БИОМЕХАНИКА ТКИВА И ОРГАНА

Проф. др. Михаило Лазаревић

Основни појмови Механике континуума

Механика континуума је део механике који изучава деформабилна тела, тј, тела код којих се, у општем случају, растојања између честица тела мењају; она изучава дефомрацију, напонско стање и течење реалних тела, тј. чврстих тела течности и гасова. *Основна претпоставка од које се полази у механици континуума је да је материја непрекидно распоређена у телу.* Како су реална тела, са физичког становишта, корспукуларне природе то механика континуума не изучава реална тела непосредно, него њихове моделе, којима се приписују одређена физичка својства реалних тела. Претпоставка о непрекидном распореду материје у телу чини са теоријског становишта механику континуума теоријом поља, у смислу да су величине које карактеришу тело непрекидне функције положаја и времена. Поља могу бити померање, густина, сила, енергија итд., односно у механици континуума постоји одговарајући језик изражавања а то је тензорски рачун. У највећем делу механике континуума, поред *непрекидности* уводе се још две додатне претпоставке о природи материјала: *хомогеност и изотропност.*

Јасно је да су ове три претпоставке међусобно независне.

За материјал кажемо да је *хомоген* ако поседује идентичке особине у свим честицама тог материјала. Ако материјал није хомоген онда кажемо да је *нехомоген.* Материјал је *изотропан* у односу на неку своју особину ако је она иста у свим правцима, у супротном кажемо да је материјал *анизотропан.*

Теорија механике континуума се може поделити на три дела:

а) Општи принципи

б) Конститутивне једначине

ц) Специјалне теорије

Општи принципи су примењиви на све врсте непрекидних средина. То су општи закони одржања и баланса појединих физичких величина који важе за сва тела. Ти закони су:

а1) закон одржању масе,

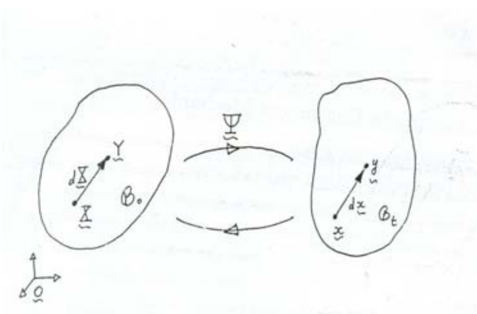
а2) баланс количине кретања

а3) баланс момента количине кретања

а4) први закон термодинамике или закон баланса енергије

а5) други закон термодинамике или принцип ентропије

б) *Конститутивне једначине* - у циљу узимања у обзир структуре (конституције) разних материјала која карактерише понашање материјала, дужни смо да одредимо додатне једначине које називамо конститутивним. Домен дефинисаности конститутивних променљивих одређен је одговарајућим физичким особинама материјала. С обзиром да се материјали, за које се одређују конститутивне једначине представљени својим математичким моделима, конститутивне једначине дефинишу идеалан материјал.
ц) *Специјалне теорије*- сваког иделаног материјала су засноване на општим принципима и конситутивним једначинама тог материјала. Такве теорије су: теорија еластичности, теорија пластичности, реологија итд. Свака од њих, с обзиром на значај и примену представља област од засебног интереса.



Слика 4.1

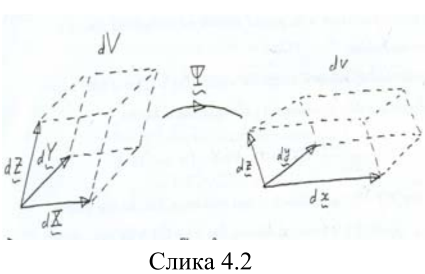
4.1 Кинематика

-Кретање Посматра се кретање деформабилног тела где посматрамо само деформацију истог (*мења облик и запремину*), (не посматра се транслација и ротација истог)[*], сл.4.1.Нека је почетна конфигурација тела у тренутку $t=0$ је V_o а текућа конфигурација V_t .Кретање из ***Bo*** у ***Bт*** је означено са ψ . Нека је са $\boldsymbol{X}$ означен вектор положаја делића материјалног тела ***Bo*** и нека се са $\boldsymbol{x}$ означен такође вектор положаја у ***Bт.*** Онда је кретање одређено следећим изразом

$$\boldsymbol{x}=\psi\left(\boldsymbol{X,t}\right),\ \forall \boldsymbol{X}\in \mathrm{Vo},\ \ \forall \mathrm{t}\geq 0 \qquad (4.1)$$

где је $\boldsymbol{X}=\psi\left(\boldsymbol{X,0}\right)$, почетни услов.

Поставља се питање колика је промена облика □V а колика промена запремине △V разматраног деформабилног тела?
Потребно је увести меру деформације тј. на основу познавања кретања израчунати деформацију истог.



