ДИФЕРЕНЦИЈАЛНЕ ЈЕДНАЧИНЕ

- Нека је: x – независно променљива

  $y=y(x)$ – непозната ф-ја (једне независно променљиве)

  $y'(x), y''(x), \dots, y^{(n)}(x)$ – изводи ф-је $y(x)$.

- Једначину

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0,$$

у којој фигурише бар један од извода непознате ф-је $y=y(x)$, називамо (обична) диференцијална једначина (скраћено (О)ДЈ)

- Ред ДЈ је одређен редом највишег извода који у њој фигурише.

ДЈ првог реда ($n=1$)

- Општи облик ДЈ 1. реда: $F(x,y,y')=0$ (*)
- Ако се (*) може једнозначно решити по y', онда добијамо нормални облик ДЈ 1. реда: $y'=f(x,y)$. (**)
- Опште решење ДЈ (**) је облика $y=\varphi(x,c)$, где је c произвољна константа. (то је фамилија решења која зависи од параметра c).

Партикуларно решење ДЈ (**) је решење које можемо добити из општег решења за конкретну вредност параметра c

Сингуларно решење ДЈ (**) је решење које не можемо добити из општег решења ни за једну вредност параметра c.
(то јесте решење ДЈ (**), али не може да се добије из општег решења)

• Одређивање решења $y=y(x)$ ДЈ (**) које задовољава тзв. Кошијев услов

$$y(x_0)=y_0$$

назива се Кошијев задатак.

ФОРМИРАЊЕ ДЈ

⊛ Формирати ДЈ ~~које одговара~~ фамилије ~~кр~~ кривих $y^2 = 2cx + c^2$

$y^2 = 2cx + c^2 \;\; /'_x$ (диференцирамо по x како би се појавио извод, тј. y')

$\cancel{2}yy' = \cancel{2}c \;,\quad c = yy'$

кад смо изразили c, вратимо га у почетну једнакост

$$y^2 = 2yy'x + (yy')^2$$

$\boxed{y^2y'^2 + 2xyy' - y^2 = 0}$ (мора прво да се појави y', смеју да се појаве x и y, не сме да се појави c)

⊛ Формирати ДЈ ~~које одговара~~ фамилије ~~кр~~ конусних пресека

$\dfrac{x^2}{a^2+\lambda} + \dfrac{y^2}{b^2+\lambda} = 1$, где је λ параметар фамилије

$$\frac{x^2}{a^2+\lambda} + \frac{y^2}{b^2+\lambda} = 1 \;\; /'_x$$

$$\frac{\cancel{2}x}{a^2+\lambda} + \frac{\cancel{2}yy'}{b^2+\lambda} = 0 \;\; /(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)$$

$$x(b^2+\lambda) + yy'(a^2+\lambda) = 0$$

$$b^2x + \lambda x + a^2yy' + \lambda yy' = 0$$

$$\lambda(x+yy') = -a^2yy' - b^2x$$

$$\lambda = -\frac{a^2yy' + b^2x}{x+yy'} \quad (\#) \longrightarrow$$

почетна: $\dfrac{x^2}{a^2+\lambda} + \dfrac{y^2}{b^2+\lambda} = 1 \quad (*)$

диференцирањем добили: $\dfrac{x}{a^2+\lambda} + \dfrac{yy'}{b^2+\lambda} = 0 \quad / \cdot x$

$$\frac{x^2}{a^2+\lambda} + \frac{xyy'}{b^2+\lambda} = 0 \quad (**)$$

$(*) - (**)$: $\dfrac{y}{b^2+\lambda}(y - xy') = 1$

$$y(y-xy') = b^2+\lambda$$

$$\lambda = y(y-xy') - b^2 \quad (\#\#)$$

елиминацијом λ из $(\#)$ и $(\#\#)$ добијамо

$$-\frac{a^2yy' + b^2x}{x+yy'} = y(y-xy') - b^2$$

$$-a^2yy' - \cancel{b^2x} = xy^2 - x^2yy' - \cancel{b^2x} + y^3y' - xy^2y'^2 - b^2yy'$$

$$xy^2y'^2 + y(x^2-y^2-a^2+b^2)y' - xy^2 = 0$$

$$\boxed{xyy'^2 + (x^2-y^2-a^2+b^2)y' - xy = 0}$$

ДЈ која раздваја променљиве

$y' = f(x)g(y) \quad /: g(y), \quad g(y) \neq 0$

$\frac{y'}{g(y)} = f(x)$

$\int \frac{y'}{g(y)}\,dx = \int f(x)\,dx + C$

смена: $y(x) = t, \quad y'(x)dx = dt$

$\int \frac{dt}{g(t)} = \int f(x)\,dx + C$

⊛ Одредити $\underbrace{\text{опште решење}}_{\text{о.р.}}$ ДЈ $\quad y' = (y+1)\,ctg\,x$

$y' = \underbrace{(y+1)}_{g(y)}\,\underbrace{ctg\,x}_{f(x)}$

$\frac{y'}{y+1} = ctg\,x, \quad y \neq -1$ (све што зависи само од y на једну страну, све што зависи само од x на другу страну)

$\int \frac{y'}{y+1}\,dx = \int ctg\,x\,dx + C$

смена: $y = t, \quad y'dx = dt$

$\underbrace{\int \frac{dt}{t+1}}_{=\ln|t+1|} = \underbrace{\int ctg\,x\,dx}_{} + C$

$= \int \frac{\cos x\,dx}{\sin x} = \left\{ \begin{array}{l} \sin x = s \\ \cos x\,dx = ds \end{array} \right\} = \int \frac{ds}{s} = \ln|s| = \ln|\sin x|$

може да остане C, али због једноставнијег записа решења мењамо C са $\ln C$.

$\ln|t+1| = \ln|\sin x| + \underline{\underline{C}}$

$\ln|y+1| = \ln|\sin x| + \underline{\ln C}$

$\ln|y+1| = \ln(C|\sin x|)$

$|y+1| = C|\sin x|$

$y+1 = C\sin x; \quad \boxed{y = C\sin x - 1}$ о.р.

