ФУНКЦИЈЕ ВИШЕ ПРОМЕНЉИВИХ

⊛ $y=y(x)$ – ф-ја 1 променљиве (то је рађено до сада)

$z=z(x,y)$ – ф-ја 2 променљиве

$u=u(x,y,z)$ – ф-ја 3 променљиве

$\vdots$

$f=f(x_1,x_2,\dots,x_n)$ – ф-ја n променљивих

⊛ Одредити вредност ф-је у датим тачкама.

а) $f(x)=\ln x$; $1,\ e^2,\ -1$.

дата је ф-ја 1 пром.

$x=1$: $f(1)=\ln 1=0$

$x=e^2$: $f(e^2)=\ln e^2=2$

$x=-1$: $\cancel{f(-1)=\underbrace{\ln(-1)}}$ тачка -1 није у области дефинисаности.

б) $f(x,y)=\dfrac{1}{x+y}$; $(1,1),\ (-1,\frac{1}{2}),\ (-1,1)$

дата је ф-ја 2 пром.

тачка $(1,1)$ – $x=1,\ y=1$: $f(1,1)=\dfrac{1}{1+1}=\dfrac{1}{2}$

тачка $(-1,\frac{1}{2})$ – $x=-1,\ y=\frac{1}{2}$: $f(-1,\frac{1}{2})=\dfrac{1}{-1+\frac{1}{2}}=-2$

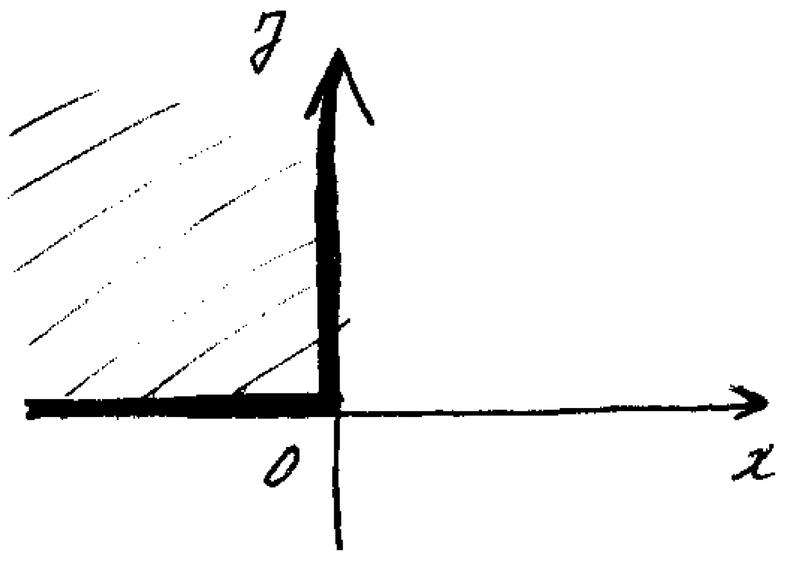
тачка $(-1,1)$ – $x=-1,\ y=1$: $\cancel{f(-1,1)=\dfrac{1}{-1+1}=\underbrace{\dfrac{1}{0}}}$ тачка $(-1,1)$ није у области дефинисаности

⊛ За дате ф-је одредити област дефинисаности и скицирати је.

а) $f(x,y) = \sqrt{-x} + \sqrt{y}$

$-x \geq 0$, $y \geq 0$

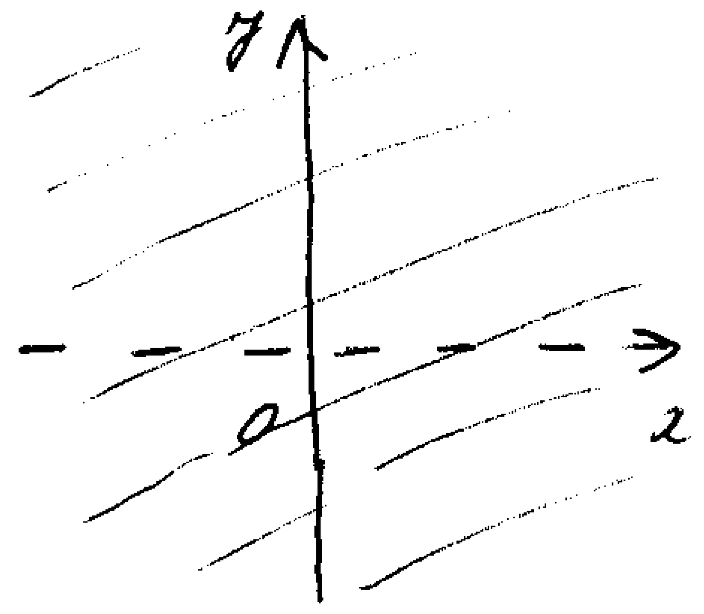
$x \leq 0$



област дефинисаности је осенчено
ако је „ивица" укључена у област деф, онда је подебљавамо.

