad \textbf{(0-3)}$$

$$T_G^I = (T_I^G)^T$$

Geocentrični u Normalni

Matrica transformacije iz Geocentričnog u Normalni je definisana vrednošću uglovnih geografskih koordinata (geografske širine i dužine):

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} = T_G^0 \begin{bmatrix} X_G \\ Y_G \\ Z_G \end{bmatrix} \qquad \textbf{(0-4)}$$

$$T_G^0 = \begin{bmatrix} -\sin\delta_G \cos\alpha_G & -\sin\delta_G \sin\alpha_G & \cos\delta_G \\ -\sin\alpha_G & \cos\alpha_G & 0 \\ -\cos\delta_G \cos\alpha_G & -\cos\delta_G \sin\alpha_G & -\sin\delta_G \end{bmatrix} \qquad \textbf{(0-5)}$$

$$\begin{bmatrix} X_G \\ Y_G \\ Z_G \end{bmatrix} = T_0^G \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} \quad \textbf{(0-6)}$$

$$T_0^G = (T_G^0)^T$$

Normalni u Azimutalni

$$\begin{bmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{bmatrix} = T_0^A \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} \quad \textbf{(0-7)}$$

$$T_0^A = \quad \textbf{(0-8)}$$

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} = T_A^0 \begin{bmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{bmatrix} \quad \textbf{(0-9)}$$

Inercijalni u Normalni

Matrica transformacije iz Inercijalnog u Normalni sistem je definisana vrednostima prethodne dve matrice transformacije:

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} = \mathbf{T}_I^0 \begin{bmatrix} X_I \\ Y_I \\ Z_I \end{bmatrix} \quad \textbf{(0-10)}$$

$$\mathbf{T}_I^0 = \mathbf{T}_G^0 \mathbf{T}_I^G$$

$$\begin{bmatrix} X_I \\ Y_I \\ Z_I \end{bmatrix} = \mathbf{T}_0^I \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} \quad \textbf{(0-11)}$$

$$\mathbf{T}_0^I = (\mathbf{T}_I^0)^{\mathbf{T}}$$

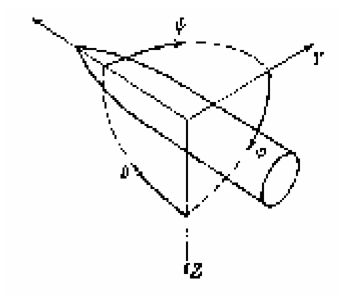
Inercijalni u Vezani

Matrica transformacije iz Inercijalnog u Vezani koordinatni sistem definisana je vrednostima Euler-ovih uglova:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = T_I^m \begin{bmatrix} X_I \\ Y_I \\ Z_I \end{bmatrix} \quad \textbf{(0-12)}$$

$$T_I^m = \begin{bmatrix} \cos\Psi\cos\Theta & \sin\Psi\cos\Theta & -\sin\Theta \\ -\sin\Psi\cos\Phi + \cos\Psi\sin\Theta\sin\Phi & \cos\Psi\cos\Phi + \sin\Psi\sin\Theta\sin\Phi & \cos\Theta\sin\Phi \\ \sin\Psi\sin\Phi + \cos\Psi\sin\Theta\cos\Phi & -\cos\Psi\sin\Phi + \sin\Psi\sin\Theta\cos\Phi & \cos\Theta\cos\Phi \end{bmatrix} \quad \textbf{(0-13)}$$

Pozitivan smer rotacije koordinatnog sistema za vrednosti Euler-ovih uglova dat je na slici….prema tablici 2.4.