(*) Одредити опште решење ДЈ $xy' - y = y^3$

$$xy' - y = y^3$$

$$y' = \frac{y^3 + y}{x}, \quad x \neq 0 \; \checkmark \text{ - ДЈ са раздвојеним променљивим}$$

$$\frac{y'}{y^3+y} = \frac{1}{x}, \quad y^3 + y \neq 0, \text{ тј. } y \neq 0$$

$$\int \frac{y'}{y^3+y}\,dx = \int \frac{dx}{x} + C$$

смена: $y = t, \; y'dx = dt$

$$\underbrace{\int \frac{dt}{t^3+t}}_{=I} = \underbrace{\int \frac{dx}{x}}_{=\ln|x|} + C$$

$$\frac{1}{t^3+t} = \frac{1}{t(t^2+1)} = \frac{A}{t} + \frac{Bt+C}{t^2+1} \quad / \, t(t^2+1)$$

$1 = A(t^2+1) + (Bt+C)t$; $t^2: \; 0 = A + B$, $\boxed{B = -1}$

$1 = At^2 + A + Bt^2 + Ct$; $t: \; \boxed{0 = C}$

; $1: \; \boxed{1 = A}$

$$I = \int \left(\frac{1}{t} + \frac{-t}{t^2+1}\right)dt = \left\{ \begin{matrix} t^2+1 = s \\ 2t\,dt = ds \end{matrix} \right\} = \ln|t| + \int \frac{-\frac{1}{2}ds}{s} =$$

$$= \ln|t| - \frac{1}{2}\ln|s| = \ln\frac{|t|}{\sqrt{t^2+1}}$$

$\ln\frac{|t|}{\sqrt{t^2+1}} = \ln|x| + \underline{\underline{C}}$; $\frac{|y|}{\sqrt{y^2+1}} = c|x|$

$\ln\frac{|y|}{\sqrt{y^2+1}} = \ln|x| + \underline{\underline{\ln|c|}}$; $\boxed{\frac{y}{\sqrt{y^2+1}} = cx}$ о.р.

$\ln\frac{|y|}{\sqrt{y^2+1}} = \ln(c|x|)$

ДЈ облика $y' = f(ax+by+c)$

Сменом $z = ax+by+c$, $z = z(x)$, ДЈ облика $y' = f(ax+by+c)$ се своди на ДЈ која раздваја променљиве

под „решити" подразумевамо одређивање свих решења ДЈ

(*) ~~Одредити опште решење~~ Решити ДЈ $y' = 2x+y-3$.

прво тражимо опште решење.

$y' = 2x+y-3$ - ДЈ облика $y' = f(ax+by+c)$

смена: $z = 2x+y-3$, $z = z(x)$

$z' = 2+y'$, $y' = z'-2$

$z'-2 = z$

$z' = z+2$ - ДЈ која раздваја променљиве $(f(x)=1)$

$\frac{z'}{z+2} = 1$, $\boxed{z \neq -2}$

$\int \frac{z'}{z+2}dx = \int dx + C$

смена: $z = t$, $z'dx = dt$

$\int \frac{dt}{t+2} = \int dx + C$

$\ln|t+2| = x + C$

$e^{\ln|t+2|} = e^{x+C} = e^{C}e^{x} = Ce^{x}$, $\quad e^{C} = C_1 \to C$

$|t+2| = Ce^{x}$

$t+2 = Ce^{x}$

$z+2 = Ce^{x}$

$2x+y-3+2 = Ce^{x}$

$\boxed{y = -2x+1+Ce^{x}}$ О.Р.

пошто тражимо сва решења (не само опште) ово посебно испитујемо

$z+2 = 0$

$2x+y-3+2 = 0$

$y = -2x+1$ - прво проверавамо да ли је ово решење полазне једначине

$y' = -2$

$-2 = 2x+(-2x+1)-3$ ✓

$\boxed{y = -2x+1}$ јесте решење полазне једначине

Затим испитујемо да ли је $y = -2x+1$ партикуларно или сингуларно решење.

Пошто се $y = -2x+1$ добија из О.Р. за $C = 0$, то је ПАРТИКУЛАРНО РЕШЕЊЕ (тј. је у e^{c}, $c = -\infty$)

Хомогена ДЈ

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

Сменом $z = \frac{y}{x}$, $z = z(x)$, хомогена ДЈ се своди на ДЈ која раздваја променљиве.

$z = \frac{y}{x}$, $y = xz$, $y' = z + xz'$

$z + xz' = f(z)$

$xz' = f(z) - z$

$\frac{z'}{f(z)-z} = \frac{1}{x}$, $f(z) \neq z$, $x \neq 0$

* Одредити опште решење ДЈ $y' = \frac{x^2+xy+y^2}{x^2}$

Запишимо дату ДЈ у облику $y' = 1 + \frac{y}{x} + \left(\frac{y}{x}\right)^2$ – хомогена ДЈ

смена: $z = \frac{y}{x}$, $y = xz$, $y' = z + xz'$

$\cancel{z} + xz' = 1 + \cancel{z} + z^2$; $z' = \frac{1+z^2}{x}$, $x \neq 0$ → ДЈ која раздваја променљиве

$\frac{z'}{1+z^2} = \frac{1}{x}$

$\int \frac{z'dx}{1+z^2} = \int \frac{dx}{x} + C$

смена: $z = t$, $z'dx = dt$

$\int \frac{dt}{1+t^2} = \ln|x| + \ln C$

$\operatorname{arctg} t = \ln(C|x|)$

$\operatorname{arctg} z = \ln(Cx)$

$\boxed{\operatorname{arctg} \frac{y}{x} = \ln(Cx)}$ – о.р.

(*) Одредити опште решење ДЈ $\left(x - y\cos\frac{y}{x}\right)dx + x\cos\frac{y}{x}\,dy = 0.$

Трансформишимо дату једначину:

$$x\cos\frac{y}{x}\,dy = \left(y\cos\frac{y}{x} - x\right)dx$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y\cos\frac{y}{x} - x}{x\cos\frac{y}{x}}, \quad x\cos\frac{y}{x} \neq 0 \quad \left(\begin{array}{l} x \neq 0, \ \cos\frac{y}{x} \neq 0 \\ \frac{y}{x} \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}, \ k \in \mathbb{Z} \\ y \neq \frac{(2k+1)\pi}{2}x \end{array}\right)$$

$$y' = \frac{y}{x} - \frac{1}{\cos\frac{y}{x}} \quad \text{- хомогена ДЈ}$$

$$z = \frac{y}{x}, \quad y = xz, \quad y' = z + xz'$$

$$\cancel{z} + xz' = \cancel{z} - \frac{1}{\cos z}$$

$$z' = -\frac{1}{x\cos z} \quad \text{- ДЈ која раздваја промењиве}$$

$$\cos z \cdot z' = -\frac{1}{x}$$

$$\int \cos z \cdot z'\,dx = \int\left(-\frac{1}{x}\right)dx + C$$

смена: $z = t, \quad z'dx = dt$

$$\int \cos t\,dt = -\int\frac{dx}{x} + \underline{C}$$

$$\sin t = -\ln|x| + \underline{\ln C}$$

~~$\sin y =$~~ $\sin z = -\ln(C|x|)$

$$\boxed{\sin\frac{y}{x} = -\ln(Cx)} \quad \text{О.Р.}$$

⊛ Одредити решење ДЈ

$$xy' = y + x\,tg\frac{y}{x}$$

које задовољава услов $y(1)=\frac{\pi}{6}$.

