Машински факултет
УНИВЕРЗИТЕТА У БЕОГРАДУ

БИОМЕХАНИКА ТКИВА И ОРГАНА

ОСНОВЕ МЕХАНИКЕ КОНТИНУУМА -КИНЕМАТИКА

проф. М П. Лазаревић, Машински факултет, Универзитет у Београду, Србија

- **Механика континуума** је део механике који изучава деформабилна тела, тј, тела код којих се, у општем случају, растојања између честица тела мењају; она изучава дефомрацију, напонско стање и течење реалних тела, .тј. чврстих тела течности и гасова.
- У највећем делу механике континуума, поред *непрекидности* уводе се још две додатне претпоставке о природи материјала: *хомогеност и изотропност.*
- Теорија механике континуума се може поделити на три дела:
- а) *Општи принципи*
- б) *Конститутивне једначине*
- ц) *Специјалне теорије*

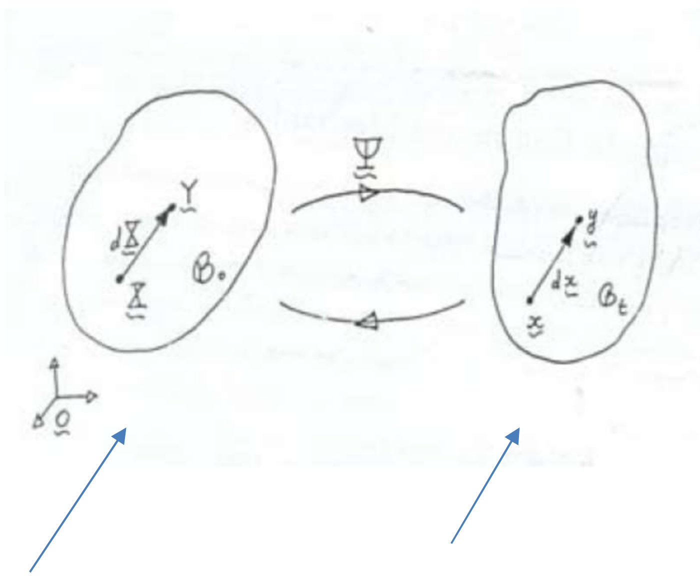
- **Општи принципи** су применљиви на све врсте непрекидних
- средина. То су општи закони одржања и баланса појединих
- физичких величина који важе за сва тела. Ти закони су:
  - закон одржању масе,
  - баланс количине кретања
  - баланс момента количине кретања
  - први закон термодинамике или закон баланса енергије
  - други закон термодинамике или принцип ентропије

Конститутивне једначине - у циљу узимања у обзир структуре (конституције) разних материјала која карактерише понашање материјала, одређују се додатне једначине тзв. конститутивне. Домен дефинисаности конститутивних променљивих одређен је одговарајућим физичким особинама материјала. С обзиром да се материјали, за које се одређују конститутивне једначине представљени својим математичким моделима, конститутивне једначине дефинишу идеалан материјал.

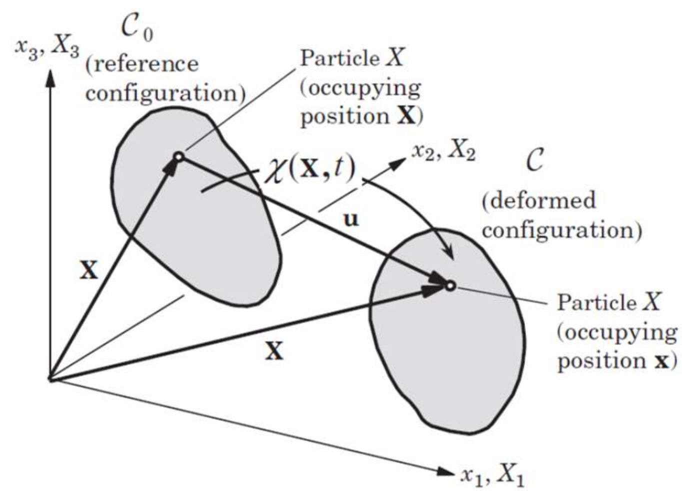
- *Специјалне теорије-* сваког иделаног материјала су засноване на општим принципима и конситутивним једначинама тог материјала. Такве теорије су: теорија еластичности, теорија пластичности, реологија итд. Свака од њих, с обзиром на значај и примену представља област од засебног интереса.