Слика 4.2

Градијент деформације:
Уочавају се вектори $d\underline{X}=\underline{Y}-\underline{X}$ и $d\underline{x}=\underline{y}-\underline{x}$ тзв. линеарни диференцијални елементи у одговарајућим конфигурацијама.

[*] У општем случају имамо основни став кинематике непрекидне средине формулисан од стране Хелхолца: елементарно померање неке честице непрекидне средине резултат је *транслације, ротације и деформације*

Такође је потребно уочити да промена интезитета вектора $d\underline{x}$ *представља меру промене запремине уоченог тела, док промена оријентације вектора* $d\underline{x}$ *представља меру промене облика истог.* На основу кретања добија се да је (4.2)

$$d\underline{x} = \underline{y} - \underline{x} = \psi\left(Y,t\right) - \psi\left(X,t\right) = \psi\left(X + dX,t\right) - \psi\left(X,t\right) =$$

$$= \nabla\psi\left(X,t\right)dX + O\left(...\right) \approx \nabla\psi\left(X,t\right)dX,\ \ \nabla(.) = \frac{\partial(\ )}{\partial X}\vec{i} + \frac{\partial(\ )}{\partial Y}\vec{j} + \frac{\partial(\ )}{\partial Z}\vec{k}$$

где је $\nabla\psi$ *градијент деформације и он представља тензорску величину другог реда означену са* $\boldsymbol{F}$ *. Одговарајућа матрична репрезентација је: (4.3)

$$F_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} = \frac{\partial \psi_i}{\partial X_j},\ i,j = 1,2,3 \Rightarrow$$

$$dx_i = F_{ij}dX_j \ \ \rightarrow d\boldsymbol{x} = \boldsymbol{FdX}$$

$$F = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial X_1} & \frac{\partial x_1}{\partial X_2} & \frac{\partial x_1}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial X_1} & \frac{\partial x_2}{\partial X_2} & \frac{\partial x_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial X_1} & \frac{\partial x_3}{\partial X_2} & \frac{\partial x_3}{\partial X_3} \end{bmatrix}$$

Такође, може се уочити три некомпланарна вектора (сл. 2), dX, dY, dZ у реф. конфигурацији и три вектора у текућој конфигурацији dx, dy, dz , при чему су запремине одређене са:

$$dV = dX\cdot\left(dY\times dZ\right),\ dv = dx\cdot\left(dy\times dz\right)$$

респективно. Промена запремине тј. dv/dV је одређена следећим изразом:

$$\frac{dv}{dV} = \frac{dx\cdot\left(dy\times dz\right)}{dX\cdot\left(dY\times dZ\right)} = \frac{FdX\cdot\left(FdY\times FdZ\right)}{dX\cdot\left(dY\times dZ\right)} = \det F \qquad (4.4)$$

где $\det \boldsymbol{F}$, $0 < detF < \infty$ представља брзину промене запремине услед деформисања.

Вектор померања се дефинише $\boldsymbol{u = x - X}$. Градијент вектора u је одређен са:

$$\nabla u = \nabla x - \nabla X = \nabla\psi - \boldsymbol{1} = \boldsymbol{F - 1}, \qquad (4.5)$$

где је $\boldsymbol{1}$ јединични тензор. У индексној нотацији има се:

$$\nabla u = \frac{\partial u_i}{\partial X_j} = F_{ij} - \delta_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} - \delta_{ij},\quad i,j = 1,2,3 \qquad (4.6)$$

где је δ_{ij} Кронекеров делта $\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$

Издужење $\alpha_{\hat{n}}$ ***материјалног елемента***

Издужење уоченог материјалног делића (линеарни диференцијални елемент) види сл. 4.1 је одређена са:

$$\alpha_{\hat{n}} = \frac{\|d\boldsymbol{x}\|}{\|d\boldsymbol{X}\|} = \sqrt{\frac{d\boldsymbol{x}\cdot d\boldsymbol{x}}{\|d\boldsymbol{X}\|^2}} = \sqrt{\frac{\boldsymbol{FdX}\cdot\boldsymbol{FdX}}{\|d\boldsymbol{X}\|^2}} = \sqrt{\frac{\boldsymbol{F}^T\boldsymbol{FdX}\cdot d\boldsymbol{X}}{\|d\boldsymbol{X}\|^2}} = \sqrt{\boldsymbol{C\hat{n}}\cdot\boldsymbol{\hat{n}}} \qquad (4.7)$$

* примeном оператора градијент од скалара добијамо векторску величину док од векторске добијамо тензорску величину другог реда

где $\boldsymbol{C}$ *десни Коши-Гринов тензор деформације* (представља меру деформације) тј:

$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{F}^T \boldsymbol{F}$, уочава се да је тензор симетричан $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{C}^T$.