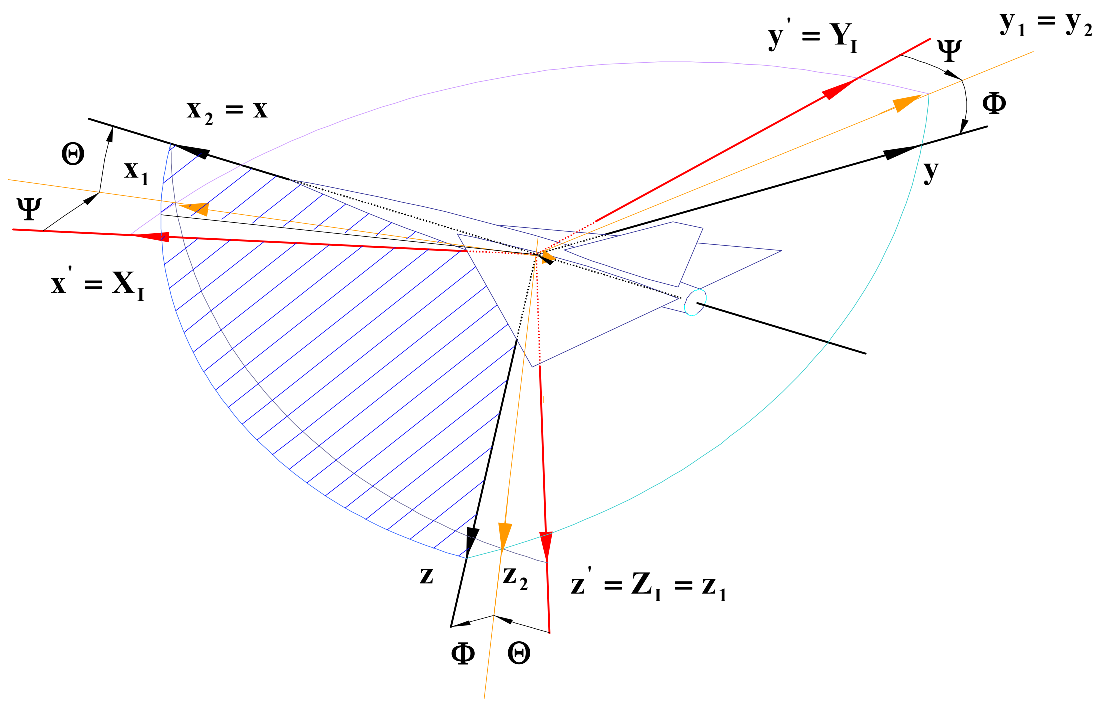


Sl.2.13-a.

Table 0-1

Ose		**SILA**	**Momenti oko ose**			**Uglovi**		**Brzine**	
Oznaka	**Simbol**		**Oznaka**	**Simb**	**Pozitiv. smer**	**Oznaka**	**Simb**	**Translatorna**	**Ugaona**
Uzdužna	**X**	**X**	**Valjanje**	**L**	**Y→Z**	**Valjanje**	φ	**u**	**p**
Bočna	**Y**	**Y**	**Propinjanje**	**M**	**Z→X**	**Propinjanje**	θ	**v**	**q**
Normal	**Z**	**Z**	**Skretanje**	*N*	**X→Y**	**Skretanje**	ψ	**w**	**r**

Tablica 2.4. Standardne konvencije i simboli



Sl.2.18 Vezani i Inercijalni koordinatni sistem

Jednostavniji način određivanja matrice transformacije iz Inercijalnog u Vezani sistem je uvođenjem kvaterniona (Prilog …). Tri rotacije projektila za vrednosti Euler-ovih uglova zamenjuju se jednom rotacijom oko odgovarajuće ose koju definišu kvaternioni:

$$T_I^m = \begin{bmatrix} e_3^2+e_0^2-e_1^2-e_2^2 & 2(e_0e_1-e_2e_3) & 2(e_0e_2+e_1e_3) \\ 2(e_0e_1+e_2e_3) & e_3^2+e_1^2-e_0^2-e_2^2 & 2(e_1e_2-e_0e_3) \\ 2(e_0e_2-e_1e_3) & 2(e_1e_2+e_0e_3) & e_3^2+e_2^2-e_0^2-e_1^2 \end{bmatrix} \qquad \textbf{(0-14)}$$

$$\begin{bmatrix} X_I \\ Y_I \\ Z_I \end{bmatrix} = T_m^I \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \qquad \textbf{(0-15)}$$

$$T_m^I = (T_I^m)^T$$

Ovakav način prezentacije ima prednost jer omogućava da se izbegnu nedefinisane vrednosti izvoda Euler-ovih uglova u kinematskim jednačinama rotacije (**1.5.3**).