решавамо Кошијев задатак $xy'=y+x\,tg\frac{y}{x}$, $y(1)=\frac{\pi}{6}$.

прво треба одредити опште решење дате ДЈ.

запишимо дату ДЈ у облику

$$y'=\frac{y}{x}+tg\frac{y}{x}$$ — хомогена ДЈ

смена $z=\frac{y}{x}$, $y=xz$, $y'=z+xz'$

$$\cancel{z}+xz'=\cancel{z}+tg\,z$$

$$z'=\frac{tg\,z}{x}$$ — ДЈ која раздваја променљиве

$$\frac{z'}{tg\,z}=\frac{1}{x}$$

$$\int\frac{z'dx}{tg\,z}=\int\frac{dx}{x}+C$$

смена: $z=t$, $z'dx=dt$

$$\underline{\int\frac{dt}{tg\,t}}=\int\frac{dx}{x}+C$$

$$=\int\frac{\cos t\,dt}{\sin t}=\left\{\begin{array}{l}\sin t=s\\ \cos t\,dt=ds\end{array}\right\}=\int\frac{ds}{s}=\ln|s|=\ln|\sin t|$$

$$\ln|\sin t|=\ln|x|+C$$

...

$$\sin\frac{y}{x}=Cx$$ — о.р.

тражено решење које испуњава услов $y(1)=\frac{\pi}{6}$,
тако што у опште решење убацујемо $x_0=1$, $y_0=\frac{\pi}{6}$,
и одређујемо одговарајуће C

$$\sin\frac{y}{x}=Cx$$

$$\sin\frac{\pi/6}{1}=C\cdot 1$$

$$C=\frac{1}{2}$$

добијено C вратимо у опште решење и тако добијамо тражено партикуларно решење.

$$\boxed{\sin\frac{y}{x}=\frac{1}{2}x}$$

ДЈ облика $\cancel{y'=\frac{y}{x}+f(x)g\left(\frac{y}{x}\right)}$ $y'=\frac{y}{x}+f(x)g\left(\frac{y}{x}\right)$

Сменом $z=\frac{y}{x}$, $z=z(x)$, ДЈ облика $y'=\frac{y}{x}+f(x)g\left(\frac{y}{x}\right)$ се своди на ДЈ која раздваја променљиве.

* За $x>0$ одредити опште решење ДЈ $xy'-x\sqrt{x^2+y^2}-y=0$

$$xy'-x\sqrt{x^2+y^2}-y=0 \quad /:x$$

$$y'-\underbrace{\sqrt{x^2+y^2}}-\frac{y}{x}=0$$

$$=\sqrt{x^2\left(1+\frac{y^2}{x^2}\right)}=x\sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}$$

$$y'=\frac{y}{x}+\underbrace{x}_{f(x)}\underbrace{\sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}}_{g\left(\frac{y}{x}\right)}$$ – ДЈ облика

$$y'=\frac{y}{x}+f(x)g\left(\frac{y}{x}\right)$$

смена: $z=\frac{y}{x}$, $y=xz$, $y'=z+xz'$

$$\cancel{z}+\cancel{x}z'=\cancel{z}+\cancel{x}\sqrt{1+z^2}$$

$z'=\sqrt{1+z^2}$ – ДЈ која раздваја променљиве

$$\frac{z'}{\sqrt{1+z^2}} = 1$$

$$\int \frac{z'dx}{\sqrt{1+z^2}} = \int dx + c$$

смена: $z = t,\ z'dx = dt$

$$\int \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} = x + c$$

$$\arcsin t = x + c$$

$$\arcsin z = x + c$$

$$\boxed{\arcsin \frac{y}{x} = x + c}$$ о.р.

ДЈ облика $y' = f\left(\frac{ax+by+c}{a_1x+b_1y+c_1}\right)$

У зависности од вредности a, b, c, a_1, b_1, c_1, ДЈ облика $y'=f\left(\frac{ax+by+c}{a_1x+b_1y+c_1}\right)$ се може трансформисати у ДЈ која раздваја променљиве или у хомогену ДЈ.

1) $c = c_1 = 0$

$$y' = f\left(\frac{ax+by}{a_1x+b_1y}\right) \overset{x\neq 0}{=} f\left(\frac{x\left(a+b\frac{y}{x}\right)}{x\left(a_1+b_1\frac{y}{x}\right)}\right) = g\left(\frac{y}{x}\right)$$ - хомогена ДЈ

2) $c \neq 0$ или $c_1 \neq 0$

2.1) $ab_1 - a_1b \neq 0$

смена: $x = u + \alpha,\ y = v + \beta,\ v = v(u)$,

где су α и β решења система: $\begin{cases} a\alpha + b\beta + c = 0 \\ a_1\alpha + b_1\beta + c_1 = 0 \end{cases}$

$$v' = y' = f\left(\frac{ax+by+c}{a_1x+b_1y+c_1}\right) = f\left(\frac{au+a\alpha+bv+b\beta+c}{a_1u+\boxed{a_1\alpha}+b_1v+\boxed{b_1\beta}+\boxed{c_1}}\right) =$$

$$= f\left(\frac{au+bv}{a_1u+b_1v}\right) = g\left(\frac{v}{u}\right) \quad \text{– хомогена ДЈ}$$

2.2) $ab_1 - a_1b = 0$

$\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = k$; $a = ka_1$, $b = kb_1$

$$y' = f\left(\frac{ka_1x + kb_1y + c}{a_1x + b_1y + c_1}\right) = f\left(\frac{k(a_1x+b_1y)+c}{a_1x+b_1y+c}\right) = g(a_1x+b_1y)$$

сменом $z = a_1x + b_1y$, $z = z(x)$

добијена ДЈ се своди на ДЈ која раздваја променљиве.

⊛ Одредити опште решење ДЈ $y' = \frac{x-y}{x+y}$.

