Универзитет у Београду

Машински факултет

Биомеханика ткива и органа

Решени задаци - Трећи део

Београд, 2019.

Задатак 1 Нека је кретање тела задато следећим једначинама:

$$
\begin{aligned}
x_1 &= X_1 \mathrm{e}^t + X_3\left(e^t - 1\right)\\
x_2 &= X_2 + X_3\left(e^t - e^{-t}\right)\\
x_3 &= X_3
\end{aligned}
$$

а) Одредити путању делића који је у почетном положају имао координате (1,2,1).

б) Одредити поље померања.

<u>Решење:</u>

а)

$$\vec{X} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$x_1 = e^t + e^t - 1 = 2e^t - 1 \quad \Rightarrow \quad e^t = \frac{1}{2}\left(x_1 + 1\right)$$

$$x_2 = 2 + e^t - e^{-t} \quad \Rightarrow \quad \boxed{x_2 = 2 + \frac{1}{2}\left(x_1 + 1\right) - \frac{2}{x_1 + 1}}$$

$$\boxed{x_3 = 1}$$

Путања делића који је у почетном положају имао координате (1,2,1) лежи у равни $x_1 x_2$ која сече осу x_3 у тачки 1.

б)

$$\vec{u} = \vec{x} - \vec{X}$$

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}, \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad \vec{X} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix}$$

$$u_1 = x_1 - X_1 = X_1 \mathrm{e}^t + X_3\left(e^t - 1\right) - X_1 = X_1\left(\mathrm{e}^t - 1\right) + X_3\left(e^t - 1\right)$$

$$\boxed{u_1 = \left(e^t - 1\right)\left(X_1 + X_3\right)}$$

$$u_2 = x_2 - X_2 = X_2 + X_3\left(e^t - e^{-t}\right) - X_2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{u_2 = X_3\left(e^t - e^{-t}\right)}$$

$$u_3 = x_3 - X_3 = X_3 - X_3 \quad \Rightarrow \quad \boxed{u_3 = 0}$$

Задатак 2 Деформација је задата са:

$$\vec{x} = (3,5 + X_1 + 0,5X_2)\,\vec{e}_1 + (4 + X_2)\,\vec{e}_2 + X_3\vec{e}_3$$

Одредити вектор померања и градијент деформације.

Решење:

Вектор померања је:

$$\vec{u} = \vec{x} - \vec{X} = [(3,5 + X_1 + 0,5X_2) - X_1]\,\vec{e}_1 + [(4 + X_2) - X_2]\,\vec{e}_2 + [X_3 - X_3]\,\vec{e}_3$$

$$\boxed{\vec{u} = (3,5 + 0,5X_2)\,\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2}$$

Градијент деформације је:

$$\mathbf{F} = [F_{ij}] = \left[\frac{\partial x_i}{\partial X_j}\right] = \begin{bmatrix} 1 & 0,5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Уколико се задата једначина запише у матричном облику:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0,5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3,5 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

може се уочити градијент деформације - диференцирањем ове матричне једначине, добија се $\mathrm{d}\vec{x} = \mathbf{F}\mathrm{d}\vec{X}$.

Задатак 3 За хомогену деформацију одређену са:

$$\begin{aligned} x_1 &= \alpha X_1 + \beta X_2 \\ x_2 &= -\beta X_1 + \alpha X_2 \\ x_3 &= \mu X_3 \end{aligned}$$

где су α, β и μ константне, одредити градијент деформације $\mathbf{F}$ и Коши-Гринов тензор деформације $\mathbf{C}$.

Решење:

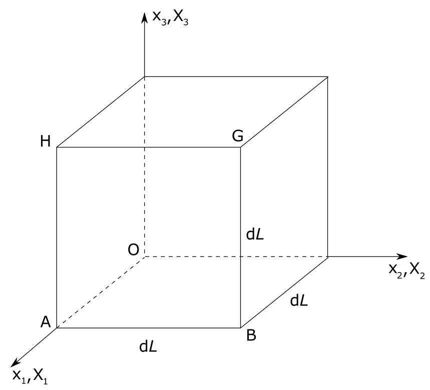
$$\mathbf{F} = [F_{ij}] = \left[\frac{\partial x_i}{\partial X_j}\right] = \begin{bmatrix} \alpha & \beta & 0 \\ -\beta & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \alpha & -\beta & 0 \\ \beta & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha & \beta & 0 \\ -\beta & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha^2 + \beta^2 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha^2 + \beta^2 & 0 \\ 0 & 0 & \mu^2 \end{bmatrix}$$