Geocentrični u Vezani

Matrica transformacije iz Geocentričnog u Vezani sistem je definisana na osnovu predhodnih matrica:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \mathbf{T}_G^m \begin{bmatrix} X_G \\ Y_G \\ Z_G \end{bmatrix} \qquad \textbf{(0-16)}$$

$$\mathbf{T}_G^m = \mathbf{T}_I^m (\mathbf{T}_G^I)$$

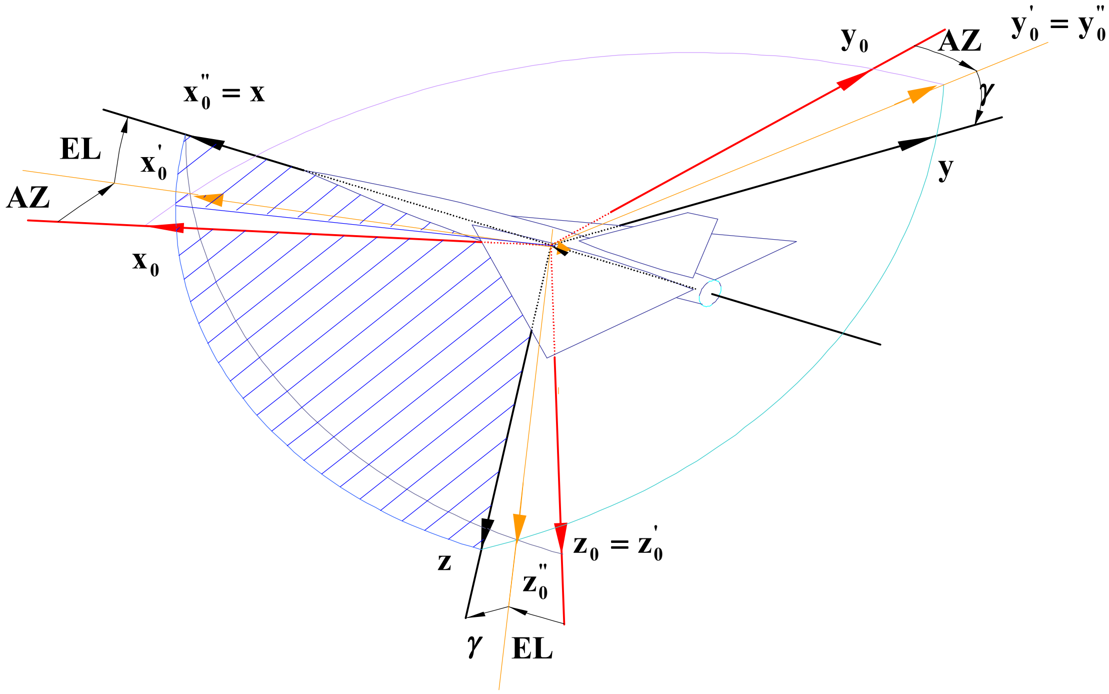
$$\begin{bmatrix} X_G \\ Y_G \\ Z_G \end{bmatrix} = \mathbf{T}_m^G \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \qquad \textbf{(0-17)}$$

$$\mathbf{T}_m^G = (\mathbf{T}_G^m)^T$$

Normalni u Vezani

Matrica transformacije iz Normalnog vezanog za Zemlju koordinatnog sistema u Vezani za projektil data je preko azimuta, elevacije i ugla valjanja oko y_0-ose:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = T_0^m \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} \qquad \textbf{(0-18)}$$