дата ДЈ је облика $y' = f\left(\frac{ax+by+c}{a_1x+b_1y+c_1}\right)$

$a=1$, $b=-1$, $\underline{c=0}$, $a_1=1$, $b_1=1$, $\underline{c_1=0}$ – случај 1)

$$y' = \frac{x-y}{x+y} \overset{x\neq 0}{=} \frac{x(1-\frac{y}{x})}{x(1+\frac{y}{x})} = \frac{1-\frac{y}{x}}{1+\frac{y}{x}} \quad \text{– хомогена ДЈ}$$

$\frac{y}{x} = z$, $y = xz$, $y' = z + xz'$

$(z = z(x))$

$$z + xz' = \frac{1-z}{1+z}$$

$$xz' = \frac{1-z}{1+z} - z = \frac{1-z-z-z^2}{1+z} = -\frac{z^2+2z-1}{z+1}$$

$$z' = -\frac{z^2+2z-1}{x(z+1)} \quad \text{– ДЈ која раздваја променљиве}$$

$$\frac{(z+1)z'}{z^2+2z-1} = -\frac{1}{x}$$

$$\int \frac{(z+1)z'\,dx}{z^2+2z-1} = \int\left(-\frac{1}{x}\right)dx + C$$

$z = t,\quad z'dx = dt.$

$$\underbrace{\int \frac{t+1}{t^2+2t-1}\,dt}_{=I} = -\int\frac{dx}{x} + C$$

$$\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{z+1-\sqrt{2}}{z+1+\sqrt{2}}\right| = -\ln(cx)$$

$$\ln\left|\frac{\frac{y}{x}+1-\sqrt{2}}{\frac{y}{x}+1+\sqrt{2}}\right|^{\frac{1}{2\sqrt{2}}} = \ln(cx)^{-1}$$

$$\left(\frac{y+(1-\sqrt{2})x}{y+(1+\sqrt{2})x}\right)^{\frac{1}{2\sqrt{2}}} = \frac{1}{cx}$$

$$\boxed{\left(\frac{y+(1+\sqrt{2})x}{y+(1-\sqrt{2})x}\right)^{\frac{1}{2\sqrt{2}}} = cx}\quad \text{o.p.}$$

$$t^2+2t-1 = t^2+2t+1-2 = (t+1)^2-2 = (t+1-\sqrt{2})(t+1+\sqrt{2})$$

$$\frac{t+1}{t^2+2t-1} = \frac{t+1}{(t+1-\sqrt{2})(t+1+\sqrt{2})} = \frac{A}{t+1-\sqrt{2}} + \frac{B}{t+1+\sqrt{2}} \quad /\cdot(t+1-\sqrt{2})(t+1+\sqrt{2})$$

$$t+1 = At + (1+\sqrt{2})A + Bt + (1-\sqrt{2})B$$

$t:\quad A+B=0 \rightarrow B=-A$

$1:\quad (1+\sqrt{2})A + (1-\sqrt{2})B = 1$

$$A + A\sqrt{2} - A + A\sqrt{2} = 1$$

$$2A\sqrt{2} = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{2\sqrt{2}},\quad B = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$$I = \int\left(\frac{\frac{1}{2\sqrt{2}}}{t+1-\sqrt{2}} + \frac{-\frac{1}{2\sqrt{2}}}{t+1+\sqrt{2}}\right)dt = \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln|t+1-\sqrt{2}| - \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln|t+1+\sqrt{2}|$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{t+1-\sqrt{2}}{t+1+\sqrt{2}}\right|$$

$$\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{t+1-\sqrt{2}}{t+1+\sqrt{2}}\right| = \underbrace{-\ln|x| + \ln C}_{=-\ln(C|x|) = -\ln(cx)}$$

(*) Одредити опште решење ДЈ $(2x-y+1)dx+(2y-x-1)dy=0$.

Трансформишимо дату ДЈ:

$$(2y-x-1)dy=-(2x-y+1)dx$$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{2x-y+1}{2y-x-1}$$

$$y'=+\frac{2x-y+1}{x-2y+1}$$ – ДЈ облика $y'=f\left(\frac{ax+by+c}{a_1x+b_1y+c_1}\right)$

$a=2,\ b=-1,\ c=1,\ a_1=1,\ b_1=-2,\ c_1=1$

$c=1\neq0$; $ab_1-a_1b=-4+1=-3\neq0$ – случај 2.1)

прво решавамо систем:

$$2\alpha-\beta+1=0$$
$$\alpha-2\beta+1=0 \quad /(-2) \quad \}(+)$$

$$3\beta-1=0, \quad \beta=\frac{1}{3}$$
$$\alpha=2\beta-1=-\frac{1}{3}$$

смене: $x=u-\frac{1}{3}$, $y=v+\frac{1}{3}$, $v=v(u)$.

и у бројиоцу и у имениоцу слободни члан мора да нестане

$$v'=y'=\frac{2x-y+1}{x-2y+1}=\frac{2(u-\frac{1}{3})-(v+\frac{1}{3})+1}{(u-\frac{1}{3})-2(v+\frac{1}{3})+1}=\frac{2u-v}{u-2v}=$$

$$\overset{u\neq0}{=}\frac{\cancel{u}(2-\frac{v}{u})}{\cancel{u}(1-2\frac{v}{u})}=\frac{2-\frac{v}{u}}{1-2\frac{v}{u}}$$

$$v'=\frac{2-\frac{v}{u}}{1-2\frac{v}{u}}$$ – хомогена ДЈ

смене: $z=\frac{v}{u}$, $v=uz$, $v'=uz'$
$(z=z(u))$

$$z+uz'=\frac{2-z}{1-2z}$$

$$uz'=\frac{2-z}{1-2z}-z=\frac{2-z-z+2z^2}{1-2z}=\frac{2(z^2\,z+1)}{1-2z}$$

$$z'=\frac{2(z^2-z+1)}{u(1-2z)}$$ – ДЈ која раздваја променљиве

$$\frac{(1-2z)z'}{z^2-z+1}=\frac{2}{u}$$

$$\int\frac{(1-2z)z'\,du}{z^2-z+1}=\int\frac{2}{u}\,du+C$$

смена: $z=t$, $z'du=dt$

$$\underbrace{\int\frac{(1-2t)dt}{t^2-t+1}}=2\int\frac{du}{u}+C$$

$$=\left\{\begin{array}{l}t^2-t+1=s\\(2t-1)dt=ds\end{array}\right\}=\int\frac{-ds}{s}=-\ln|s|=-\ln|t^2-t+1|=\ln\frac{1}{t^2-t+1}$$

$$\ln\frac{1}{t^2+t+1}=2\ln|u|+c=\ln u^2+\ln c=\ln(cu^2)$$
$(c\to\ln c)$

$$\frac{1}{t^2-t+1}=cu^2\;;\quad t^2-t+1=\frac{c}{u^2}\quad\left(\frac{1}{c}\to c\right)$$

$$z^2-z+1=\frac{c}{u^2}$$

$$\left(\frac{v}{u}\right)^2-\frac{v}{u}+1=\frac{c}{u^2}\;\Big/u^2$$

$$v^2-uv+v^2=c$$

$$\left(y-\frac{1}{3}\right)^2-\left(x+\frac{1}{3}\right)\left(y-\frac{1}{3}\right)+\left(x+\frac{1}{3}\right)^2=c$$

$$y^2-\frac{2}{3}y+\frac{1}{9}-xy+\frac{1}{3}x-\frac{1}{3}y+\frac{1}{9}+x^2+\frac{2}{3}x+\frac{1}{9}=c$$

$$\boxed{y^2+x^2-xy+x-y=c}_{\text{о.р.}} \quad \left(c-\frac{1}{3}\Rightarrow c\right)$$

(*) Одредити опште решење ДЈ $y'=\dfrac{2x+y-1}{4x+2y+5}$.