б) $f(x,y) = \dfrac{x}{y}$

$y \neq 0$



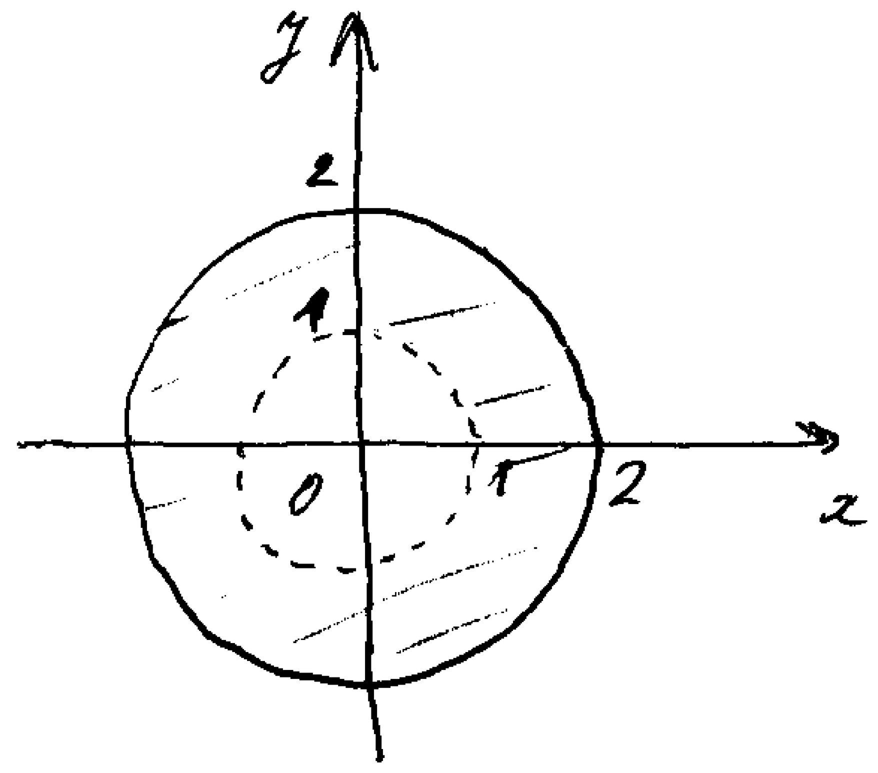
линију која није у области деф. уцртамо испрекидано

в) $f(x,y) = \sqrt{4-x^2-y^2} + \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2-1}}$

$4-x^2-y^2 \geq 0$, $\sqrt{x^2+y^2-1} \neq 0$, $x^2+y^2-1 \geq 0$

$x^2+y^2 \leq 4$ — унутрашњост круга полупр. 2, са ивицом

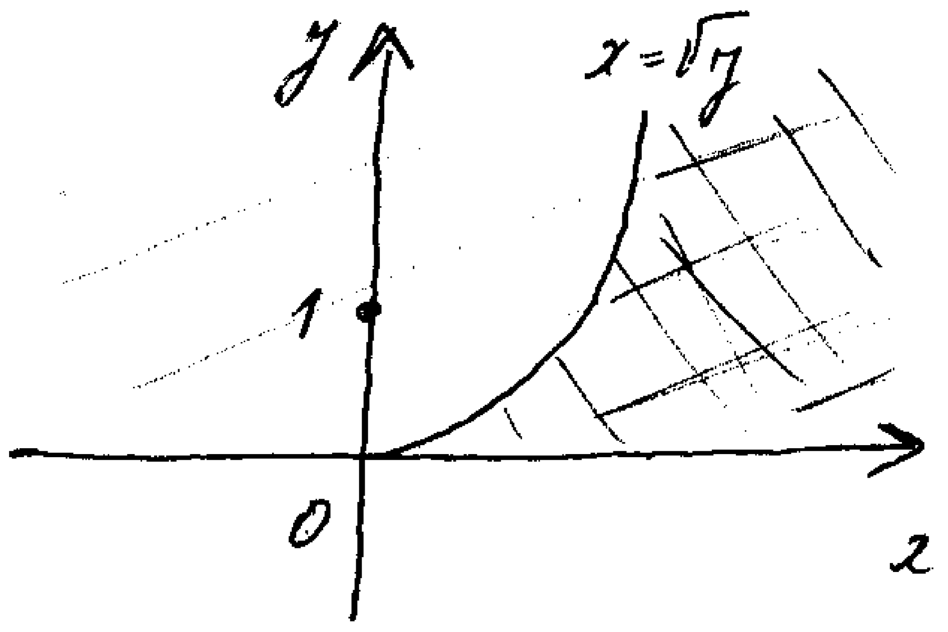
$x^2+y^2 > 1$ — спољашњост круга полупр. 1, без ивице



г) $f(x,y) = \sqrt{x-\sqrt{y}}$

$x-\sqrt{y} \geq 0$, $y \geq 0$

$x \geq \sqrt{y}$



област деф. је осенчена у обе стране
(прво је осенчен први услов $y \geq 0$)

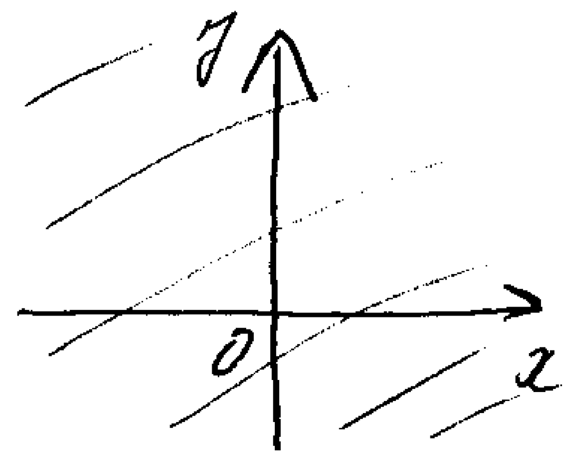
десно од $x = \sqrt{y}$

ако нисмо сигурни да ли је лево или десно, изаберемо било коју тачку ван $x = \sqrt{y}$, нпр. $(0,1)$. Ако је за ту тачку испуњен услов $x \geq \sqrt{y}$, онда узимамо страну на којој је и изабрана тачка, а ако није, онда узимамо супротну страну.