Задатак 4 Посматра се деформација јединичног кубног делића неког тела, приказаног на Сл. 1. Дата је деформација на смицање описана следећим једначинама:

$$x_1 = X_1$$
$$x_2 = X_2 + kX_3$$
$$x_3 = X_3 + kX_2$$

где је k константа. Одредити деформацију странице ABGH датог кубног делића, и одредити $||\mathrm{d}\vec{x}||^2 - ||\mathrm{d}\vec{X}||^2$ за дијагонале AG, BH и OG.



Слика 1

Решење:

Деформацију странице ABGH можемо одредити уколико нађемо нови положај сваке од тачака. Почетни положаји су:

$$A\,(X_{1A}, X_{2A}, X_{3A}) \quad \Rightarrow \quad A\,(\mathrm{d}L, 0, 0)$$

$$B\,(\mathrm{d}L, \mathrm{d}L, 0)$$
$$G\,(\mathrm{d}L, \mathrm{d}L, \mathrm{d}L)$$
$$H\,(\mathrm{d}L, 0, \mathrm{d}L)$$

Нови положај тачке A је:

$$x_{1A} = X_{1A} = \mathrm{d}L$$

$$x_{2A} = X_{2A} + kX_{3A} = 0$$

$$x_{3A} = X_{3A} + kX_{2A} = 0$$

Tj.

$$a\left(x_{1A}, x_{2A}, x_{3A}\right) \quad \Rightarrow \quad a\left(\mathrm{d}L, 0, 0\right)$$

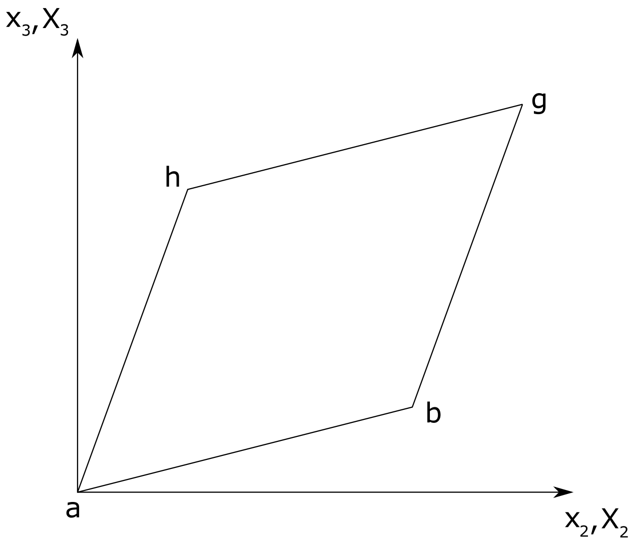
Аналогно томе:

$$b\left(\mathrm{d}L, \mathrm{d}L, k\mathrm{d}L\right)$$

$$g\left(\mathrm{d}L, (1+k)\mathrm{d}L, (1+k)\mathrm{d}L\right)$$

$$h\left(\mathrm{d}L, k\mathrm{d}L, \mathrm{d}L\right)$$

Деформисани облик странице ABGH приказан је на Сл. 2



Слика 2

С обзиром на то да је:

$$||\mathrm{d}\vec{x}||^2 - ||\mathrm{d}\vec{X}||^2 = \mathrm{d}\vec{X} \cdot 2\mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\vec{X}$$

где је **E** Грин-СенВенанов тензор деформације одређен преко Коши-Гриновог тензора деформације:

$$2\mathbf{E} = \mathbf{C} - \mathbf{I}, \quad \mathbf{C} = \mathbf{F}^T\mathbf{F}$$

Дакле, потребно је одредити градијент деформације:

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & k \\ 0 & k & 1 \end{bmatrix}$$

Затим Коши-Гринов тензор деформације:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1+k^2 & 2k \\ 0 & 2k & 1+k^2 \end{bmatrix}$$

Тада је Грин-СенВенанов тензор деформације:

$$2\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & k^2 & 2k \\ 0 & 2k & k^2 \end{bmatrix}$$