Sl.2.19 Normalni vezan za Zemlju i Vezani za projektil koordinatni sistem

$$T_0^m = \begin{bmatrix} \cos AZ \cos EL & \sin AZ \cos EL & -\sin EL \\ -\sin AZ \cos\gamma + \cos AZ \sin EL \sin\gamma & \cos AZ \cos\gamma + \sin AZ \sin EL \sin\gamma & \cos EL \sin\gamma \\ \sin AZ \sin\gamma + \cos AZ \sin EL \cos\gamma & -\cos AZ \sin\gamma + \sin AZ \sin EL \cos\gamma & \cos EL \cos\gamma \end{bmatrix}$$

(0-19)

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} = T_m^0 \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \qquad \textbf{(0-20)}$$

$$T_m^0 = \left(T_0^m\right)^T$$

Geocentrični u Vezani

Matrica transformacije iz Geocentričnog u Vezani za projektil koordinatni sistem određena je uglovnim geografskim koordinatama, azimutom, elevacijom i uglom valjanja:

$$T_G^m = T_0^m T_G^0 \tag{0-21}$$

$$T_G^m = \begin{bmatrix} -\cos AZ\cos EL\cos\alpha_G\sin\delta_G - \sin AZ\cos EL & -\cos AZ\cos EL\sin\alpha_G\sin\delta_G + \sin AZ\cos EL & \cos AZ\cos EL\cos\delta_G + \sin EL\cos\delta_G \\ \sin\alpha_G + \sin EL\cos\alpha_G\cos\delta_G & \cos\alpha_G + \sin EL\sin\alpha_G\cos\delta_G & \\ & & \\ -(-\sin AZ\cos\gamma + \cos AZ\sin EL\sin\gamma)\cos\alpha_G & -(-\sin AZ\cos\gamma + \cos AZ\sin EL\sin\gamma)\sin\alpha_G & (-\sin AZ\cos\gamma + \cos AZ\sin EL\sin\gamma) \\ \sin\delta_G - (\cos AZ\cos\gamma + \sin AZ\sin EL\sin\gamma) & \sin\delta_G + (\cos AZ\cos\gamma + \sin AZ\sin EL\sin\gamma) & \cos\delta_G - \cos EL\sin\gamma\sin\delta_G \\ \sin\alpha_G - \cos EL\sin\gamma\cos\alpha_G\cos\delta_G & \cos\alpha_G - \cos EL\sin\gamma\sin\alpha_G\cos\delta_G & \\ & & \\ -(\sin AZ\sin\gamma + \cos AZ\sin EL\cos\gamma)\cos\alpha_G & -(\sin AZ\sin\gamma + \cos AZ\sin EL\cos\gamma)\sin\alpha_G & (\sin AZ\sin\gamma + \cos AZ\sin EL\cos\gamma) \\ \sin\delta_G - (-\cos AZ\sin\gamma + \sin AZ\sin EL\cos\gamma) & \sin\delta_G + (-\cos AZ\sin\gamma + \sin AZ\sin EL\cos\gamma) & \cos\delta_G - \cos EL\cos\gamma\sin\delta_G \\ \sin\alpha_G - \cos EL\cos\gamma\cos\alpha_G\cos\delta_G & \cos\alpha_G - \cos EL\cos\gamma\sin\alpha_G\cos\delta_G & \end{bmatrix}$$

(0-22)

Transformacione matrice inercijalne platforme

Matrica transformacije iz Inercijalnog u Žiroskopski sistem je definisana na osnovu kvaterniona žiroskopske platforme:

$$\begin{bmatrix} x_p \\ y_p \\ z_p \end{bmatrix} = \mathbf{T}_p^m \begin{bmatrix} X_I \\ Y_I \\ Z_I \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{T}_p^m = \begin{bmatrix} g_0{}^2 + g_1{}^2 - g_2{}^2 - g_3{}^2 & 2(g_1g_2 + g_0g_3) & 2(g_1g_3 - g_0g_2) \\ 2(g_1g_2 - g_0g_3) & g_0{}^2 + g_2{}^2 - g_1{}^2 - g_3{}^2 & 2(g_2g_3 + g_0g_1) \\ 2(g_1g_3 + g_0g_2) & 2(g_2g_3 - g_0g_1) & g_0{}^2 + g_3{}^2 - g_1{}^2 - g_2{}^2 \end{bmatrix} \tag{0-23}$$