$x \geq \sqrt{y}$, $(0,1)$: $0 \geq \sqrt{1}$ ✗

в) $z = x^2 + xy - y^3$

$\boxed{D = \mathbb{R}^2}$



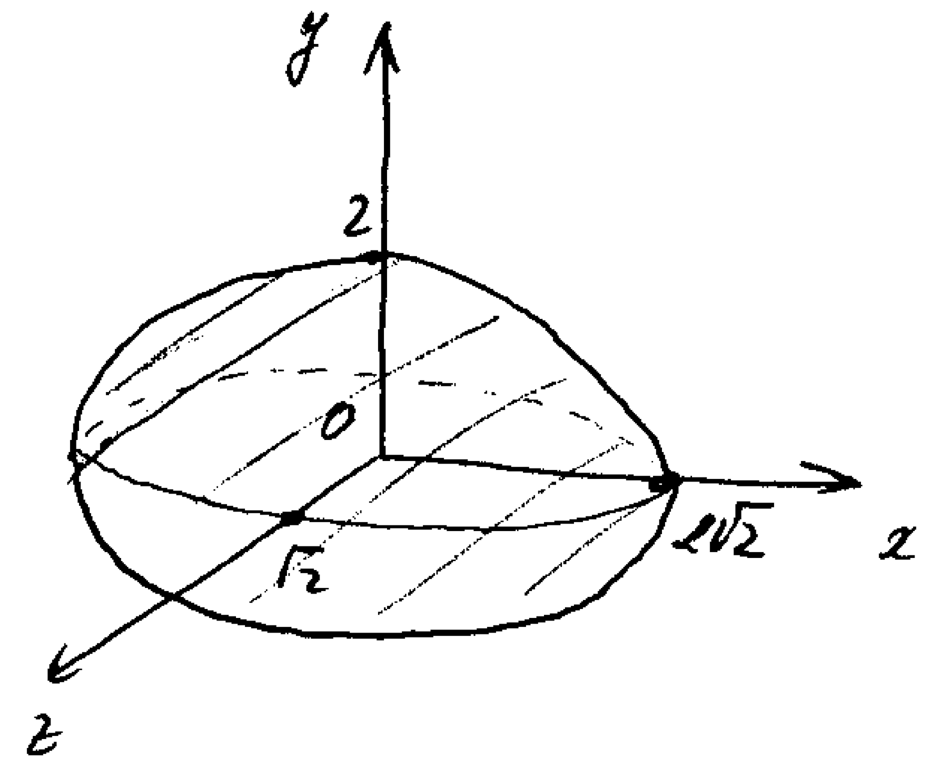
5) $u = \sqrt{8 - x^2 - 2y^2 - 4z^2}$

$8 - x^2 - 2y^2 - 4z^2 \geq 0$

$x^2 + 2y^2 + 4z^2 \leq 8 \quad /:8$

$\underline{\frac{x^2}{(2\sqrt{2})^2} + \frac{y^2}{2^2} + \frac{z^2}{(\sqrt{2})^2} \leq 1}$

унутрашњост елипсоида са полуосама $2\sqrt{2}, 2, \sqrt{2}$



Парцијални изводи

* Парцијални изводи 1. реда:

$y = y(x)$; $\quad y' = \frac{dy}{dx}$

$z = z(x,y)$; $\quad z'_x = \frac{\partial z}{\partial x}$ – 1. парцијални извод по x

$\quad z'_y = \frac{\partial z}{\partial y}$ – 1. парцијални извод по y

$u = u(x,y,z)$; $\quad u'_x = \frac{\partial u}{\partial x}$, $u'_y = \frac{\partial u}{\partial y}$, $u'_z = \frac{\partial u}{\partial z}$

$\vdots$

$f = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$; $\quad f'_{x_1} = \frac{\partial f}{\partial x_1}$, $f'_{x_2} = \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, f'_{x_n} = \frac{\partial f}{\partial x_n}$.

* Одредити 1. парцијалне изводе дате ф-је.

а) $f(x,y) = \cancel{\text{arctg}\frac{y}{x}} \; xy + \frac{y}{x}$

када рачунамо парцијалне изводе по једној променљивој, остале променљиве третирамо као константе.

$f'_x = y + y\left(-\frac{1}{x^2}\right) = y - \frac{y}{x^2}$; $\quad f'_y = x + \frac{1}{x}$

б) $z = \ln\left(x + \sqrt{x^2+y^2}\right)$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{x+\sqrt{x^2+y^2}}\left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}}\cdot 2x\right) = \frac{1}{\cancel{x+\sqrt{x^2+y^2}}}\cdot\frac{\cancel{\sqrt{x^2+y^2}+x}}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{x+\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}}\cdot 2y = \frac{y}{\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right)\sqrt{x^2+y^2}}$$

⊛ Израчунати вредности првих парцијалних извода ф-је $f(x,y) = \sqrt{xy + \frac{x}{y}}$ у тачки $(2,1)$.

$$f'_x = \frac{1}{2\sqrt{xy+\frac{x}{y}}}\left(y + \frac{1}{y}\right); \quad f'_x(\overset{x}{2},\overset{y}{1}) = \frac{1}{2\sqrt{2\cdot 1 + \frac{2}{1}}}\left(1 + \frac{1}{1}\right) = \frac{1}{2}$$

$$f'_y = \frac{1}{2\sqrt{xy+\frac{x}{y}}}\left(x + x\left(-\frac{1}{y^2}\right)\right); \quad f'_y(2,1) = \frac{1}{2\sqrt{2\cdot 1+\frac{2}{1}}}\left(2 + 2\cdot\left(-\frac{1}{1}\right)\right) = 0$$

ПРВО СЕ ИЗРАЧУНА ИЗВОД, ПА СЕ ОНДА УБАЦИ ТАЧКА (погрешно је убацити тачку, па израчунати извод — у том случају решење увек испадне 0)

⊛ Одредити 1. парцијалне изводе дате ф-је.