Коначно, за дијагоналу $\boxed{AG}$:

$$\mathrm{d}\vec{X} = \begin{pmatrix} X_{1G} - X_{1A} \\ X_{2G} - X_{2A} \\ X_{3G} - X_{3A} \end{pmatrix} \Rightarrow \mathrm{d}\vec{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ \mathrm{d}L \\ \mathrm{d}L \end{pmatrix}$$

$$||\mathrm{d}\vec{x}||^2_{AG} - ||\mathrm{d}\vec{X}||^2_{AG} = (0, \mathrm{d}L, \mathrm{d}L) \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & k^2 & 2k \\ 0 & 2k & k^2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \mathrm{d}L \\ \mathrm{d}L \end{pmatrix}$$

$$\boxed{||\mathrm{d}\vec{x}||^2_{AG} - ||\mathrm{d}\vec{X}||^2_{AG} = 2k(2+k)\,(\mathrm{d}L)^2}$$

$\boxed{BH}$

$$\mathrm{d}\vec{X} = \begin{pmatrix} X_{1H} - X_{1B} \\ X_{2H} - X_{2B} \\ X_{3H} - X_{3B} \end{pmatrix} \Rightarrow \mathrm{d}\vec{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\mathrm{d}L \\ \mathrm{d}L \end{pmatrix}$$

$$||\mathrm{d}\vec{x}||^2_{BH} - ||\mathrm{d}\vec{X}||^2_{BH} = (0, -\mathrm{d}L, \mathrm{d}L) \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & k^2 & 2k \\ 0 & 2k & k^2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -\mathrm{d}L \\ \mathrm{d}L \end{pmatrix}$$

$$\boxed{||\mathrm{d}\vec{x}||^2_{BH} - ||\mathrm{d}\vec{X}||^2_{BH} = 2k(k-2)\,(\mathrm{d}L)^2}$$

$\boxed{OG}$

$$\mathrm{d}\vec{X} = \begin{pmatrix} X_{1G} - X_{1O} \\ X_{2G} - X_{2O} \\ X_{3G} - X_{3O} \end{pmatrix} \Rightarrow \mathrm{d}\vec{X} = \begin{pmatrix} \mathrm{d}L \\ \mathrm{d}L \\ \mathrm{d}L \end{pmatrix}$$

$$||\mathrm{d}\vec{x}||^2_{BH} - ||\mathrm{d}\vec{X}||^2_{BH} = (\mathrm{d}L, \mathrm{d}L, \mathrm{d}L) \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & k^2 & 2k \\ 0 & 2k & k^2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{d}L \\ \mathrm{d}L \\ \mathrm{d}L \end{pmatrix}$$

$$\boxed{||\mathrm{d}\vec{x}||^2_{OG} - ||\mathrm{d}\vec{X}||^2_{OG} = 4k(k+1)\,(\mathrm{d}L)^2}$$

Задатак 5 Хомогена деформација је дата следећим једначинама:

$$x_1 = X_1 - X_2 + X_3$$
$$x_2 = X_2 - X_3 + X_1$$
$$x_3 = X_3 - X_1 + X_2$$

Одредити:

а) издужење α_{n_1} у правцу који је дефинисан јединичном нормалом $\vec{n}_1 = \frac{\vec{i}+\vec{j}}{\sqrt{2}}$,

б) угао θ_{12} у деформисаној конфигурацији елемената који су у почетној конфигурацији заузимали правце одређене јединичним нормалама $\vec{n}_1 = \frac{\vec{i}+\vec{j}}{\sqrt{2}}$ и $\vec{n}_2 = \vec{j}$. За колико се угао између елемената променио?

в) промену запремине.