U slučaju fiksne, idealne žiroskopske platforme, vrednosti žiroskopskih kvaterniona je konstantna. U slučaju upravljanja promenom položaja rama platforme međutim, ove vrednosti će naravno biti promenljive, kao i u slučaju realne platforme (zbog drifta).

$$\begin{bmatrix} X_I \\ Y_I \\ Z_I \end{bmatrix} = \mathbf{T}_m^p \begin{bmatrix} x_p \\ y_p \\ z_p \end{bmatrix} \tag{0-24}$$

$$\mathbf{T}_m^I = (\mathbf{T}_I^m)^{\mathbf{T}}$$

Matrica transformacije iz Vezanog u Žiroskopski sistem je definisana na osnovu vrednosti prethodnih matrica:

$$\mathbf{T}_p^m = \mathbf{T}_I^m \mathbf{T}_p^I$$
$$\mathbf{T}_m^p = (\mathbf{T}_p^m)^T \qquad \textbf{(0-25)}$$

Euler-ovi uglovi projektila u odnosu na žiroskopsku platformu (uglovi greške) su definisani na osnovu žiroskopskih kvaterniona:

$$\Theta_p^m = \sin^{-1}(-t_{p\,13}^m)$$
$$\Phi_p^m = \tan^{-1}(t_{p\,23}^m / t_{p\,33}^m) \qquad \textbf{(0-26)}$$
$$\Psi_p^m = \tan^{-1}(t_{p\,12}^m / t_{p\,11}^m)$$

gde su $\mathbf{t}_{\mathbf{p}\ \mathrm{ij}}^{\mathbf{m}}$ koeficijenti u matrici transformacije iz Žiroskopskog u Vezani sistem:

$$\mathbf{T}_p^m = \begin{bmatrix} t_{p\,11}^m & t_{p\,12}^m & t_{p\,13}^m \\ t_{p\,21}^m & t_{p\,22}^m & t_{p\,23}^m \\ t_{p\,31}^m & t_{p\,32}^m & t_{p\,33}^m \end{bmatrix} \qquad \textbf{(0-27)}$$

Jednačine stanja

Euler-ovi uglovi

Euler-ovi uglovi se izračunavaju na osnovu vrednosti matrice transformacije iz Inercijalnog u Vezani koordinatni sistem, odnosno vrednosti kvaterniona a prema jednačinama (1-22) i (1-25):

$$\Phi = \arctan(t_{I\,23}^m / t_{I\,33}^m) = \arctan\left[\frac{2(e_2e_3 + e_0e_1)}{e_0^2 - e_1^2 - e_2^2 + e_3^2}\right]$$
$$\Theta = \arcsin(-t_{I\,13}^m) = \arcsin[-2(e_1e_3 - e_0e_2)] \qquad \textbf{(0-28)}$$
$$\Psi = \arctan(t_{I\,12}^m / t_{I\,11}^m) = \arctan\left[\frac{2(e_1e_2 + e_0e_3)}{e_0^2 - e_1^2 - e_2^2 + e_3^2}\right]$$

ili, obrnuto:

$$
\begin{aligned}
e_0 &= \cos\frac{\Psi}{2}\cos\frac{\Theta}{2}\sin\frac{\Phi}{2}+\sin\frac{\Psi}{2}\sin\frac{\Theta}{2}\cos\frac{\Phi}{2}\\
e_1 &= \cos\frac{\Psi}{2}\sin\frac{\Theta}{2}\cos\frac{\Phi}{2}-\sin\frac{\Psi}{2}\cos\frac{\Theta}{2}\sin\frac{\Phi}{2}\\
e_2 &= \cos\frac{\Psi}{2}\sin\frac{\Theta}{2}\sin\frac{\Phi}{2}+\sin\frac{\Psi}{2}\cos\frac{\Theta}{2}\cos\frac{\Phi}{2}\\
e_3 &= \cos\frac{\Psi}{2}\cos\frac{\Theta}{2}\cos\frac{\Phi}{2}-\sin\frac{\Psi}{2}\sin\frac{\Theta}{2}\sin\frac{\Phi}{2}
\end{aligned}
\tag{0-29}
$$