а) $f(x,y,z) = \sin(xy+yz)$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \cos(xy+yz)\cdot y$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \cos(xy+yz)\cdot(x+z)$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \cos(xy+yz)\cdot y$$

б) $u = x^{y^z}$

$u'_x = y^z x^{y^z-1}$ (као x^α)

$u'_y = x^{y^z}\ln x\cdot z y^{z-1}$ (као a^x, па као x^α)

$u'_z = x^{y^z}\ln x\cdot y^z\ln y$ (као a^x, па опет као a^x)

* Ако је $z = xy + xe^{\frac{y}{x}}$, доказати да је $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = xy + z$.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y + \left(e^{\frac{y}{x}} + x\cdot e^{\frac{y}{x}}\cdot y\left(-\frac{1}{x^2}\right)\right) = y + e^{\frac{y}{x}}\left(1 - \frac{y}{x}\right)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x + x\cdot e^{\frac{y}{x}}\cdot\frac{1}{x} = x + e^{\frac{y}{x}}$$

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = x\left(y + e^{\frac{y}{x}}\left(1-\frac{y}{x}\right)\right) + y\left(x + e^{\frac{y}{x}}\right)$$

$$= \underbrace{xy + xe^{\frac{y}{x}}}_{=z} - \cancel{ye^{\frac{y}{x}}} + xy + \cancel{ye^{\frac{y}{x}}}$$

$$= xy + z \quad \checkmark$$

---

* Парцијални изводи вишег реда

• нпр, други парцијални изводи ф-је две променљиве $z = z(x,y)$:

$z''_{x^2} = z''_{xx} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)$ — парцијални извод по x од парцијалног извода по x

$z''_{xy} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)$ — парцијални извод по y од парцијалног извода по x

$z''_{yx} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)$

} У ситуацијама које разматрамо, ова два парц. извода су једнака

$z''_{y^2} = z''_{yy} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)$

• не мешати број променљивих са редом извода.

• нпр, 3. парц. извод по xyx ф-је 2 пром. $z = z(x,y)$

$z'''_{xyx} = \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\right)$

У ситуацијама које разматрамо, редослед диференцирања није битан, што је нпр. $z'''_{xxy} = z'''_{xyx} = z'''_{yxx}$. Може се записати и као $z'''_{x^2y} = \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}$.

• нпр. 2. парц. извод по y^2 ф-је 3 пром. $u=u(x,y,z)$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) \qquad \left(= u''_{yy} = u''_{y^2}\right)$$

(*) Одредити 2. парцијалне изводе ф-је $z = \ln(x^2+y)$.

$$z'_x = \frac{1}{x^2+y}\cdot 2x = 2\frac{x}{x^2+y}\ ; \qquad z'_y = \frac{1}{x^2+y}$$

$$z''_{x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(2\frac{x}{x^2+y}\right) = 2\,\frac{1\cdot(x^2+y) - x\cdot 2x}{(x^2+y)^2} = 2\,\frac{y-x^2}{(x^2+y)^2}$$

$$z''_{xy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(2\frac{x}{x^2+y}\right) = 2x(-1)(x^2+y)^{-2} = \underline{-2\frac{x}{(x^2+y)^2}}$$

$$z''_{yx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{x^2+y}\right) = (-1)(x^2+y)^{-2}\cdot 2x = \underline{-2\frac{x}{(x^2+y)^2}}$$

$$z''_{yy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{x^2+y}\right) = (-1)(x^2+y)^{-2} = -\frac{1}{(x^2+y)^2}$$

(*) Доказати да ф-ја $z = \operatorname{arctg}\frac{x}{y}$ задовољава Лапласову једначину

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}\cdot\frac{1}{y} = \frac{y^2}{x^2+y^2}\cdot\frac{1}{y} = \frac{y}{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = y(-1)(x^2+y^2)^{-2}\cdot 2x = -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}\cdot x\left(-\frac{1}{y^2}\right) = -\frac{\cancel{y^2}}{x^2+y^2}\cdot\frac{x}{\cancel{y^2}} = -\frac{x}{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -x(-1)(x^2+y^2)^{-2}\cdot 2y = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$$

Дакле, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$.

⊛ Израчунати вредност изводи $\frac{\partial^3 u}{\partial y^2 \partial z}$ ф-је $u = x^3 y z^2 + x y^3 z$ у тачки $(1,1,0)$.

$$\frac{\partial u}{\partial y} = x^3 z^2 + 3xy^2 z$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 6xyz$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial y^2 \partial z} = 6xy$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial y^2 \partial z}(1,1,0) = 6$$

Тотални диференцијал функције више променљивих

⊛ први диференцијал:

$y = y(x), \quad dy = y' dx$

$z = z(x,y), \quad dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$

$u = u(x,y,z), \quad du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz$

$\vdots$

$f = f(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n$

⊛ Одредити 1. диференцијал ф-је $z = \sin^2 x + \cos^2 y$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2\sin x \cos x = \sin 2x$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 2\cos y(-\sin y) = -\sin 2y$$