дати ДЈ до облика $y'=f\left(\dfrac{ax+by+c}{a_1x+b_1y+c_1}\right)$

$a=2,\ b=1,\ c=-1,\ a_1=4,\ b_1=2,\ c_1=5$

$c=-1\neq 0,\quad ab_1-a_1b=4-4=0$ — случај 2.2)

$\left(\dfrac{a}{a_1}=\dfrac{b}{b_1}=\dfrac{1}{2},\quad a=\frac{1}{2}a_1,\quad b=\frac{1}{2}b_1\right)$

$$y'=\frac{\frac{1}{2}4x+\frac{1}{2}2y-1}{4x+2y+5}=\frac{\frac{1}{2}(4x+2y)-1}{4x+2y+5}$$

$z=4x+2y,\quad y=\frac{1}{2}z-2x,\quad y'=\frac{1}{2}z'-2$

$(z=z(x))$

$$\frac{1}{2}z'-2=\frac{\frac{1}{2}z-1}{z+5}\quad /\cdot 2$$

$$z'-4=\frac{z-2}{z+5}$$

$$z'=\frac{z-2}{z+5}+4=\frac{z-2+4z+20}{z+5}=\frac{5z+18}{z+5}$$ — ДЈ која раздваја променљиве

$$\frac{z+5}{5z+18}z'=1$$

$$\int\frac{z+5}{5z+18}z'\,dx=\int dx+C$$

смена: $z = t$, $z'dx = dt$

$$\underbrace{\int \frac{t+5}{5t+18}\,dt} = \int dx + C$$

$$= \int \frac{\frac{1}{5}(5t+25)\,dt}{5t+18} = \frac{1}{5}\int \frac{5t+18+7}{5t+18}\,dt = \frac{1}{5}\left(\int dt + 7\int \frac{dt}{5t+18}\right) =$$

$$= \frac{1}{5}\left(t + 7\cdot\frac{1}{5}\ln|5t+18|\right) = \frac{1}{5}t + \frac{7}{25}\ln|5t+18|$$

$$\frac{1}{5}t + \frac{7}{25}\ln|5t+18| = x + C \quad /\cdot 25$$

$$5t + 7\ln|5t+18| = 25x + C \qquad (25C \to C)$$

$$5z + 7\ln|5z+18| = 25x + C$$

$$5(4x+2y) + 7\ln|\underbrace{\underbrace{5(4x+2y)+18}_{=20x+10y+18}}_{=2(10x+5y+9)}| = 25x + C$$

$$7(\ln 2 + \ln|10x+5y+9|)$$

$$\boxed{10y - 5x + 7\ln|10x+5y+9| = C}_{\text{о.р.}} \qquad (C - 7\ln 2 \to C)$$

Линеарна ДЈ

$$y' + f(x)y = g(x)$$

$$y = e^{-\int f(x)\,dx}\left(C + \int g(x)\, e^{\int f(x)\,dx}\, dx\right) \quad - \text{о.р.}$$

⊛ Одредити опште решење ДЈ $y' + \frac{4x}{1+x^2}y = \frac{3}{1+x^2}$

дата је линеарна ДЈ, $f(x) = \frac{4x}{1+x^2}$, $g(x) = \frac{3}{1+x^2}$

$$\int f(x)\,dx = \int \frac{4x}{1+x^2} = \left\{ \begin{matrix} 1+x^2 = t \\ 2x\,dx = dt \end{matrix} \right\} = \int \frac{2\,dt}{t} = 2\ln|t| = 2\ln(1+x^2)$$

$$e^{\int f(x)\,dx} = e^{2\ln(1+x^2)} = (1+x^2)^2$$

$$e^{-\int f(x)\,dx} = e^{-2\ln(1+x^2)} = \frac{1}{(1+x^2)^2}$$

$$\int g(x)\, e^{\int f(x)\,dx}\, dx = \int \frac{3}{\cancel{1+x^2}}(1+x^2)^{\cancel{2}} = 3\left(x + \frac{x^3}{3}\right) = 3x + x^3$$

$$y = e^{-\int f(x)\,dx}\left(C + \int g(x)\, e^{\int f(x)\,dx}\, dx\right)$$

$$\boxed{y = \frac{1}{(1+x^2)^2}\left(C + 3x + x^3\right)} \quad \text{о.р.}$$

⊛ Одредити опште решење ДЈ $\frac{ds}{dt} + 2ts = 2te^{-t^2}$

дата је линеарна ДЈ, $s = s(t)$, $\frac{ds}{dt} = s'$, $f(t) = 2t$, $g(t) = 2te^{-t^2}$

$$\int f(t)\,dt = \int 2t\,dt = 2\frac{t^2}{2} = t^2$$

$$e^{\int f(t)\,dt} = e^{t^2}, \quad e^{-\int f(t)\,dt} = e^{-t^2}$$

$$\int g(t)\, e^{\int f(t)\,dt}\, dt = \int 2te^{-t^2} e^{t^2}\, dt = \int 2t\,dt = 2\frac{t^2}{2} = t^2$$

$$\boxed{s = e^{-\int f(t)\,dt}\left(C + \int g(t)\, e^{\int f(t)\,dt}\right) = \underline{e^{-t^2}(C + t^2)}} \quad \text{о.р.}$$

⊗ Одредити опште решење ДЈ $y' = \dfrac{1}{x\cos y + \sin 2y}$.

дата ДЈ записана у наведеном облику не припада ни једном од претходно описаних типова ДЈ.

приметимо да дату ДЈ можемо записати као

$$x' = x\cos y + \sin 2y, \quad \left(\frac{1}{y'} = x\cos y + \sin 2y;\ y' = \frac{dy}{dx},\ \frac{1}{y'} = \frac{dx}{dy} = x'\right)$$

и посматрајмо $x = x(y)$.