Геометријска интерпретација:

Претпоставимо да је $\hat{n}$ карактеристични (главни) вектор тензора $\boldsymbol{C}$. Тада према претходним изразима следи да је:

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{C}\hat{\boldsymbol{n}}_1 = \lambda_1 \hat{\boldsymbol{n}}_1 \ / \cdot \hat{\boldsymbol{n}}_1 \Rightarrow \boldsymbol{C}\hat{\boldsymbol{n}}_1 \cdot \hat{\boldsymbol{n}}_1 = \lambda_1 \hat{\boldsymbol{n}}_1 \cdot \hat{\boldsymbol{n}}_1 = \lambda_1 \\ &\alpha_1^2 = \boldsymbol{C}\hat{\boldsymbol{n}}_1 \cdot \hat{\boldsymbol{n}}_1 \end{aligned} \tag{4.8}$$

тј. да је сопствена вредност C , λ_1 $\lambda_1 = \alpha_1^{2\,*}$ односно тензор $\boldsymbol{C}$ представља тензор чије су сопствене (карактеристичне) вредности једнаке квадратима издужења:

$$\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} \alpha_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3^2 \end{bmatrix} \tag{4.9}$$

Друга мера деформације је релативна деформација, једна од могућих дефиниција исте, јесте – проценутално издужење квадрата дужине диференцијалног елемента материјала.

$$\frac{\|d\boldsymbol{x}\|^2 - \|d\boldsymbol{X}\|^2}{\|d\boldsymbol{X}\|^2} = \left(\boldsymbol{F}^T \boldsymbol{F} - \boldsymbol{1}\right)\hat{\boldsymbol{n}} \cdot \hat{\boldsymbol{n}} = \left(\boldsymbol{C} - \boldsymbol{1}\right)\hat{\boldsymbol{n}} \cdot \hat{\boldsymbol{n}} = \boldsymbol{2E}\hat{\boldsymbol{n}} \cdot \hat{\boldsymbol{n}}\ \boldsymbol{E} \tag{4.10}$$

где је са $\boldsymbol{E}$ означен тзв. *Грин-СенВенанов тензор деформације** а са $\boldsymbol{1}$ јединични тензор. Уочава се такође да је

$$\frac{\|d\boldsymbol{x}\|^2 - \|d\boldsymbol{X}\|^2}{\|d\boldsymbol{X}\|^2} = \left(\alpha_n^2 - 1\right) = \boldsymbol{2E}\hat{\boldsymbol{n}} \cdot \hat{\boldsymbol{n}} \tag{4.11}$$

где ако је $\hat{\boldsymbol{n}}$ главни вектор, онда је

$$\boldsymbol{E} = \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{F}^T \boldsymbol{F} - \boldsymbol{1}\right) \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} e_1 & 0 & 0 \\ 0 & e_2 & 0 \\ 0 & 0 & e_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\alpha_1^2 - 1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{\alpha_2^2 - 1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{\alpha_3^2 - 1}{2} \end{bmatrix} \tag{4.12}$$

Имајући у виду да је: $\nabla u = \boldsymbol{F} - \boldsymbol{1}$ после замене у претходни израз за E добија се:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{E} &= \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{F}^T \boldsymbol{F} - \boldsymbol{1}\right) = \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{2}}[\left(\nabla \boldsymbol{u} + \boldsymbol{1}\right)^{\boldsymbol{T}} \left(\nabla \boldsymbol{u} + \boldsymbol{1}\right) - \boldsymbol{1}] = \\ &= \frac{1}{2}[\nabla \boldsymbol{u} + \nabla \boldsymbol{u}^T + \nabla \boldsymbol{u}^T \nabla \boldsymbol{u}] \end{aligned} \tag{4.13}$$

---

* $\lambda_i = \sigma_i = \alpha_i^2$, $i = 1,2,3$ види лекцију 2,ст.5,6 λ_i представљају главне вредности напона

* у литератури је познат и као Лангранжев тензор деформације (нелинеарни), док је у случају изражавања тензора E преко ∇u познат као Грин-СенВенанов тензор(линеарни)

Уочава се да је тензор симетричан $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}^{\boldsymbol{T}}$ и нелинеаран захваљујући последњем члану (користи се за опис великих деформација). Ако су међутим, деформације мале, тј. $\|\nabla u\| \ll 1$ онда је последњи члан занемарљив, тако да добијамо *линеарни тензор деформације*

$$\boldsymbol{E} \approx \frac{1}{2}\left(\nabla \boldsymbol{u} + \nabla \boldsymbol{u}^{T}\right) \equiv \boldsymbol{e} \tag{4.14}$$