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy = \sin 2x \, dx - \sin 2y \, dy .$$

⊛ Одредити 1. диференцијал ф-је $f(x,y,z)=\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}$ у тачки $(3,4,5)$.

$$f'_x = z\left(-\tfrac{1}{2}\right)(x^2+y^2)^{-3/2}\cdot 2x = -\frac{xz}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}\ ; \quad f'_x(3,4,5) = -\frac{3\cdot 5}{\sqrt{(3^2+4^2)^3}} = -\frac{3}{25}$$

$$f'_y = z\left(-\tfrac{1}{2}\right)(x^2+y^2)^{-3/2}\cdot 2y = -\frac{yz}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}\ ; \quad f'_y(3,4,5) = -\frac{4\cdot 5}{\sqrt{(3^2+4^2)^3}} = -\frac{4}{25}$$

$$f'_z = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\ ; \quad f'_z(3,4,5) = \frac{1}{\sqrt{(3^2+4^2)^3}} = \frac{1}{125}.$$

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz$$

$$df(3,4,5) = \frac{\partial f}{\partial x}(3,4,5)\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}(3,4,5)\,dy + \frac{\partial f}{\partial z}(3,4,5)\,dz$$

$$df(3,4,5) = -\frac{3}{25}dx - \frac{4}{25}dy + \frac{1}{125}dz = -\frac{1}{125}(15\,dx + 20\,dy - dz)$$

(и тако се рачуна вредност диференцијала у тачки, dx, dy, dz остају)

⊛ <u>диференцијали виших редова</u>

- dz ; $d^2z = d(dz)$; $d^3z = d(d^2z)$, …, $d^nz = d(d^{n-1}z)$

1. диф. 2. диференцијал 3. диференцијал n. диференцијал

- нпр. $z = z(x,y)$

$$d^2z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}dx\,dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2$$

$$d^3z = \frac{\partial^3 z}{\partial x^3}dx^3 + 3\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y}dx^2dy + 3\frac{\partial^3 z}{\partial x\partial y^2}dx\,dy^2 + \frac{\partial^3 z}{\partial y^3}dy^3$$

- нпр. $u = u(x,y,z)$

$$d^2u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dx^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}dy^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}dz^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}dx\,dy + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z}dx\,dz + 2\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}dy\,dz.$$

- Формула за диференцијале виших редова личе на формуле за степен полинома.

⊛ Одредити први, други и трећи диференцијал функције $z=e^x\cos y$.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=e^x\cos y,\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-e^x\sin y$$

$$dz=e^x\cos y\,dx-e^x\sin y\,dy$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=e^x\cos y,\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-e^x\sin y,\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-e^x\cos y$$

$$d^2z=e^x\cos y\,dx^2-2e^x\sin y\,dx\,dy-e^x\cos y\,dy^2$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}=e^x\cos y,\quad \frac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y}=-e^x\sin y,\quad \frac{\partial^3 z}{\partial x\partial y^2}=-e^x\cos y,\quad \frac{\partial^3 z}{\partial y^3}=e^x\sin y$$

$$d^3z=e^x\cos y\,dx^3-3e^x\sin y\,dx^2dy-3e^x\cos y\,dx\,dy^2+e^x\sin y\,dy^3$$

Изводи сложених функција

⊛ $f=f(x_1,x_2,\dots,x_n)$

$$x_1=x_1(t_1,t_2,\dots,t_m)$$
$$x_2=x_2(t_1,t_2,\dots,t_m)$$
$$\vdots$$
$$x_n=x_n(t_1,t_2,\dots,t_m)$$

$$\frac{\partial f}{\partial t_i}=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_j}\frac{\partial x_j}{\partial t_i},\quad i=1,2,\dots,m$$

⊛ нпр, $f=f(x,y)$, $x=x(u,v)$, $y=y(u,v)$

$$\frac{\partial f}{\partial u}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}$$

$$\frac{\partial f}{\partial v}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}$$

⊛ Ако је $z = \operatorname{arctg}\frac{x}{y}$, $x = u\sin\vartheta$, $y = u\cos\vartheta$, одредити $\frac{\partial z}{\partial u}$, $\frac{\partial z}{\partial \vartheta}$.

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} \quad ; \quad \frac{\partial z}{\partial \vartheta} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial \vartheta} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \vartheta}$$

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \sin\vartheta, \quad \frac{\partial x}{\partial \vartheta} = u\cos\vartheta; \quad \frac{\partial y}{\partial u} = \cos\vartheta, \quad \frac{\partial y}{\partial \vartheta} = -u\sin\vartheta$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}\cdot\frac{1}{y} = \frac{y}{x^2+y^2}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}\cdot x\left(-\frac{1}{y^2}\right) = \frac{-x}{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{y}{x^2+y^2}\sin\vartheta + \frac{-x}{x^2+y^2}\cos\vartheta = \frac{u\cos\vartheta}{u^2}\sin\vartheta - \frac{u\sin\vartheta}{u^2}\cos\vartheta = 0$$

$$\frac{\partial z}{\partial \vartheta} = \frac{y}{x^2+y^2}u\cos\vartheta + \frac{-x}{x^2+y^2}(-u\sin\vartheta) = \frac{u\cos\vartheta}{u^2}u\cos\vartheta + \frac{u\sin\vartheta}{u^2}u\sin\vartheta = 1$$

на крају свакако треба да елиминишемо x и y

може и: $z = \operatorname{arctg}\frac{u\sin\vartheta}{u\cos\vartheta} = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg}\vartheta) = \vartheta$; $\frac{\partial z}{\partial u} = 0$; $\frac{\partial z}{\partial \vartheta} = 1$.