Решење:

а)

С обзиром на то да важи:

$$\alpha_1^2 = \frac{||\mathrm{d}\vec{x}_1||^2}{||\mathrm{d}\vec{X}_1||^2} = \frac{\mathrm{d}\vec{x}_1 \cdot \mathrm{d}\vec{x}_1}{\mathrm{d}\vec{X}_1 \cdot \mathrm{d}\vec{X}_1} = \frac{\mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\vec{X}_1 \cdot \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\vec{X}_1}{||\mathrm{d}\vec{X}_1||^2} = \frac{\mathrm{d}\vec{X}_1 \cdot \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\vec{X}_1}{||\mathrm{d}\vec{X}_1||^2}$$

$$\alpha_1^2 = \frac{\mathrm{d}\vec{X}_1 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathrm{d}\vec{X}_1}{||\mathrm{d}\vec{X}_1||^2} = \vec{n}_1 \cdot \mathbf{C} \cdot \vec{n}_1$$

где је $\mathbf{C}$ Коши-Гринов тензор деформације, а јединични вектор нормале:

$$\vec{n}_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$$

Потребно је израчунати градијент деформације:

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Затим:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

Дакле:

$$\alpha_1^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} = 2$$

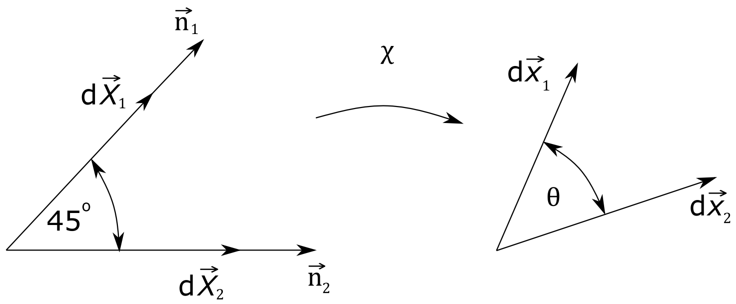
$$\boxed{\alpha_1 = \sqrt{2}}$$

б)

Почетни угао између елемената може се одредити уз помоћ јединичних нормала њихових праваца, на следећи начин:

$$\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 1 \cdot 1 \cdot \cos\theta_0 = n_{1x}n_{2x} + n_{1y}n_{2y} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 0 + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\theta_0 = \arccos\frac{1}{\sqrt{2}} = 45^\circ$$



Слика 3

Аналогно томе, може се одредити угао између елемената у деформисаној конфигурацији:

$$d\vec{x}_1 \cdot d\vec{x}_2 = ||d\vec{x}_1|| \cdot ||d\vec{x}_2|| \cos\theta \quad \Rightarrow \quad \cos\theta = \frac{d\vec{x}_1 \cdot d\vec{x}_2}{||d\vec{x}_1|| \cdot ||d\vec{x}_2||}$$

Тј.

$$\cos\theta = \frac{\vec{n}_1 \cdot \mathbf{C} \cdot \vec{n}_2}{\alpha_1\alpha_2}$$

Издужење другог елемента је:

$$\alpha_2^2 = \vec{n}_2 \cdot \mathbf{C} \cdot \vec{n}_2$$

С обзиром на то да је нормала која одређује његов правац простирања $\vec{n}_2 = (0, 1, 0)$, следи:

$$\alpha_2^2 = (0,1,0) \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 3$$

$$\alpha_2 = \sqrt{3}$$

Дакле:

$$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{3}} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\boxed{\theta = \arccos\frac{\sqrt{3}}{3} = 54,7^\circ}$$

Угао се променио за $54,7^\circ - 45^\circ = 9,7^\circ$.

в)

Промена запремине је:

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}V} = \det\mathbf{F} = \sqrt{\det\mathbf{C}} = \sqrt{16} = 4$$

Додатак

Праћење деформације

Уколико је почетни положај неке тачке одређен вектором $\vec{X}$, њен нови положај $\vec{x}$ је у општем случају функција почетног положаја и времена:

$$\vec{x}\left(\vec{X},t\right) = \chi\left(\vec{X},t\right)$$

У случају када постоји инверзна трансформација, важи:

$$\vec{X}\left(\vec{x},t\right) = \chi^{-1}$$

Функција померања

Померање неке тачке може се одредити као разлика између њеног тренутног и почетног положаја. Уколико се тренутни положај одреди преко почетног, функција померања ће зависити од почетног положаја:

$$\vec{u}(\vec{X},t) = \vec{x}(\vec{X},t) - \vec{X}$$

Уколико се нађе инверзна трансформација функције деформаисања, померање се може изразити у функцији тренутног положаја:

$$\vec{u}(\vec{x},t) = \vec{x} - \chi^{-1}$$

Градијент деформације

Градијент деформације представља везу између линеарног диференцијалног елемента $\mathrm{d}\vec{X}$ пре деформације и елемента $\mathrm{d}\vec{x}$ након деформације:

$$\mathrm{d}\vec{x} = \mathbf{F}\mathrm{d}\vec{X}$$

Тј.