који се користи у опису малих(инфинитезималних) деформација у теорији линеарне еластичности и линеарне вискоеластичности. Друга интерпретација $\boldsymbol{e}$ се може дати на следећи начин:

$$\frac{\|d\boldsymbol{x}\| - \|d\boldsymbol{X}\|}{\|d\boldsymbol{X}\|} = \left(\alpha_{\hat{n}} - 1\right) = (\sqrt{C\hat{\boldsymbol{n}}\hat{\boldsymbol{n}}} - 1) = \left(\sqrt{1 + 2\boldsymbol{E}\hat{\boldsymbol{n}} \cdot \hat{\boldsymbol{n}}} - 1\right)$$

$$\approx 1 + \boldsymbol{E}\hat{\boldsymbol{n}} \cdot \hat{\boldsymbol{n}} - 1 = \boldsymbol{E}\hat{\boldsymbol{n}} \cdot \hat{\boldsymbol{n}} \approx \boldsymbol{e}\hat{\boldsymbol{n}} \cdot \hat{\boldsymbol{n}} \Rightarrow \tag{4.15}$$

$$\boldsymbol{e} = \begin{bmatrix} \alpha_1 - 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 - 1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3 - 1 \end{bmatrix}$$

тј. главне деформације e_1, e_2, e_3 * су одређене са: $\alpha_{\hat{n}} - 1$. Такође, на основу раније изведеног израза добија се да је

$$\frac{dv}{dV} = \det F = \sqrt{\det C} = \alpha_1\alpha_2\alpha_3 \tag{4.16}$$

где су са α_i, $i = 1,2,3$ означена *главна издужења.* Имајући у виду главне деформације e_i, $i = 1,2,3$ следи: (4.17)

$$\frac{dv}{dV} = \alpha_1\alpha_2\alpha_3 \approx \left(1 + e_1\right)\left(1 + e_2\right)\left(1 + e_3\right) \approx 1 + e_1 + e_2 + e_3 = 1 + trag\left(\boldsymbol{e}\right)$$

Закључак: *само дијагонални чланови одговарајућег тензора деформације доприносе промени запремине*

$$dv = dV\left(1 + tr\left(e\right)\right) \tag{4.18}$$

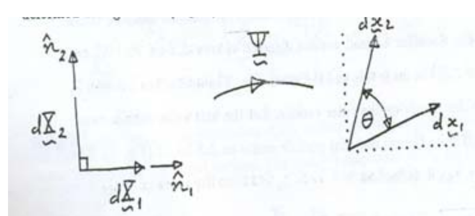
Смицање $\rightarrow$ *промена облика*

Посматра се деформација смицања $\gamma_{\hat{n}_1\hat{n}_2}$ која је мера деформа настале променом угла између два материјална делића (влакна) који су били ортогонални у референтној конфигурацији одређени са $\hat{n}_1, \hat{n}_2$ тј. $\gamma_{\hat{n}_1\hat{n}_2} = \left(\pi / 2 - \theta\right)$ где је θ угао изм߂з истих влакана али сада у деформисаној (посматраној) конфигурацији, види сл. 4.3 дефинисана на следећи начин:

(4.19)

$$\sin\gamma_{n_1n_2} = \cos\theta = \frac{d\boldsymbol{x}_1 \cdot d\boldsymbol{x}_2}{\|dx_1\|\|dx_2\|} = \frac{CdX_1dX_2}{\alpha_1\alpha_2\,\|dX_1\|\|dX_2\|} =$$

$$= \frac{2E\hat{n}_1 \cdot \hat{n}_2}{\sqrt{\left(1 + 2E\hat{n}_1 \cdot \hat{n}_1\right)\left(1 + 2E\hat{n}_2 \cdot \hat{n}_2\right)}}$$



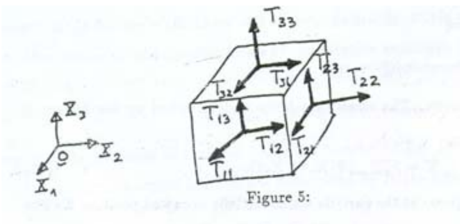
Слика 4.3

Како су у питању мале деформације тј. $\sin\gamma \approx \gamma$, $E \approx e$ тако да на основу претходног израза следи:

$$\gamma_{n_1n_2} \approx 2\boldsymbol{e}\hat{\boldsymbol{n}}_{\boldsymbol{1}} \cdot \hat{\boldsymbol{n}}_{\boldsymbol{2}} \tag{4.20}$$

---

* у литератури се могу наћи и следеће ознаке $e \rightarrow \varepsilon$ тј. $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ (види лекцију бр. 2)



Слика 4.4

Ако $\{n_i\}$ леже у правцима координатних оса, онда се добија да је

$$\gamma_{n_1 n_2} = 2\boldsymbol{e}_{12} \quad \text{тј.} \quad \boldsymbol{e}_{12} = \frac{1}{2}\gamma_{n_1 n_2} \tag{4.21}$$

Тензор напона

Осим деформације, потребно је познавати и напонско стање уоченог материјала тј. можемо одредити вектор напона као:

$$\boldsymbol{t}_{\hat{m}} = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta F}{\Delta S} = \frac{dF}{dS} \tag{4.22}$$