$x' - \cos y \cdot x = \sin 2y$ — линеарна ДЈ, $f(y) = -\cos y$, $g(y) = \sin 2y$

$$\int f(y)\,dy = \int(-\cos y)\,dy = -\sin y$$

$$e^{\int f(y)dy} = e^{-\sin y}, \quad e^{-\int f(y)dy} = e^{\sin y}$$

$$\int g(y)e^{\int f(y)dy}\,dy = \int \sin 2y \cdot e^{-\sin y}\,dy = \int 2\sin y\cos y\, e^{-\sin y}\,dy =$$

$$= \left\{\begin{matrix} -\sin y = t \\ -\cos y\,dy = dt \end{matrix}\right\} = +2\int te^t\,dt = \left\{\begin{matrix} u = t, & dv = e^t dt \\ du = dt, & v = e^t \end{matrix}\right\} = +2\left(te^t - \underbrace{\int e^t\,dt}_{=e^t}\right) =$$

$$= +2(t-1)e^t = +2(-\sin y - 1)e^{-\sin y} = -2(\sin y + 1)e^{-\sin y}$$

$$x = e^{-\int f(y)dy}\left(c + \int g(y)e^{\int f(y)dy}\,dy\right)$$

$$x = e^{\sin y}\left(c + 2(\sin y + 1)e^{-\sin y}\right)$$

$$x = ce^{\sin y} + 2(\sin y + 1)$$

Бернулијева ДЈ

$$y' + f(x)y = g(x)y^{\alpha}, \quad \alpha \neq 0, \alpha \neq 1$$

($\alpha = 0$: линеарна ДЈ

$\alpha = 1$: ДЈ која раздваја променљиве)

Бернулијеву ДЈ сводимо на линеарну ДЈ:

$$y' + f(x)y = g(x)y^{\alpha} \quad /: y^{\alpha}, \quad y \neq 0$$

$$\underline{\underline{y^{-\alpha}y'}} + f(x)\underline{y^{1-\alpha}} = g(x)$$

смена: $\underline{z = y^{1-\alpha}}, \quad z = z(x)$

$$z' = (1-\alpha)\underline{\underline{y^{-\alpha}y'}}$$

$$\frac{1}{\boxed{1-\alpha}} z' + f(x)z = g(x) \quad / \boxed{(1-\alpha)}$$

$$z' + \underbrace{(1-\alpha)f(x)}\, z = \underbrace{(1-\alpha)g(x)} \quad - \text{линеарна ДЈ}$$

ПРВО ПОГЛЕДАТИ ЗАДАТАК НА СТРАНИ 22.

* Одредити решење ДЈ

$$y' + y^2 + \frac{y}{x+1} = 0$$

које задовољава услов $y(1) = \frac{1}{2}$.

Запишимо дату ДЈ у облику

$$y' + \frac{1}{x+1}y = -y^2 \quad - \text{Бернулијева ДЈ}, \quad f(x) = \frac{1}{x+1}, \; g(x) = -1, \; \alpha = 2$$

прво тражимо опште решење

$$y' + \frac{1}{x+1} y = -y^2 \quad / : y^2, \quad y \neq 0$$

$$\underline{\underline{y^{-2} y'}} + \frac{1}{x+1} \underline{y^{-1}} = -1$$

смена: $z = y^{-1}, \quad z' = \underline{\underline{-y^{-2} y'}}$

$$-z' + \frac{1}{x+1} z = -1 \quad / \cdot (-1)$$

$$z' - \frac{1}{x+1} z = 1$$ — линеарна ДЈ, $f(x) = -\frac{1}{x+1}$, $g(x) = 1$.

$$z = e^{-\int \left(-\frac{1}{x+1}\right) dx} \left(C + \int 1 \cdot e^{\int \left(-\frac{1}{x+1}\right) dx} \right)$$

$$= e^{\ln|x+1|} \left(C + \int e^{-\ln|x+1|} dx \right) = \cancel{e^{\ln|x+1|}(C}$$

$$= |x+1| \left(C + \int \frac{dx}{|x+1|} \right)$$

1) $x > -1$

$$z = (x+1)\left(C + \int \frac{dx}{x+1} \right) = (x+1)\left(C + \ln|x+1| \right)$$

2) $x < -1$

$$z = -(x+1)\left(C + \int \frac{dx}{-(x+1)} \right) = -(x+1)\left(C - \ln|x+1| \right)$$

$$= (x+1)\left(C + \ln|x+1| \right) \quad (-C \to C)$$

у оба случаја: $z = (x+1)\left(C + \ln|x+1| \right)$

$$\frac{1}{y} = (x+1)\left(C + \ln|x+1| \right)$$

$$y = \frac{1}{(x+1)\left(C + \ln|x+1| \right)}$$ — о.р.

услов: $y(1)=\frac{1}{2}$

$$\frac{1}{2}=\frac{1}{\cancel{(1+1)}(C+\ln|1+1|)}$$

$$C=1-\ln 2$$

тражено партикуларно решење: $y=\dfrac{1}{(x+1)(1-\ln 2+\ln|x+1|)}$

$$y=\frac{1}{(x+1)\left(1+\ln\frac{|x+1|}{2}\right)}$$

~~⊛ Одредити опште решење ДЈ $y'+\frac{1}{3}y=-\frac{1}{3}xy^{-2}$~~

~~дата је Бернулијева ДЈ, $f(x)=\frac{1}{3}$, $g(x)=-\frac{1}{3}x$, $\alpha=-2$.~~

⊛ Одредити опште решење ДЈ $y'-xy=-y^3e^{-x^2}$

дата је Бернулијева ДЈ, $f(x)=-x$, $g(x)=-e^{-x^2}$, $\alpha=3$

$$y'-xy=-e^{-x^2}y^3 \quad /:y^3$$

$$y^{-3}y'-xy^{-2}=-e^{-x^2}$$

смена: $z=y^{-2}$, $z'=-2y^{-3}y'$

$$-\frac{1}{2}z'-xz=-e^{-x^2} \quad /\cdot(-2)$$

$$z'+2xz=2e^{-x^2}$$

– линеарна ДЈ, $f(x)=2x$, $g(x)=2e^{-x^2}$

$$z=e^{-\int 2x\,dx}\left(C+\int 2e^{-x^2}e^{\int 2x\,dx}dx\right)=e^{-2\frac{x^2}{2}}\left(C+2\int e^{-x^2}e^{2\frac{x^2}{2}}dx\right)$$

$$=e^{-x^2}\left(C+2\int dx\right)=e^{-x^2}(C+2x)$$

$$\frac{1}{y^2}=e^{-x^2}(C+2x)$$

$$\boxed{y^2=\frac{e^{x^2}}{C+2x}} \quad \text{– О.Р.}$$

ДЈ са тоталним диференцијалом

- Једначина

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0 \quad (*)$$

је ДЈ са тоталним диференцијалом ако је лева страна тотални диференцијал неке ф-је $F(x,y)$ двеју независно променљивих x и y, тј.

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = dF = \frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy$$

Тада је $F(x,y)=C$ опште решење једначине $(*)$.