⊛ Ако је $z = \sqrt{x^2+y^2}$, $x = \cos t$, $y = \sin t$, одредити $\frac{dz}{dt}$

када имамо само једну променљиву користимо „d" уместо „∂"

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

$$\frac{dx}{dt} = -\sin t, \quad \frac{dy}{dt} = \cos t; \quad \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{x^2+y^2}}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\cancel{2}y}{\cancel{2}\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot(-\sin t) + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\cos t = \frac{\cos t}{1}(-\sin t) + \frac{\sin t}{1}\cos t = 0$$

може и: $z = \sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t} = 1$; $\frac{dz}{dt} = 0$

део „може и" у претходна два задатка у општем случају није тако једноставан.

* Ако је $z = \frac{y}{x}$, $x = e^t$, $y = 1 - e^{2t}$, одредити $\frac{dz}{dt}$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

$$\frac{dx}{dt} = e^t, \quad \frac{dy}{dt} = -2e^{2t}; \quad \frac{\partial z}{\partial x} = y\left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{y}{x^2}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{x}$$

$$\frac{dz}{dt} = -\frac{y}{x^2}\cdot e^t + \frac{1}{x}\left(-2e^{2t}\right) = -\frac{1-e^{2t}}{e^{2t}}\cdot e^t + \frac{1}{e^t}\left(-2e^{2t}\right) =$$

$$= -\frac{1}{e^t} + e^t - 2e^t = -\frac{1}{e^t} - e^t$$

може и: $z = \frac{1-e^{2t}}{e^t} = \frac{1}{e^t} - e^t$; $\frac{dz}{dt} = -\frac{1}{e^t} - e^t$

* Ако је $z = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$, $y = x^2$, одредити $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{dz}{dx}$

$$z = z(x,y) \qquad z = z(x)$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\, y\left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{y}{x^2+y^2} =$$

$$z = \operatorname{arctg}\frac{y}{x} = \operatorname{arctg}\frac{x^2}{x} = \operatorname{arctg} x; \quad \frac{dz}{dx} = \boxed{\frac{1}{1+x^2}} \; (= z')$$

$$= -\frac{x^2}{x^2+x^4} = \boxed{-\frac{1}{1+x^2}}$$ — даје исто

* Доказати да ф-ја $w = w(u,v)$, где је $u = x + at$, $v = y + bt$ (a, b константе) задовољава једнакину $\frac{\partial w}{\partial t} = a\frac{\partial w}{\partial x} + b\frac{\partial w}{\partial y}$

$$u = u(t, x, (y)), \quad v = v(t, (x), y)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial t} \qquad \frac{\partial u}{\partial t} = a, \; \frac{\partial u}{\partial x} = 1, \; \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} \qquad \frac{\partial v}{\partial t} = b, \; \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \; \frac{\partial v}{\partial y} = 1$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} \qquad \boxed{\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial w}{\partial u}\cdot a + \frac{\partial w}{\partial v}\cdot b = a\frac{\partial w}{\partial x} + b\frac{\partial w}{\partial y}}$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial u}\cdot 1 + \frac{\partial w}{\partial v}\cdot 0 = \frac{\partial w}{\partial u}$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial u}\cdot 0 + \frac{\partial w}{\partial v}\cdot 1 = \frac{\partial w}{\partial v}$$

(*) Ако је $u = x + \varphi(xy)$, доказати да важи $x\frac{\partial u}{\partial x} - y\frac{\partial u}{\partial y} = x$.

($\varphi = \varphi(xy)$ је ф-ја једне променљиве.)

$$xy = t, \quad \varphi = \varphi(t) \; ; \quad \frac{\partial t}{\partial x} = y, \quad \frac{\partial t}{\partial y} = x$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1 + \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 1 + \frac{d\varphi}{dt}\cdot\frac{\partial t}{\partial x} = 1 + y\frac{d\varphi}{dt}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{d\varphi}{dt}\cdot\frac{\partial t}{\partial y} = x\frac{d\varphi}{dt}$$

$$x\frac{\partial u}{\partial x} - y\frac{\partial u}{\partial y} = x\left(1 + y\frac{d\varphi}{dt}\right) - y\cdot x\frac{\partial \varphi}{dt} = x + \cancel{xy\frac{d\varphi}{dt}} - \cancel{xy\frac{d\varphi}{dt}} = x$$

(*) Ако је $u = x^n \varphi\left(\frac{y}{x^2}\right)$, доказати да важи $x\frac{\partial u}{\partial x} + 2y\frac{\partial u}{\partial y} = nu$.

$$\frac{y}{x^2} = t, \quad \varphi = \varphi(t), \quad \frac{\partial t}{\partial x} = -\frac{2y}{x^3}, \quad \frac{\partial t}{\partial y} = \frac{1}{x^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = nx^{n-1}\varphi + x^n \underbrace{\frac{\partial \varphi}{\partial x}}_{= \frac{d\varphi}{dt}\cdot\frac{\partial t}{\partial x} = -\frac{2y}{x^3}\frac{d\varphi}{dt}} = nx^{n-1}\varphi - 2yx^{n-3}\frac{d\varphi}{dt}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = x^n \underbrace{\frac{\partial \varphi}{\partial y}}_{= \frac{d\varphi}{dt}\cdot\frac{\partial t}{\partial y} = \frac{1}{x^2}\frac{d\varphi}{dt}} = x^{n-2}\frac{d\varphi}{dt}$$