где је са $\Delta \boldsymbol{F}$ означена сила која делује, тако да вектор напона зависи од два вектора, вектора површине $\Delta S \to \hat{m}$ и вектора $\boldsymbol{F}$, тј. може се приказати у тензорској нотацији као:

$$\boldsymbol{t}_{\hat{m}} = T\hat{\boldsymbol{m}} \tag{4.23}$$

где је са $\boldsymbol{T}$ означен тзв. *Кошијев тензор напона*. Ако су дате координатне осе (сл 4.4) одговарајуће компоненте тензора напона су приказане на слици 4.4 (позитивна оријентација). Ако се са ω означи спољашња запреминска сила која делује на дато тело, онда *Навијеове једначине* (види лекцију2) у кондезованој применом тензорских величина гласи:

$$\nabla \boldsymbol{T} + \boldsymbol{\omega} = 0 \tag{4.24}$$

Такође, применом моментних једначина равнотеже добија се да је Кошијев тензор напона симетричан (одговарајући тангенцијални напони су једнаки): $\boldsymbol{T} = \boldsymbol{T}^{\boldsymbol{T}}$

Конститутивне једначине

Уопштена теорија о контитутивни једначинама у механици континуума је базирана на три принципа:

1. *принцип детерминизма*
2. *принцип локалног дејства*
3. *принцип материјалне инваријантности.*

Принцип детерминизма. Напрезање у телу је одређено *историјом кретања тела*

$$\mathbf{T} = F_{\tau=-\infty}^{\tau=t}(\Psi(\mathbf{X},\tau),\mathbf{X},t)\,. \tag{4.25}$$

Једначина (4.25) представља тренутно напрезање честице у положају *X*. Напрезање зависи од целе историје кретања (на пример, све време, τ, током ког се кретање десило, до времена у тренутку $-\infty \le \tau \le t$).

Принцип локалног дејства. Локално дејство је одређено само одговарајућим локалним кретањем.

Принцип материјалне инваријантности. Било која два посматрача кретања материјалног тела, уочавају исто напрезање. Развијањем функције $\Psi(X,\tau)$ ред у околини почетне тачке X_0, следи да је

$$\begin{aligned}\Psi(\mathbf{X},\tau) &= \psi(\mathbf{X}_0,\tau) + \mathbf{F}(\mathbf{X}_0,\tau)(\mathbf{X}-\mathbf{X}_0) + \\ &+ \frac{1}{2}\nabla\mathbf{F}(\mathbf{X}_0,\tau)(\mathbf{X}-\mathbf{X}_0)\cdot(\mathbf{X}-\mathbf{X}_0) + \ldots\end{aligned} \tag{4.26}$$

Према једначини (4.25), F у општем случају зависи од $\mathbf{F}$, $\nabla\mathbf{F}$,.. Овакав материјал се сматра *сложеним* („*non-simple*") материјалом. Ако зависи F само од $\mathbf{F}$, такав материјал се сматра *простим* („simple") материјалом. Овде се првенствено посматрају *прости материјали*. Формално, за просте материјале, једначина (4.25) може се писати као

$$\mathbf{T} = \Gamma_{\tau=-\infty}^{\tau=t}(\mathbf{F}(\mathbf{X},\tau),\mathbf{X}). \tag{4.27}$$

Битно је знати следећу карактеристику простих материјала. Ако деформација може бити описана само са прва два члана у једначини (4.26), такво кретање је познато као *хомогена деформација*. У овом случају је $\mathbf{F}$, је уопштем случају, само функција од τ. Према томе, ако један експериментатор жели тестирањем да одереди конститутивну једначину простог материјала, све што треба да уради је да изазове хомогену деформацију простог материјала. Типичне хомогене деформације укључују униформно ширење, чисто смицање, једнодимензионо издужење, дводимензионално истезање, што је све могуће једноставно извршити у лабораторијским условима.
Треба имати на уму да ако Γ не зависи експлицитно од **X**, такав материјал сматра се *хомогеним материјалом*. У даљем ће бити посматрани *само прости и хомогени материјали*. У том случају, специфичан облик конститутивних једначина ће имати облик

$$\mathbf{T} = \Gamma_{\tau=-\infty}^{\tau=t}(\mathbf{F}(\tau)). \tag{4.28}$$

Применом принципа материјалне инваријантности на једначину (4.27), може се добити да је стање напрезања код простих материјала одређено историјом напрезања, на пример

$$\mathbf{T} = \mathrm{T}_{\tau=-\infty}^{\tau=t}(\mathbf{C}(\tau)). \tag{4.29}$$

Опште конститутивне једначине чврстих тела

Еластични материјали су прости материјали где напон зависи од тренутног стања деформације, а не од претходне историје деформације, тј. еластични материјал „меморише" само тренутно стање деформације док „заборавља" све претходне деформације. Тада, једначина (4.27) постаје

$$\mathbf{T} = \mathrm{T}(\mathbf{C}(t)). \tag{4.30}$$

Вискоеластични материјали су прости материјали чији су напони одређени целокупном историјом деформација, тј., они „*меморишу*" деформације које су се претходно десиле до тренутних деформација, али не заувек. Њихова меморија бледи (материјали са тзв.„бледећом"(опадајућом) меморијом), (materials of fading memeory).