- ~~Ако је $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$, онда $(*)$ јесте ДЈ са тоталним диференцијалом~~ $(*)$ је ДЈ са тоталним диференцијалом ако и само ако $\boxed{\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}}$

$$F(x,y) = \int M(x,y)\,dx + \int\left(N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)\,dx\right)dy$$

⊛ Одредити опште решење ДЈ $(3x^2+6xy^2)\,dx + (6x^2y+4y^3)\,dy = 0$.

$$M(x,y) = 3x^2+6xy^2; \quad \frac{\partial M}{\partial y} = 12xy$$

$$N(x,y) = 6x^2y+4y^3; \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 12xy$$

$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$, разматрана једначина јесте ДЈ са тоталним диференцијалом

$$\int M(x,y)\,dx = \int (3x^2+6xy^2)\,dx = 3\frac{x^3}{3} + 6y^2\cdot\frac{x^2}{2} = x^3+3x^2y^2$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)\,dx = \frac{\partial}{\partial y}(x^3+3x^2y^2) = 6x^2y$$

$$\int\left(N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)\,dx\right)dy = \int(6x^2y+4y^3-6x^2y)\,dy = 4\frac{y^4}{4} = y^4$$

$$F(x,y) = \int M(x,y)\,dx + \int \left(N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)\,dx \right) dy =$$

$$= \cancel{3x}\ x^3 + 3x^2y^2 + y^4$$

$$\boxed{x^3 + 3x^2y^2 + y^4 = C} \text{ – О.Р.}$$

Интеграциони множилац

- $M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$; $\dfrac{\partial M}{\partial y} \neq \dfrac{\partial N}{\partial x}$

– није ДЈ са тоталним диференцијалом

Тражимо ф-ју $\lambda(x,y)$ такву да једначина

$$\lambda(x,y)M(x,y)\,dx + \lambda(x,y)N(x,y)\,dy = 0$$

буде ДЈ са тоталним диференцијалом

$\lambda(x,y)$ – интеграциони множилац.

Услов за то:

$$\frac{\partial(\lambda M)}{\partial y} = \frac{\partial(\lambda N)}{\partial x}$$

$$M\frac{\partial \lambda}{\partial y} + \lambda\frac{\partial M}{\partial y} = N\frac{\partial \lambda}{\partial x} + \lambda\frac{\partial N}{\partial x}$$

$$M\frac{\partial \lambda}{\partial y} - N\frac{\partial \lambda}{\partial x} + \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)\lambda = 0$$ – решавамо по λ

$\lambda = \lambda(x,y)$, $\mu = \mu(x,y)$, $\underline{\underline{\lambda = \lambda(\mu)}}$

$$\frac{\partial \lambda}{\partial y} = \frac{\partial \lambda}{\partial \mu}\cdot\frac{\partial \mu}{\partial y} = \frac{\partial \mu}{\partial y}\lambda', \quad \frac{\partial \lambda}{\partial x} = \frac{\partial \lambda}{\partial \mu}\frac{\partial \mu}{\partial x} = \frac{\partial \mu}{\partial x}\lambda'$$

$$M\frac{\partial \mu}{\partial y}\lambda'(\mu) - N\frac{\partial \mu}{\partial x}\lambda'(\mu) + \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)\lambda(\mu) = 0$$

$$\left(M\frac{\partial \mu}{\partial y} - N\frac{\partial \mu}{\partial x}\right)\lambda'(\mu) + \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)\lambda(\mu) = 0$$

$$\left(M\frac{\partial \mu}{\partial y} - N\frac{\partial \mu}{\partial x}\right)\frac{d\lambda}{d\mu} = \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)\lambda(\mu)$$

$$\frac{1}{\lambda}\frac{d\lambda}{d\mu} = \frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M\frac{\partial \mu}{\partial y} - N\frac{\partial \mu}{\partial x}} \qquad (*)$$

Ако је
$$\frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M\frac{\partial \mu}{\partial y} - N\frac{\partial \mu}{\partial x}} = \sigma(\mu),$$
онда је (*) ДЈ 1. реда по $\lambda = \lambda(\mu)$ која раздваја промењиве:

$$\frac{d\lambda}{\lambda} = \sigma(\mu)\,d\mu.$$

Решење: $\lambda(\mu) = e^{\int \sigma(\mu)\,d\mu}$

- Неки специјални случајеви:

1) $\mu = x$: $\quad \dfrac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{-N} = \sigma(x)$, онда је $\lambda = \lambda(x)$

2) $\mu = y$: $\quad \dfrac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M} = \sigma(y)$, онда је $\lambda = \lambda(y)$

3) $\mu = x+y$: $\quad \dfrac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M - N} = \sigma(x+y)$, онда је $\lambda = \lambda(x+y)$

4) $\mu = xy$: $\dfrac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{xM - yN} = G(xy)$, онда је $\lambda = \lambda(xy)$

5) $\mu = x^2+y^2$: $\dfrac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{2yM - 2xN} = G(x^2+y^2)$, онда је $\lambda = \lambda(x^2+y^2)$.

(*) Одредити опште решење ДЈ $3x^2y\,dx + (y^4 - x^3)dy = 0$.

$M = 3x^2y$, $\frac{\partial M}{\partial y} = 3x^2$; $N = y^4 - x^3$, $\frac{\partial N}{\partial x} = -3x^2$

$\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$ – није ДЈ са тоталним диференцијалом

тражимо интеграциони множилац λ.

ако имамо среће, добићемо то разматрањем следећих случајева 1)-5), а ако не, онда морамо да разматрамо општи случај.

1) $\mu = x$: $\dfrac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{-N} = \dfrac{\overset{-3x^2}{\cancel{y^4-x^3}} - 3x^2}{-(y^4-x^3)} = \dfrac{6x^2}{x^3-y^4} \overset{?}{=} G(x)$

како $\dfrac{6x^2}{x^3-y^4}$ није ф-ја која зависи само од x $(G(x))$, не може 1)

2) $\mu = y$: $\dfrac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M} = \dfrac{-3x^2 - 3x^2}{3x^2y} = -\dfrac{2}{y} \overset{?}{=} G(y)$

како $-\dfrac{2}{y}$ јесте ф-ја која зависи само од y, $(G(y))$, може 2).

$\lambda(\mu) = e^{\int G(\mu)\, d\mu}$

$\lambda(y) = e^{\int \left(-\frac{2}{y}\right) dy} = e^{-2\ln|y|} = \frac{1}{y^2}$ – интеграциони множилац

$3x^2 y\, dx + (y^4 - x^3)\, dy = 0 \quad / \cdot \frac{1}{y^2}$

$3\frac{x^2}{y}\, dx + \left(y^2 - \frac{x^3}{y^2}\right) dy = 0$ – ово мора бити ДЈ са тоталним диференцијалом

проверимо: $M_1 = \frac{3x^2}{y}$, $\frac{\partial M_1}{\partial y} = -\frac{3x^2}{y^2}$; $N_1 = y^2 - \frac{x^3}{y^2}$, $\frac{\partial N_1}{\partial x} = -\frac{3x^2}{y^2}$

$\frac{\partial M_1}{\partial y} = \frac{\partial N_1}{\partial x}$ ✓

$F(x,y) = \int M_1(x,y)\, dx - \int \left(N_1(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int M_1(x,y)\, dx\right) dy$

$\int M_1(x,y)\, dx = \int \frac{3x^2}{y}\, dx = \frac{3}{y}\cdot\frac{x^3}{3} = \frac{x^3}{y}$

$\frac{\partial}{\partial y}\int M_1(x,y)\, dx = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x^3}{y}\right) = -\frac{x^3}{y^2}$

$\int\left(N_1(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int M_1(x,y)\, dx\right) dy = \int\left(y^2 - \frac{x^3}{y^2} + \frac{x^3}{y^2}\right) dy = \frac{y^3}{3}$

$F(x,y) = \frac{x^3}{y} + \frac{y^3}{3}$

$\boxed{\frac{x^3}{y} + \frac{y^3}{3} = C}$ – о. р.