Кинематика

Кретање Посматра се кретање деформабилног тела где посматрамо само деформацију истог (*мења облик и запремину*), (не посматра се транслација и ротација истог)*



Недеформисана и деформисана конфигурација тела.



Reference and deformed configurations of a body.

сл.4.1.Нека је почетна конфигурација тела у тренутку $t=0$ је V_o а текућа конфигурација V_t .Кретање из ***Bo*** у ***Bт*** је означено са ψ . Нека је са $\boldsymbol{X}$ означен вектор положаја делића материјалног тела ***Bo*** и нека се са $\boldsymbol{x}$ означен такође вектор положаја у ***Bт.*** Онда је кретање одређено следећим изразом

$$\boldsymbol{x}=\psi(\boldsymbol{X},\boldsymbol{t}),\ \forall \boldsymbol{X}\in V_o,\ \forall t\geq 0 \qquad \text{где је} \quad \boldsymbol{X}=\psi(\boldsymbol{X},\boldsymbol{0}),$$

Iоставља се питање колика је промена облика □V а колика ромена запремине ΔV разматраног деформабилног тела?

АНАЛИЗА ДЕФОРМАЦИЈЕ

Градијент деформације:

Уочавају се вектори $d\underline{X}=\underline{Y}-\underline{X}$ и $d\underline{x}=\underline{y}-\underline{x}$ тзв. линеарни диференцијални елементи у одговарајућим конфигурацијама.

- *Такође је потребно уочити да промена интезитета вектора d x представља меру промене запремине уоченог тела, док промена оријентације вектора d x представља меру промене облика истог.*

$$d\underline{x} = \underline{y} - \underline{x} = \psi(Y,t) - \psi(X,t) = \psi(X + dX,t) - \psi(X,t) =$$

$$= \nabla\psi(X,t)\,dX + O(\ldots) \approx \nabla\psi(X,t)\,dX,\quad \nabla(.) = \frac{\partial(\ )}{\partial X}\vec{i} + \frac{\partial(\ )}{\partial Y}\vec{j} + \frac{\partial(\ )}{\partial Z}\vec{k}$$

градијент деформације и он представља тензорску величину другог реда означену са ***F***

$$F_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} = \frac{\partial \psi_i}{\partial X_j},\ i,j = 1,2,3 \Rightarrow$$

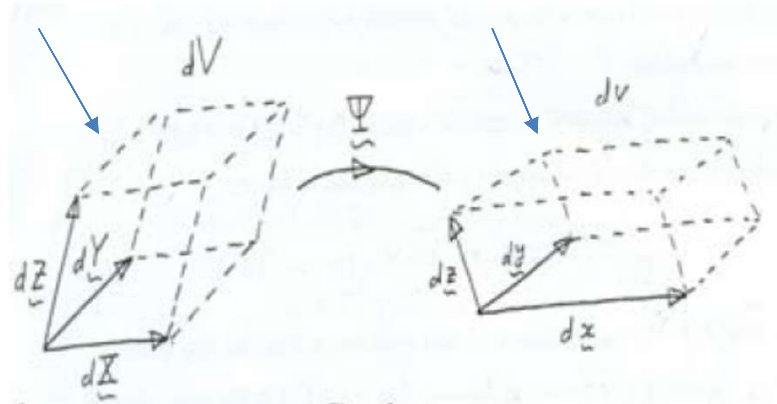
$$dx_i = F_{ij}dX_j \quad \rightarrow d\mathbf{x} = \boldsymbol{F}d\mathbf{X}$$

$$F = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial X_1} & \frac{\partial x_1}{\partial X_2} & \frac{\partial x_1}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial X_1} & \frac{\partial x_2}{\partial X_2} & \frac{\partial x_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial X_1} & \frac{\partial x_3}{\partial X_2} & \frac{\partial x_3}{\partial X_3} \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{X} = \mathrm{d}\boldsymbol{X}\cdot\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}.$$

- може се уочити три некомпланарна вектора (сл. 4.2), dX ,dY,dZ у реф. конфигурацији и три вектора у текућој конфигурацији dx,dy,dz , при чему су запремине одређене са:

$$dV = dX \cdot (dY \times dZ),\ dv = dx \cdot (dy \times dz)$$



Слика 4.2

Промена запремине тј. $dv\ /\ dV$

$$\frac{dv}{dV} = \frac{dx \cdot (dy \times dz)}{dX \cdot (dY \times dZ)} = \frac{FdX \cdot (FdY \times FdZ)}{dX \cdot (dY \times dZ)} = \det F$$