$$\mathbf{T} = \mathrm{T}_{\tau=-\infty}^{\tau=t}(\mathbf{C}(\tau)). \tag{4.31}$$

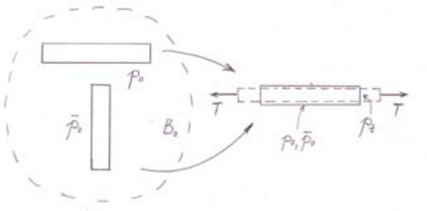
За пластичне материјале не постоји тачан теоријски приказ конститутивног понашања. Већина једначина су изведене или из емпиријских представа пластичности, или из специјалних случајева. Грубо речено, при класичној пластичности, одговор материјала не зависи од времена у смислу да материјал „меморише" пластичне деформације заувек (*трајна деформација*).
Пороеластични материјали ће имати конститутивну једначину сличну оној код вискоеластичних материјала. Ако, поред

механичких, постоје еластични, хемијски, биолошки или термички процеси такви да одређују стање напона, тада би одговарајући параметри требали да буду укључени у конститутивне једначине.

Изотропија

Каже се да је материјал изотропан ако поседује исте особине у свим правцима. Прецизније, стање напона је исто за било које две референтне конфигурације које се међусобно разликују за круту ротацију (слика 4.5).

Може се показати да за изотропне еластичне материјале, општа конститутивна једначина може се свести на једноставан облик



Слика 4.5

$$\mathbf{T}=\chi_0\mathbf{1}+\ \chi_1\mathbf{C}+\ \chi_2\ \mathbf{C}^2. \tag{4.32}$$

Овде су χ_0,χ_1 и χ_2 *коефицијенти понашања материјала.* Ово су скаларне функције три основне инваријанте од $\mathbf{C}$[*] дате као

$$I_C \equiv tr\mathbf{C},\ \ II_C \equiv \frac{1}{2}\left[(tr\mathbf{C})^2 - tr\mathbf{C}^2\right],\ III_C \equiv \det\mathbf{C}. \tag{4.33}$$

Ове функције се зову инваријанте, јер не зависе од избора координатног система. Пошто је

$$I_C = \alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2,\ \ II_C \equiv \alpha_1^2\alpha_2^2+\alpha_2^2\alpha_3^2+\alpha_3^2\alpha_1^2 \text{ и}$$

$$III_C = \alpha_1^2\alpha_2^2\alpha_3^2, \tag{4.34}$$

тада једначина (4.32) може бити написана као

$$\mathbf{T} = v_o\mathbf{1} + v_1\mathbf{C} + v_2\mathbf{C}^2 \tag{4.35}$$

где су v скаларне функције главних истезања $\{\alpha_i\}$. Општа конститутивна једначина за изотропна вискоеластична чврста тела је много комплекснија него једначина (4.30) и поред три члана мере деформација,такође укључује и члан који представља меру брзине деформације. На пример, изотропни вискоеластични материјал има 13 материјалних коефицијента који су скаларне функције главних инваријанти тензора напона.

4.2 Еластичност

Еластични материјални су конзервативни материјали, тј. не дисипирају енергију. То није случај код биолошких ткива чија је карактеристика често значајано *„губљење енергије“*, што се огледа кроз великог (напон-мере деформације) хистерезиса или феномена типа релаксације напона, фазе заостајања између улазних и излазних сигнала у физиолошким системима, итд. Ипак, у многим случајевима теорија еластичности је корисна у циљу добијања квалитативних, као и квантитативних предвиђања која се тичу понашања датог физиолошког система у статичким или квази-статичким условима. Генерално, ова теорија није широко коришћена у проучавању динамичких понашања физиолошких система.

Линеарна теорија еластичности -примена на биолошка ткива

---

[*] напонске инваријанте,види лекцију 2, стр.6 где су сада

$\sigma_i = \alpha_i^2,\ i = 1,2,3$

Ова теорија се бави се случајевима где су деформације мале и где се мале деформације придодају великим деформацијама (*инкрементална еластичност*). Теорија инкременталне еластичности је веома значајна у биореологији из следећег разлога. За разлику од многих инжењерских материјала чије је природно стање без напона, многа биолошка ткива су природно пренапрегнута (тј. плућа су напуњена, кожа је истегнута, крвни судови су под притиском, итд.). Ово су неке од разлика између биолошких и осталих материјала. Без обзира на то да ли су у питању стања без напона или пренапрегнута природна стања, контитутивне једначине у линеарној еластичности дате су линеарном везом напон-мера деформације, познатом као Хооке-ов закон

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}_0 + \mathbb{C}\mathbf{e}\,, \tag{4.36}$$

где је $\mathbf{T}_0$ напон, а $\mathbb{C}$ коефицијент еластичности (Trusdell & Noll, 1965). Коефицијент еластичности је *тензор четвртог реда* (C_{ijkl}). Код материјала чије је природно стање је стање без напона $\mathbf{T}_0 \equiv 0$, $\mathbb{C} = const$. Другачије речено, $\mathbb{C}$ зависи од $\mathbf{T}_0$. Ово је очекивано будући да што је преднапрезање веће, материјал је крући.