Geografski položaj (uglovne koordinate) se određuju direktno na osnovu položaja u Geocentričnom koordinatnom:

$$
\begin{aligned}
\alpha_G &= arctg\frac{Y_G}{X_G}, && 0 \le \alpha_G < 2\pi\\
\delta_G &= arctg\frac{Z_G}{\sqrt{X_G^2+Y_G^2}}, && -\pi/2 \le \delta_G \le \pi/2 \le \pi/2
\end{aligned}
\tag{0-30}
$$

Uglovi azimuta, elevacije i valjanja mogu se odrediti iz koeficijenata u matrici transformacije iz Normalnog u Vezani koordinatni sistem:

$$
\begin{aligned}
AZ &= \arctan(t^m_{0\,12}/t^m_{0\,21}), && -\pi \le AZ \le \pi\\
EL &= \arcsin(-t^m_{0\,13}), && -\pi/2 \le EL \le \pi/2\\
\gamma &= \arctan(t^m_{0\,23}/t^m_{0\,33}), && -\pi \le \gamma \le \pi
\end{aligned}
\tag{0-31}
$$

Brzine

Brzina izračunata integracijom jednačina kretanja je inercijalna (apsolutna) brzina, određena u Inercijalnom sistemu. Brzina relativna u odnosu na zemlju (u Geocentričnom sistemu) može se odrediti oduzimanjem periferne brzine rotacije Zemlje sledećim transformacijama:

$$
\vec{\mathbf{V}}_{R_G} = T_I^G\vec{\mathbf{V}}_{\mathbf{I}} - \vec{\mathbf{V}}_{\Omega_G}
\tag{0-32}
$$

gde je vektor periferne brzine rotacije definisan jednačinom:

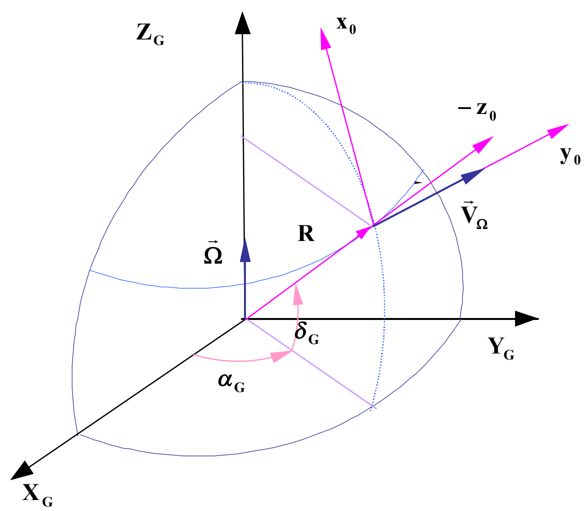
$$
\begin{aligned}
\vec{\mathbf{V}}_{\Omega_G} &= \begin{bmatrix} -V_\Omega \sin\alpha_g \\ V_\Omega \cos\alpha_g \\ 0 \end{bmatrix}\\
V_\Omega &= \Omega R\cos\delta_g
\end{aligned}
\tag{0-33}
$$

Vrednosti iste brzine u Normalnom sistemu su definisane transformacijom:

$$\vec{\mathbf{V}}_{R_N} = T_I^N \vec{\mathbf{V}}_I - \vec{\mathbf{V}}_{\Omega_N} \quad \textbf{(0-34)}$$

gde je vektor periferne brzine rotacije definisan jednačinom:

$$\vec{\mathbf{V}}_{\Omega_N} = \begin{bmatrix} 0 \\ V_\Omega \\ 0 \end{bmatrix} \quad \textbf{(0-35)}$$