- ***Вектор померања*** се дефинише $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{X}$. Градијент вектора u
- је одређен са:

$$\nabla u = \nabla x - \nabla X = \nabla \psi - \boldsymbol{1} = \boldsymbol{F} - \boldsymbol{1} ,$$

1 јединични тензор, односно јединична матрица. У индексној нотацији горњи израз се може написати као:

$$\nabla u = \frac{\partial u_i}{\partial X_j} = F_{ij} - \delta_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} - \delta_{ij} , \quad i, j = 1, 2, 3$$

δ_{ij} Кронекеров делта $\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$

Издужење $\alpha_{\hat{n}}$ ***материјалног елемента***

Издужење уоченог материјалног делића (линеарни диференцијални елемент) види сл. 4.1 је одређена са:

$$\alpha_{\hat{n}} = \left\| \frac{dx}{dX} \right\| = \sqrt{\frac{dx \cdot dx}{\|dX\|^2}} = \sqrt{\frac{FdX \cdot FdX}{\|dX\|^2}} = \sqrt{\frac{dXF^T \cdot FdX}{\|dX\|^2}} = \sqrt{\hat{n}C\hat{n}}$$

где ***C*** *десни Коши-Гринов тензор деформације* (представља меру деформације) тј:

$$C = F^T \cdot F$$

и који је симетричан:

$$C = C^T$$

- *Геометријска интерпретација*:
- Претпоставимо да је $\hat{n}$ карактеристични (главни) вектор тензора C.

Тада према претходним изразима следи да је:

$$C\hat{n}_1 = \lambda_1 \hat{n}_1 \; / \cdot \hat{n}_1 \Rightarrow \hat{n}_1 C \hat{n}_1 = \hat{n}_1 \lambda_1 \hat{n}_1 = \lambda_1 \hat{n}_1^2 = \lambda_1 \Rightarrow$$

$$\alpha_1^2 = \lambda_1$$

тј. да је сопствена вредност $\lambda_1 = \alpha_1^2$ једнака квадрату издужења, тј. тензор C има сопствене вредности које су једнаке квадратима издужења:

$$\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} \alpha_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3^2 \end{bmatrix}$$

Друга мера деформације је релативна деформација, једна од могућих дефиниција исте, јесте

$$\frac{\left\|dx\right\|^2 - \left\|dX\right\|^2}{\left\|dX\right\|^2} = \hat{n}\left(F^T F - \boldsymbol{1}\right)\hat{n} = \hat{n}\left(C - \boldsymbol{1}\right)\hat{n} = 2\hat{n}E\hat{n}$$

где је са ***E*** означен тзв. *Грин-СенВенанов тензор деформације**
а са ***1*** јединични тензор.

Имајући у виду да је: $\nabla u = F - \boldsymbol{1}$ после замене у претходни израз за E добија се:

$$\boldsymbol{E} = \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{F}^T \boldsymbol{F} - \boldsymbol{1}\right) = \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{2}}[(\nabla \boldsymbol{u} + \boldsymbol{1})^T (\nabla \boldsymbol{u} + \boldsymbol{1}) - \boldsymbol{1}] =$$

$$= \frac{1}{2}[\nabla \boldsymbol{u} + \nabla \boldsymbol{u}^T + \nabla \boldsymbol{u}^T \nabla \boldsymbol{u}]$$

Уочава се да је тензор симетричан $E = E^T$ и нелинеаран захваљујући последњем члану (користи се за опис великих деформација). Ако су међутим, деформације мале, тј. ⍰u ⍰1 онда је последњи члан занемарљив, тако да добијамо *линеарни тензор деформације*

$$\boldsymbol{E} \approx \frac{1}{2}\left(\nabla \boldsymbol{u} + \nabla \boldsymbol{u}^T\right) \equiv \boldsymbol{e}$$

који се користи у опису малих(инфинитезималних) деформација у теорији линеарне еластичности и линеарне вискоеластичности.