Ако је материјал изотропан и у изотропном стању преднапрегнут, на пример, $\mathbf{T}_0 = -p_0 1$ где је p_0 хидростатички притисак, онда једначина (4.36) може бити написана као

$$\mathbf{T} = -p_0 1 + \lambda tr e 1 + 2\mu e\,, \tag{4.37}$$

где су λ и μ познате као *привидни (apparent) Ламе-ови коефицијенти* еластичности (Ламе-ове константе). Негативни знак преднапрезања представља конвенцију пошто притисак који делује на материјално тело има тенденцију да га компримује. Назив „привидан“ произилази из чињенице да оба коефицијента зависе од p_0. Ако је $p_0 = 0$, онда су привидни коефицијенти константни. Треба запамтити да ако преднапрезање није изотропно, онда конститутивна једначина не може бити написана у облику једначине (4.37), не везано да ли је природно стање материјала изотропно. Према томе, једначина (4.37) захтева природно изотропију и изотропско преднапрезање. Такво стање,услов је, на пример, присутан у случају плућа.

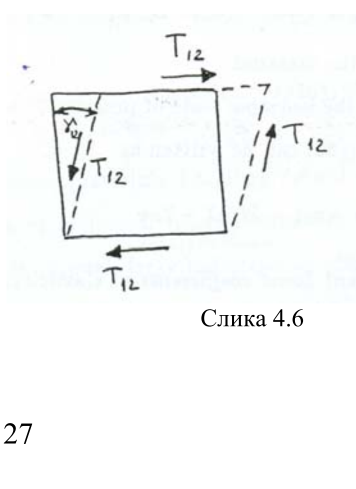
Једначина (4.37) може бити изведена из, или једначине (4.36) претпостављајући изотропију, или из више уопштеног израза за конститутивну једначину изотропних материјала, једначине (4.32) и (4.35).

Да би се разумело која је улога горње једначине, при разумевању механичког понашања биолошких ткива, треба размотрити физичко значење *Ламе*-ових коефицијената.

Физичке интерпретације коефицијената еластичности

Претспоставља се да је у питању деформација при којој се запремина не мења *(isovolumic)* и рефлектује се само променом облика материјалног тела. Онда је $tr\mathbf{e} = 0$ и одатле једначина (4.37) постаје

$$\mathbf{T} = -p_0 1 + 2\mu\mathbf{e}\,. \tag{4.38}$$



Слика 4.6

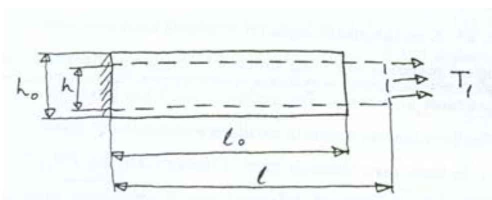
Таква деформација се односи на деформацију смицања и одговарајућег напона и мере деформације, као напон смицања и мере деформације. Коефицијент μ познат је као *модуо смицања*. Одражава способност материјала да се одупре промени облика при којој долази до промене запремине. Детаљније објашњење је дато слици 4.6, где је напон смицања T_{12} деформисао коцку у ромбоидно чврсто тело у облику коцке исте запремине.Угао $\gamma_{12}/2$ страна ромбоида представља угао клизања. За мала клизања он је једнак линеарној деформацији клизања e_{12}.За линеарни изотропни еластични материјал према Хуковом закону T_{12} линеарно зависи од e_{12} где фактор пропорционалности μ представља модул смицања. Деформација која је приказана на слици 4.6 је позната као „једноставно смицање“. Сада претпоставимо да је деформација таква да облик остаје исти, и у том случају су деформације једнаке тј. $e_1 = e_2 = e_3 = e$.На тај начин једначина (4.37) постаје

$$\mathbf{T} = \left[-p_0 + \left(3\lambda + 2\mu\right)e\right]1 \tag{4.39}$$

Како је промена запремине $\Delta V / V = tre = 3e$ једначина (4.39) је сада

$$\mathbf{T} = \left[-p_0 + \kappa \frac{\Delta V}{V}\right]1 , \tag{4.40}$$

и $\kappa = \lambda + 2\mu/3$ где је са κ означен запремински модул који представља способност материјала да се опире униформној промени запремине.Ако је материјал нестишљив онда је $\kappa \to \infty$.