Sl.2.20 Vektor brzine rotacije Zemlje

Aerodinamička brzina (brzina relativna u odnosu na vazduh) je u slučaju mirne atmosfere (bez vetra identična relativnoj brzini u odnosu na Zemlju), dok je u slušaju atmosfere s vetrom definisana transformacijom:

$$\vec{\mathbf{V}}_{A_G} = \vec{\mathbf{V}}_{R_G} - \vec{\mathbf{V}}_{W_G} \quad \textbf{(0-36)}$$

gde je vektor brzine vetra definisan jednačinom:

$$\vec{\mathbf{V}}_{W_G} = \begin{bmatrix} -W_N \sin\delta_G \cos\alpha_G - W_E \sin\alpha_G \\ -W_E \sin\delta_G \sin\alpha_G + W_E \cos\alpha_G \\ W_E \cos\delta_G \end{bmatrix} \quad \textbf{(0-37)}$$

Severna i istočna komponenta brzine vetra su definisane jednačinama:

$$\begin{aligned} W_N &= W\cos\alpha_W \\ W_E &= W\sin\alpha_W \end{aligned} \qquad \textbf{(0-38)}$$

Aerodinamička brzina u Vezanom sistemu je data transformacijom:

$$\vec{\mathbf{V}}_{R_M} = T_G^M \vec{\mathbf{V}}_{A_G} \qquad \textbf{(0-39)}$$

A napadni uglovi (ugao propinjanja i skretanja):

$$\begin{aligned} \beta &= \arcsin(V_{A_y} / V_A) \\ \alpha &= \arctan(V_{A_z} / V_{A_x}) \end{aligned} \qquad \textbf{(0-40)}$$

Ugaone brzine projektila

Ugaone brzine projektile su povezane sa izvodima Euler-ovih uglova sledećim jednačinama:

$$\begin{aligned} \omega_x &= -\dot{\Psi}\sin\Theta + \dot{\Phi} \\ \omega_y &= \dot{\Psi}\cos\Theta\sin\Phi + \dot{\Theta}\cos\Phi \\ \omega_z &= \dot{\Psi}\cos\Theta\cos\Phi - \dot{\Theta}\sin\Phi \end{aligned} \qquad \textbf{(0-41)}$$

Zbog neortogonalnosti, vrednosti izvoda Euler-ovih uglova brzina dobijamo iz prethodnih jednačina:

$$\begin{aligned} \dot{\Psi} &= (\omega_y \sin\Phi + \omega_z \cos\Phi)\frac{1}{\cos\Theta} \\ \dot{\Theta} &= -\omega_z \sin\Phi + \omega_y \cos\Phi \\ \dot{\Phi} &= \omega_x + (\omega_y \sin\Phi + \omega_z \cos\Phi) tg\Theta \end{aligned} \qquad \textbf{(0-42)}$$

Euler-ove ugaone brzine ne možemo pomoću ovih jednačina definisati za svaku vrednost ugla propinjanja i sistem postaje neodređen. Zato se i daje prednost proračunu ugaonog položaja preko kvaterniona.

Početne vrednosti matrica transformacije

Početne vrednosti veličina stanja i matrica transformacije se vezuju za proizvoljni početni trenutak. Obično je to trenutak lansiranja projektila (trenutak napuštanja usta cevi kod klasičnih, odnosno trenutak starta raketnog motora kod raketnih projektila).

Početne vrednosti Inercijalnih koordinata su dati sledećim jednačinama:

$$\begin{aligned} X_I &= R\cos\alpha_{G_0}\cos\delta_{G_0} \\ Y_I &= R\sin\alpha_{G_0}\cos\delta_{G_0} \\ Z_I &= R\sin\delta_{G_0} \\ R &= R_E + H_0 \end{aligned} \qquad \textbf{(0-43)}$$