Друга интерпретација ***e*** се може дати на следећи начин:

$$\frac{\|dx\| - \|dX\|}{\|dX\|} = \alpha_{\hat{n}} - 1 = \left(\sqrt{\hat{n}C\hat{n}} - 1\right) = \left(\sqrt{1 + 2\hat{n}E\hat{n}} - 1\right) \approx 1 + \hat{n}E\hat{n} - 1 \approx \hat{n}e\hat{n}$$

$$\begin{Bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 - 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 - 1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3 - 1 \end{bmatrix}$$

главне деформације e_1, e_2, e_3

На основу раније изведеног израза добија се да је

$$\frac{dv}{dV} = \det F = \sqrt{\det C} = \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3$$

$$\frac{dv}{dV} = \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \approx (1 + e_1)(1 + e_2)(1 + e_3) \approx 1 + e_1 + e_2 + e_3 = 1 + trag(\boldsymbol{e})$$

Закључак: *само дијагонални чланови одговарајућег тензора деформације доприносе промени запремине*

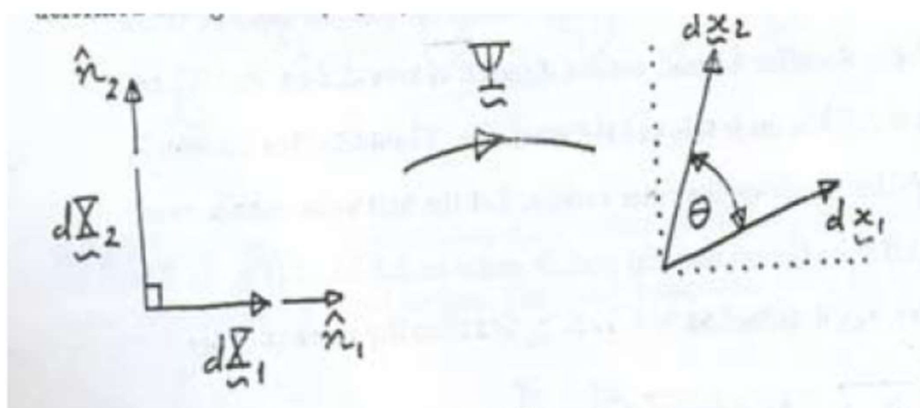
$$dv = dV\left(1 + tr\left(e\right)\right)$$

Смицање - промена облика

Посматра се деформација смицања $\gamma_{\hat{n}_1\hat{n}_2}$ која је мера деформа настале променом угла између два материјална делића (влакна) који су били ортогонални у референтној конфигурацији одређени са

$\hat{n}_1, \hat{n}_2$ тј. $\gamma_{\hat{n}_1\hat{n}_2} = \left(\pi / 2 - \theta\right)$

где је θ угао измеђз истих влакана али сада у деформисаној (посматраној) конфигурацији, види сл. 4.3 дефинисана на следећи начин:



Слика 4.3

$$\sin\gamma_{n_1n_2} = \cos\theta = \frac{d\mathbf{x}_1 \cdot d\mathbf{x}_2}{\|dx_1\|\|dx_2\|} = \frac{CdX_1dX_2}{\alpha_1\alpha_2\|dX_1\|\|dX_2\|} =$$

$$= \frac{2\hat{n}_1 E\hat{n}_2}{\sqrt{\left(1+2\hat{n}_1 E\hat{n}_1\right)\left(1+2\hat{n}_2 E\hat{n}_2\right)}}$$

Како су у питању мале деформације тј. $\sin\gamma \approx \gamma,\ E \approx e$ следи:

$$\gamma_{\hat{n}_1\hat{n}_2} = 2\hat{n}_1 e\hat{n}_2$$

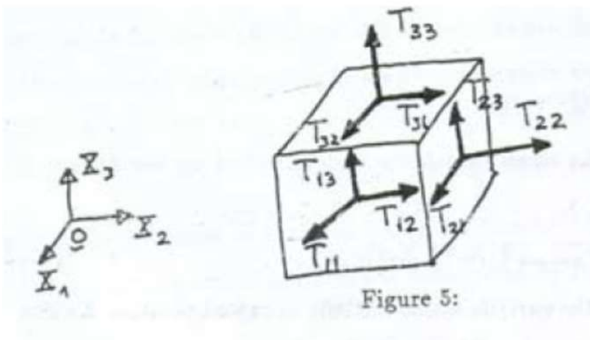
Ако $\{\hat{n}_i\}$ леже у правцима координатних оса, онда се добија да је

$$\gamma_{n_1n_2} = 2\boldsymbol{e}_{12} \quad \text{тј.} \quad \boldsymbol{e}_{12} = \frac{1}{2}\gamma_{n_1n_2}$$