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + 2y\frac{\partial u}{\partial y} = x\left(nx^{n-1}\varphi - 2yx^{n-3}\frac{d\varphi}{dt}\right) + 2y\cdot x^{n-2}\frac{d\varphi}{dt}$$

$$= n\underbrace{x^n\varphi}_{=u} - \cancel{2yx^{n-2}\frac{d\varphi}{dt}} + \cancel{2yx^{n-2}\frac{d\varphi}{dt}} = nu$$

⊛ Ако је $u = x\varphi(x+y) + y\psi(x+y)$, доказати да важи

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

$$x+y=t,\quad \varphi=\varphi(t),\quad \psi=\psi(t),\quad \frac{\partial t}{\partial x}=1,\quad \frac{\partial t}{\partial y}=1$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \varphi + x\frac{\partial \varphi}{\partial x} + y\frac{\partial \psi}{\partial x}\ ;\quad \frac{\partial u}{\partial y} = x\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \psi + y\frac{\partial \psi}{\partial y}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} + x\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + y\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = 2\frac{\partial \varphi}{\partial x} + x\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + y\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial y} + x\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial x} + y\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial x} + x\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} + y\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = x\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial y} + y\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 2\frac{\partial \psi}{\partial y} + x\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + y\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{d\varphi}{dt}\cdot\frac{\partial t}{\partial x} = \frac{d\varphi}{dt},\quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{d\varphi}{dt}\cdot\frac{\partial t}{\partial y} = \frac{d\varphi}{dt},$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{d\psi}{dt}\cdot\frac{\partial t}{\partial x} = \frac{d\psi}{dt},\quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{d\psi}{dt}\cdot\frac{\partial t}{\partial y} = \frac{d\psi}{dt};$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{d\varphi}{dt}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)\cdot\frac{\partial t}{\partial x} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{d\varphi}{dt}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)\frac{\partial t}{\partial y} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{d\varphi}{dt}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)\frac{\partial t}{\partial y} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}$$

На сличан начин добијамо $\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \frac{d^2\psi}{dt^2}$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2\frac{d\varphi}{dt} + \cancel{x\frac{d^2\varphi}{dt^2}} + y\frac{d^2\psi}{dt^2} - 2\left(\cancel{\frac{d\varphi}{dt}} + \cancel{\frac{d\psi}{dt}} + \cancel{x\frac{d^2\varphi}{dt^2}} + y\frac{d^2\psi}{dt^2}\right)$$
$$+2\cancel{\frac{d\psi}{dt}} + \cancel{x\frac{d^2\varphi}{dt^2}} + y\frac{d^2\psi}{dt^2} = 0$$

Изводи имплицитно задатих функција

* ф-ја 1 пром: $y=y(x)$ – експлицитно задата

$f(x,y)=0$ – имплицитно задата

$$y' = \frac{dy}{dx} = -\frac{f'_{\boxed{x}}(x,y)}{f'_y(x,y)}$$

* ф-ја 2 пром: $z=z(x,y)$ – експлицитно задата

$F(x,y,z)=0$ – имплицитно задата

$$\frac{\partial z}{\partial \boxed{x}} = -\frac{F'_{\boxed{x}}(x,y,z)}{F'_z(x,y,z)}, \quad \frac{\partial z}{\partial \boxed{y}} = -\frac{F'_{\boxed{y}}(x,y,z)}{F'_z(x,y,z)}$$

* Ако је $\underbrace{(x^2+y^2)^3-3(x^2+y^2)+1=0}_{f(x,y)=0,\ \text{ф-ја 1 пром, имплицитно задата}}$, одредити $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$.

$$f'_x = 3(x^2+y^2)^2\cdot 2x - 3\cdot 2x = 6x\left((x^2+y^2)^2-1\right)$$

$$f'_y = 3(x^2+y^2)^2\cdot 2y - 3\cdot 2y = 6y\left((x^2+y^2)^2-1\right)$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{f'_x}{f'_y} = -\frac{6x\left((x^2+y^2)^2-1\right)}{6y\left((x^2+y^2)^2-1\right)} = -\frac{x}{y}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \underbrace{\frac{d}{dx}\left(-\frac{x}{y}\right)}_{\text{не } -\frac{1}{y}\text{, јер } y \text{ зависи од } x} = -\frac{1\cdot y - x\frac{dy}{dx}}{y^2} = -\frac{y-x\left(-\frac{x}{y}\right)}{y^2} = -\frac{y^2+x^2}{y^3}$$

(f'_x и f'_y рачунамо као парцијалне изводе, где су x и y међусобно независне променљиве; $\frac{dy}{dx}$ и $\frac{d^2y}{dx^2}$ су изводи ф-је $y=y(x)$, тј y зависи од x)

(*) Ако је $\underbrace{x^2-2y^2+3z^2-yz+y=0}_{F(x,y,z)=0}$, одредити $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial x}{\partial y}$.