Слика 4.7

У инжењерској литератури користи се друга два коефицијента у објашњењу могућности одговора материјала на мале поремећаје. То су Јунгов модуо еластичности E и Поасонов коефицијент ν *

У случају једноосног напрезања сл.4.7 , има се:

$$T_1 = Ee_1 - p_0,\ T_2 = T_3 = -p_0, \tag{4.41}$$

$$\nu = -e_2 / e_1 = -e_3 / e_1 \tag{4.42}$$

Међутим, пошто су биолошка ткива неправилних облика и постоје неаксијална напрезања то није увек корисно користити претходне инжењерске коефцијенте тј. не представљају корисне индикаторе еластичних особина биолошких ткива као у случају класичних инжењерских материјала.

operator	primjeri	zapis	raspis
grad $\nabla *$	grad f	∇f	$\frac{\partial f}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\bar{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\bar{k}$ (vektor)
	grad $\bar{v}$	$\nabla\bar{v}$	$\begin{bmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{\partial v_x}{\partial y} & \frac{\partial v_x}{\partial z} \\ \frac{\partial v_y}{\partial x} & \frac{\partial v_y}{\partial y} & \frac{\partial v_y}{\partial z} \\ \frac{\partial v_z}{\partial x} & \frac{\partial v_z}{\partial y} & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{bmatrix}$ tenzor
	grad**T**	∇**T**	tenzor trećeg reda
div $\nabla \cdot *$	div$\bar{v}$	$\nabla \cdot \bar{v}$	$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$ (skalar)
	div**T**	$\nabla \cdot$**T**	$\left(\frac{\partial T_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial T_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial T_{yz}}{\partial y}\right)\bar{i} + \left(\frac{\partial T_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial T_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial T_{zy}}{\partial y}\right)\bar{j} + \left(\frac{\partial T_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial T_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial T_{zz}}{\partial y}\right)\bar{k}$ (vektor)
rot $\nabla \times *$	rot $\bar{v}$	$\nabla \times \bar{v}$	$\begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}\right)\bar{i} + \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}\right)\bar{j} + \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right)\bar{k}$ (vektor)

Слика 4.8

* може имати и друге ознаке види лекцију 2 , μ

Питања I:

1.Подела механике континуума.

2. Дефинисати градијент деформације.

3. Издужење $\alpha_{\hat{n}}$ материјалног елемента

4. Промена запремине dv/dV чему је једнака?

5.Ако је познат градијент деформације како се одређује $\boldsymbol{C}$ десни Коши-Гринов тензор деформације, и шта он представља?

6. Чему је једнак $\boldsymbol{E}$ тзв. *Грин-СенВенанов тензор деформације?*

7. Показати да је $\gamma_{n_1 n_2} \approx 2\boldsymbol{e}\hat{\boldsymbol{n}}_1 \cdot \hat{\boldsymbol{n}}_2$

8. Објаснити на којим принципима је уопштена теорија о контитутивни једначинама у механици континуума базирана?

9. Шта представља принцип материјалне инваријантности?

10. Формулисати Хуков закон код биолошких ткива, објаснити.

Задатак1 Показати да је

$$\left(Fa \times Fb\right) \cdot Fc = \det F\left(a \times b\right) \cdot c$$

$$F^{*T}\left(a \times b\right) = Fa \times Fb$$

Задатак 2. Показати да је $dv = dV\left(1 + tr\left(e\right)\right)$

Задатак 3 . Полазећи од $\nabla \boldsymbol{T} + \boldsymbol{\omega} = 0$ (4.24) извести Навијеове једначине у развијеном облику (лекција 2)

Задатак4. Показати да једначина $\mathbf{T} = -p_0 1 + \lambda tre 1 + 2\mu e$ може бити добијена линеаризацијом једначине $\mathbf{T} = \nu_o \mathbf{1} + \nu_1 \mathbf{C} + \nu_2 \mathbf{C}^2$.

Задатак 5. Показати да постоје следеће везе између: $\mu, \lambda, \kappa, E, \nu$

$$\nu = \frac{\lambda}{2\left(\lambda + \mu\right)} = \frac{3\kappa - 2\mu}{2\left(3\kappa + \mu\right)}$$

$$E = \frac{\mu\left(3\lambda + 2\mu\right)}{\left(\lambda + \mu\right)} = \frac{9\kappa\mu}{\left(3\kappa + \mu\right)}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Thomas G. Mezger, The Rheology Handbook 2nd Edition by 2006, Vincentz Network, Hannover, Germany

2. Тензорски рачун, Т. Анђелић, Грађевинска књига,1959,Београд

3.Теорија еластичности, Д. Рашковић, Научна књига, Београд,1985.

4. С. Ђурић, Предавања из тензорског рачуна,скрипта, Машински факултет, Београд1990.