Кошијев тензор напона

- Осим деформације, потребно је познавати и напонско стање уоченог материјала тј. можемо одредити вектор напона као:

$$\boldsymbol{t}_{\hat{m}} = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta F}{\Delta S} = \frac{dF}{dS}$$



Слика 4.4

где је са $\Delta \boldsymbol{F}$ означена сила која делује, тако да вектор напона зависи од два вектора, вектора површине $\Delta S \to \hat{m}$ и вектора $\boldsymbol{F}$,
тј. може се приказати у тензорској нотацији као:

$$\boldsymbol{t}_{\hat{m}} = T\hat{\boldsymbol{m}}$$

где је са $T = T^{T}$ означен тзв. *Кошијев тензор напона*.

Конститутивне једначине

Уопштена теорија о контитутивним једначинама у механици континуума је базирана на три принципа:

1. **принцип детерминизма**
2. **принцип локалног дејства**
3. **принцип материјалне инваријантности.**

Принцип детерминизма. Напрезање у телу је одређено историјом кретања тела

$$\hat{\mathbf{T}} = F_{\tau=-\infty}^{\tau=t}(\Psi(\mathbf{X},\tau),\mathbf{X},t).$$

- тренутно напрезање честице у положају X. Напрезање зависи од целе историје кретања.

Принцип локалног дејства. Локално дејство је одређено само одговарајућим локалним кретањем.

Принцип материјалне инваријантности. Било која два посматрача кретања материјалног тела, уочавају исто напрезање. Развијањем функције $\Psi(X,\tau)$ ред у околини почетне тачке X_0

$$\Psi(\mathbf{X},\tau) = \psi(\mathbf{X}_0,\tau) + \mathbf{F}(\mathbf{X}_0,\tau)(\mathbf{X}-\mathbf{X}_0) +$$

$$+\frac{1}{2}\nabla\mathbf{F}(\mathbf{X}_0,\tau)(\mathbf{X}-\mathbf{X}_0)\cdot(\mathbf{X}-\mathbf{X}_0) + \ldots$$

F у општем случају зависи од $\mathbf{F}$, $\nabla\mathbf{F}$,..

Овакав материјал се сматра **сложеним** („non-simple“) **материјалом**. Ако F зависи само од $\mathbf{F}$, такав материјал се сматра **простим** („simple“) **материјалом**. Овде се првенствено посматрају прости материјали.

$$\mathbf{T} = \Gamma_{\tau=-\infty}^{\tau=t}(\mathbf{F}(\mathbf{X},\tau),\mathbf{X}) .$$

Битно је знати следећу карактеристику простих материјала. Ако деформација може бити описана само са прва два члана у једначини(4.26), такво кретање је познато као хомогена деформација.

Ако Г не зависи експлицитно од X, такав материјал сматра се хомогеним материјалом. У даљем ће бити посматрани само прости и хомогени материјали. У том случају, специфичан облик конститутивних једначина ће имати облик

$$\mathbf{T} = \Gamma_{\tau=-\infty}^{\tau=t}(\mathbf{F}(\tau)) .$$

Применом принципа материјалне инваријантности на једначину може се добити да је стање напрезања код простих материјала одређено историјом напрезања

$$\mathbf{T} = \mathrm{T}_{\tau=-\infty}^{\tau=t}(\mathbf{C}(\tau)) .$$

Опште конститутивне једначине чврстих тела

Еластични материјали су прости материјали где напон зависи од тренутног стања деформације, а не од претходне историје деформације, тј. Еластични материјал„меморише“ само тренутно стање деформације док „заборавља“ све претходне деформације.

$$\mathbf{T} = \mathrm{T}(\mathbf{C}(t)).$$

Вискоеластични материјали су прости материјали чији су напони одређени целокупном историјом деформација, тј., они „меморишу“ деформације које су се претходно десиле до тренутних деформација, али не заувек. Њихова меморија бледи

$$\mathbf{T} = \mathrm{T}_{\tau=-\infty}^{\tau=t}(\mathbf{C}(\tau)).$$

За **пластичне материјале** не постоји тачан теоријски приказ конститутивног понашања. Већина једначина су изведене или из емпиријских представа пластичности, или из специјалних случајева.

Пороеластични материјали ће имати конститутивну једначину сличну оној код вискоеластичних материјала. Ако, поред механичких, постоје еластични, хемијски, биолошки или термички процеси такви да одређују стање напона, тада би одговарајући параметри требали да буду укључени у конститутивне једначине.