(*) Наћи интеграциони множилац за једначину

$$(2x^2y+x)y' - x^2y^3 + 2xy^2 + y = 0$$

помножимо дату ДЈ са dx:

$$(2x^2y+x)\,dy + (-x^2y^3 + 2x\cancel{{}^{2}}y^2 + y)\,dx = 0$$

$$M = -x^2y^3 + 2xy^2 + y, \quad \frac{\partial M}{\partial y} = -3x^2y^2 + 4xy + 1$$

$$N = 2x^2y + x, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 4xy + 1$$

$\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$ – није ДЈ са тоталним диференцијалом

1) $\mu = x$: $$\frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{-N} = \frac{\cancel{4xy+1} + 3x^2y^2 \cancel{-4xy-1}}{-(2x^2y+x)} = -\frac{3x^2y^2}{2x^2y+x} \neq G(x)$$

2) $\mu = y$: $$\frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M} = \frac{3x^2y^2}{-x^2y^3+2xy^2+y} \neq G(y)$$

3) $\mu = x+y$: $$\frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M-N} = \frac{3x^2y^2}{-x^2y^3+2xy^2+y-2x^2y-x} \neq G(x+y)$$

4) $\mu = xy$: $$\frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{xM-yN} = \frac{3x^2y^2}{-x^3y^3 + \cancel{2x^2y^2} + \cancel{xy} - \cancel{2x^2y^2} - \cancel{xy}} =$$

$$= -\frac{3}{xy} = G(xy) \checkmark$$

$$\lambda(\mu) = e^{\int G(\mu)\,d\mu}$$

$$\lambda(xy) = e^{\int -\frac{3}{xy}\,d(xy)} = e^{-3\ln|xy|} = \frac{1}{x^3y^3}$$ – интеграциони множилац

Ортогоналне и изогоналне трајекторије

• Ако је $F(x,y,y')=0$ ДЈ фамилије кривих $\Phi(x,y,C)=0$, онда ДЈ фамилије ортогоналних трајекторија те фамилије кривих има облик

$$F\left(x,y,-\frac{1}{y'}\right)=0. \quad (*)$$

Решавањем ДЈ (*) добијамо фамилију ортогоналних трајекторија дате фамилије кривих.

• Ако је $F(x,y,y')=0$ ДЈ фамилије кривих $\Phi(x,y,C)=0$, онда ДЈ фамилије изогоналних трајекторија те фамилије кривих има облик

$$F\left(x,y,\frac{y'-k}{1+ky'}\right)=0, \quad (**)$$

где је $k=\operatorname{tg}\alpha$, а α је угао између дате фамилије кривих и тражене фамилије изогоналних трајекторија.

Решавањем ДЈ (**) добијамо фамилију изогоналних трајекторија дате фамилије кривих.

(*) Наћи ортогоналне трајекторије фамилије кривих $x^2+y^2=a$

Прво формирамо ДЈ дате фамилије кривих:

$x^2+y^2=a \;/'_x$

$2x+2yy'=0$.

У добијеној ДЈ y' мењамо са $-\frac{1}{y'}$:

$x+y\left(-\frac{1}{y'}\right)=0$

$y' = \frac{y}{x}$, $x \neq 0$

решимо ову једначину:

$\frac{1}{y} y' = \frac{1}{x}$; $\int \frac{y'dx}{y} = \int \frac{dx}{x} + c$, $y = t$, $y'dx = dt$; $\int \frac{dt}{t} = \int \frac{dx}{x} + c$

$\ln|t| = \ln|x| + \ln|c|$; $t = cx$; $\boxed{y = cx}$ – тражена фамилија ортогоналних трајекторија

(*) Наћи изогоналне трајекторије фамилије кривих $x^2+y^2=a$, ако је угао пресека $\frac{\pi}{4}$.

$x^2+y^2 = a \; /'_x$; $2x + 2yy' = 0$

$\alpha = \frac{\pi}{4}$, $k = tg\,\alpha = 1$, $y' \to \frac{y'-1}{1+y'}$

$x + y\frac{y'-1}{1+y'} = 0 \; / (1+y')$

$x + xy' + yy' - y = 0$

$(x+y)y' = y - x$; $y' = \frac{y-x}{y+x} = \frac{\frac{y}{x}-1}{\frac{y}{x}+1}$ – хомогена ДЈ

$z = \frac{y}{x}$, $y = xz$, $y' = z + xz'$

$z + xz' = \frac{z-1}{z+1}$; $xz' = \frac{z-1}{z+1} - z = \frac{z-1-z^2-z}{z+1} = -\frac{z^2+1}{z+1}$

$z' = -\frac{z^2+1}{x(z+1)}$ – ДЈ која раздваја променљиве

$\frac{z+1}{z^2+1} z' = -\frac{1}{x}$; $\int \frac{z+1}{z^2+1} z'dx = \int\left(-\frac{1}{x}\right)dx + c$; $z = t$, $z'dx = dt$;

$\underbrace{\int \frac{t+1}{t^2+1}dt} = -\int\frac{dx}{x} + c = -\ln|x| + c$

$= \frac{1}{2}\int\frac{2t\,dt}{t^2+1} + \int\frac{dt}{t^2+1} = \frac{1}{2}\ln(t^2+1) + arctg\,t = \ln\sqrt{z^2+1} + arctg\,z$

$= \ln\sqrt{\frac{y^2}{x^2}+1} + arctg\frac{y}{x} = \ln\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{|x|} + arctg\frac{y}{x} = \ln\sqrt{x^2+y^2} - \ln|x| + arctg\frac{y}{x}$

$\ln\sqrt{x^2+y^2} - \cancel{\ln|x|} + arctg\frac{y}{x} = -\cancel{\ln|x|} + c$

$\boxed{\ln\sqrt{x^2+y^2} + arctg\frac{y}{x} = c}$

– тражена фамилија изогоналних трајекторија