$$\mathbf{F} = [F_{ij}] = \left[\frac{\partial x_i}{\partial X_j}\right] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial X_1} & \frac{\partial x_1}{\partial X_2} & \frac{\partial x_1}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial X_1} & \frac{\partial x_2}{\partial X_2} & \frac{\partial x_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial X_1} & \frac{\partial x_3}{\partial X_2} & \frac{\partial x_3}{\partial X_3} \end{bmatrix}$$

Коши-Гринов тензор деформације

Коши-Гринов тензор деформације је дефинисан на следећи начин:

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T\mathbf{F}$$

Издужење делића

$$\alpha^2 = \frac{||\mathrm{d}\vec{x}||^2}{||\mathrm{d}\vec{X}||^2} = \frac{\mathrm{d}\vec{x} \cdot \mathrm{d}\vec{x}}{\mathrm{d}\vec{X} \cdot \mathrm{d}\vec{X}} = \frac{\mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\vec{X} \cdot \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\vec{X}}{||\mathrm{d}\vec{X}||^2} = \frac{\mathrm{d}\vec{X} \cdot \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\vec{X}}{||\mathrm{d}\vec{X}||^2}$$

$$\alpha^2 = \frac{\mathrm{d}\vec{X} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathrm{d}\vec{X}}{||\mathrm{d}\vec{X}||^2} = \vec{n} \cdot \mathbf{C} \cdot \vec{n}$$

Релативна деформација

$$\frac{||\mathrm{d}\vec{x}||^2 - ||\mathrm{d}\vec{X}||^2}{||\mathrm{d}\vec{X}||^2} = \frac{||\mathrm{d}\vec{x}||^2}{||\mathrm{d}\vec{X}||^2} - 1 = \alpha^2 - 1 = (\mathbf{C} - \mathbf{I})\vec{n} \cdot \vec{n} = 2\mathbf{E}\vec{n}$$

где је $\mathbf{I}$ јединични тензор, а $\mathbf{E}$ Грин-СенВенанов тензор деформације:

$$\mathbf{C} - \mathbf{I} = 2\mathbf{E}$$

Такође, може се показати да важи:

$$||\mathrm{d}\vec{x}||^2 - ||\mathrm{d}\vec{X}||^2 = \mathrm{d}\vec{X} \cdot 2\mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\vec{X}$$

Угао смицања

Угао између два линеарна диференцијална елемента је може се одредити на следећи начин:

$$\mathrm{d}\vec{x}_1 \cdot \mathrm{d}\vec{x}_2 = ||\mathrm{d}\vec{x}_1|| \cdot ||\mathrm{d}\vec{x}_2|| \cos\theta \quad \Rightarrow \quad \cos\theta = \frac{\mathrm{d}\vec{x}_1 \cdot \mathrm{d}\vec{x}_2}{||\mathrm{d}\vec{x}_1|| \cdot ||\mathrm{d}\vec{x}_2||}$$

Тј.

$$\cos\theta = \frac{\vec{n}_1 \cdot \mathbf{C} \cdot \vec{n}_2}{\alpha_1 \alpha_2}$$

Промена запремине

Уколико је почетна запремина одређена са:

$$\mathrm{d}V = \mathrm{d}X \cdot (\mathrm{d}Y \times \mathrm{d}Z)$$

А тренутна као:

$$\mathrm{d}v = \mathrm{d}x \cdot (\mathrm{d}y \times \mathrm{d}z)$$

Промена запремине је:

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}V} = \frac{\mathrm{d}x \cdot (\mathrm{d}y \times \mathrm{d}z)}{\mathrm{d}X \cdot (\mathrm{d}Y \times \mathrm{d}Z)} = \frac{\mathbf{F}\mathrm{d}X \cdot (\mathbf{F}\mathrm{d}Y \times \mathbf{F}\mathrm{d}Z)}{\mathrm{d}X \cdot (\mathrm{d}Y \times \mathrm{d}Z)} = \det \mathbf{F}$$

где $\det \mathbf{F}$ представља брзину промене запремине услед деформисања.