Početna vrednost matrice transformacije iz Vezanog u normalni koordinatni sistem je određena početnim azimutom, elevacijom I uglom valjanja oko ose **y₀**:

$$(T_0^m)_0 = \begin{bmatrix} \cos EL\cos AZ & \cos EL\sin AZ & -\sin EL \\ -\sin AZ\cos\gamma + \sin EL\cos AZ\sin\gamma & \cos AZ\cos\gamma + \sin EL\sin AZ\sin\gamma & \cos EL\sin\gamma \\ \sin AZ\sin\gamma + \sin EL\cos AZ\cos\gamma & -\cos AZ\sin\gamma + \sin EL\sin AZ\cos\gamma & \cos EL\cos\gamma \end{bmatrix} \textbf{(0-44)}$$

Početna vrednost matrice transformacije iz Inercijalnog u Vezani koordinatni sistem se jednostavnom transformacijom (imajući u vidu da su Inercijalni i Geocentrični sistem u početnom trenutku koincidentni):

$$(\mathbf{T}_I^m)_0 = (\mathbf{T}_\mathbf{0}^m)_0(\mathbf{T}_I^0)_0 = (\mathbf{T}_\mathbf{0}^m)_0(\mathbf{T}_I^0)_0 \qquad \textbf{(0-45)}$$

Imajući u vidu da je na osnovu definicije Euler-ovih uglova:

$$T_I^m = \begin{bmatrix} \cos\Psi\cos\Theta & \sin\Psi\cos\Theta & -\sin\Theta \\ -\sin\Psi\cos\Phi + \cos\Psi\sin\Theta\sin\Phi & \cos\Psi\cos\Phi + \sin\Psi\sin\Theta\sin\Phi & \cos\Theta\sin\Phi \\ \sin\Psi\sin\Phi + \cos\Psi\sin\Theta\cos\Phi & -\cos\Psi\sin\Phi + \sin\Psi\sin\Theta\cos\Phi & \cos\Theta\cos\Phi \end{bmatrix} \textbf{(0-46)}$$

$$\mathbf{T}_I^m = \begin{bmatrix} t_{I\,11}^m & t_{I\,12}^m & t_{I\,13}^m \\ t_{I\,21}^m & t_{I\,22}^m & t_{I\,23}^m \\ t_{I\,31}^m & t_{I\,32}^m & t_{I\,33}^m \end{bmatrix} \qquad \textbf{(0-47)}$$

Iz ove matrične jednačine, možemo da odredimo sledeće jednačine:

$$\begin{aligned} \Theta &= \sin^{-1}(-t_{I\,13}^m) \\ \Phi &= \tan^{-1}(t_{I\,23}^m / t_{I\,33}^m) \\ \Psi &= \tan^{-1}(t_{I\,12}^m / t_{I\,11}^m) \end{aligned} \qquad \textbf{(0-48)}$$

Početne vrednosti kvaterniona su definisane definicionim jednačinama kvaterniona:

$$
\begin{aligned}
q_0 &= \cos\frac{\Psi}{2}\cos\frac{\Theta}{2}\sin\frac{\Phi}{2}+\sin\frac{\Psi}{2}\sin\frac{\Theta}{2}\cos\frac{\Phi}{2}\\
q_1 &= \cos\frac{\Psi}{2}\sin\frac{\Theta}{2}\cos\frac{\Phi}{2}-\sin\frac{\Psi}{2}\cos\frac{\Theta}{2}\sin\frac{\Phi}{2}\\
q_2 &= \cos\frac{\Psi}{2}\sin\frac{\Theta}{2}\sin\frac{\Phi}{2}+\sin\frac{\Psi}{2}\cos\frac{\Theta}{2}\cos\frac{\Phi}{2}\\
q_3 &= \cos\frac{\Psi}{2}\cos\frac{\Theta}{2}\cos\frac{\Phi}{2}-\sin\frac{\Psi}{2}\sin\frac{\Theta}{2}\sin\frac{\Phi}{2}
\end{aligned}
\qquad \textbf{(0-49)}
$$

Pretpostavljajući da su u početnom trenutku ose inercijalne platforme koincidentne sa sopstvenim osama projektila, početna vrednost matrice transformacije iz Inercijalnog u Žiroskopski koordinatni sistem je definisana kao:

$$
\mathbf{T}_I^p = \mathbf{T}_I^m \qquad \textbf{(0-50)}
$$