$F(x,y,z)=0$, 2 пром, имплицитно задата ф-ја

$F'_x = 2x$, $F'_y = -4y-z+1$, $F'_z = 6z-y$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_z} = -\frac{2x}{6z-y},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y}{F'_z} = -\frac{-4y-z+1}{6z-y}$$

$$\frac{\partial x}{\partial y} = -\frac{F'_y}{F'_x} = -\frac{-4y-z+1}{2x}$$

(*) Ако је $\underbrace{x\cos y + y\cos z + z\cos x = 1}$, одредити dz

$F(x,y,z) = x\cos y + y\cos z + z\cos x - 1 = 0$

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$$

$F'_x = \cos y - z\sin x$, $F'_y = -x\sin y + \cos z$, $F'_z = -y\sin z + \cos x$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_z} = -\frac{\cos y - z\sin x}{y\sin z + \cos x}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y}{F'_z} = -\frac{-x\sin y + \cos z}{-y\sin z + \cos x}$$

$$dz = \frac{\cos y - z\sin x}{y\sin z - \cos x}dx + \frac{\cos z - x\sin y}{y\sin z - \cos x}dy$$

Тангентна раван и нормала на површ

⊛ $z = z(x,y)$ – експлицитно задата површ

Једначина тангентне равни у тачки $M(x_0,y_0,z_0)$:

$$z - z_0 = z'_x(x_0,y_0)(x-x_0) + z'_y(x_0,y_0)(y-y_0).$$

Једначина нормале на површ у тачки $M(x_0,y_0,z_0)$:

$$\frac{x-x_0}{z'_x(x_0,y_0)} = \frac{y-y_0}{z'_y(x_0,y_0)} = \frac{z-z_0}{-1}$$

$$\big(z_0 = z(x_0,y_0)\big)$$

⊛ $F(x,y,z) = 0$ – имплицитно задата површ:

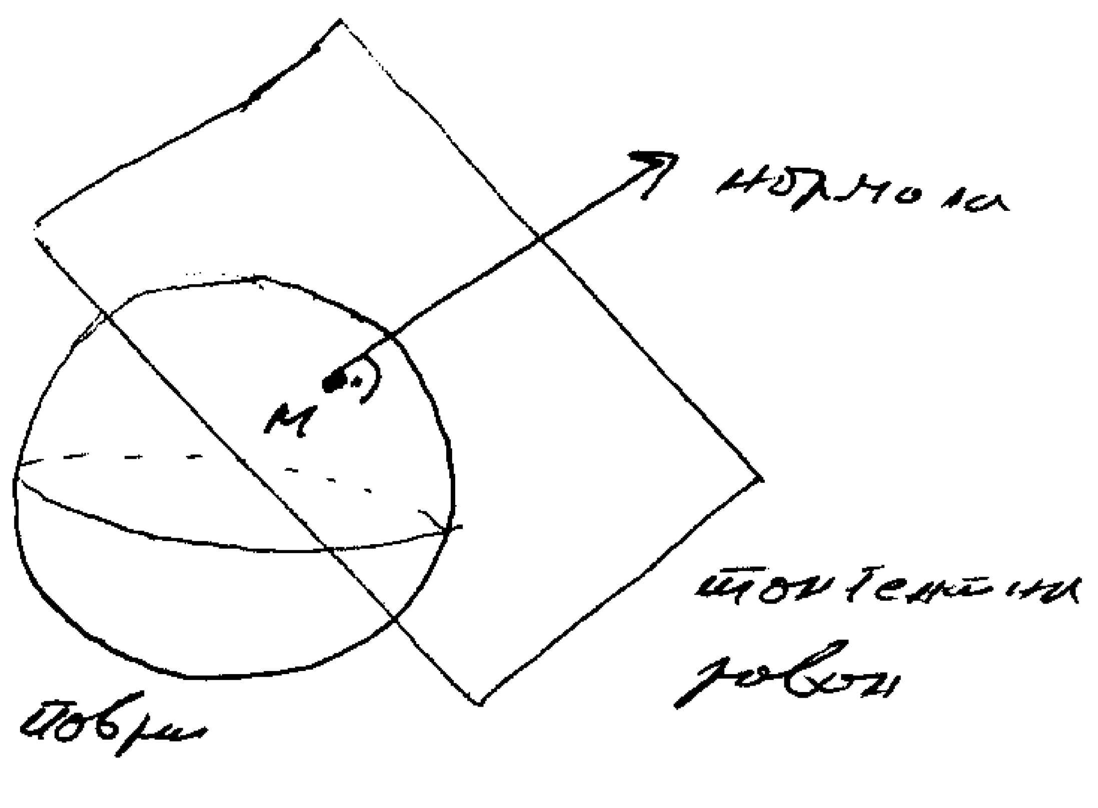
Једначина тангентне равни у тачки $M(x_0,y_0,z_0)$:

$$F'_x(x_0,y_0,z_0)(x-x_0) + F'_y(x_0,y_0,z_0)(y-y_0) + F'_z(x_0,y_0,z_0)(z-z_0) = 0.$$

Једначина нормале на површ у тачки $M(x_0,y_0,z_0)$:

$$\frac{x-x_0}{F'_x(x_0,y_0,z_0)} = \frac{y-y_0}{F'_y(x_0,y_0,z_0)} = \frac{z-z_0}{F'_z(x_0,y_0,z_0)}$$

⊛



- тангентна раван у тачки M је раван која додирује површ у тачки M
- нормала на површ у тачки M је права нормална на тангентну раван која садржи тачку M

* Одредити једначину тангентне равни и једначину нормале на површ $\underbrace{z=\frac{x^2}{2}-y^2}_{\text{експлицитно задата}}$ у тачки $M(2,-1,1)$.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = x \overset{(2,-1,1)}{=} 2 \ , \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -2y \overset{(2,-1,1)}{=} 2$$

једначина тангентне равни: $z-1 = 2(x-2)+2(y+1)$

$$2x+2y-z-1=0$$

једначина нормале: $\frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-1}{-1}$

* Одредити једначину тангентне равни и једначину нормале на површ $\underbrace{\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}-\frac{z^2}{8}=0}_{\text{имплицитно задата}}$ у тачки $(4,3,4)$.

имплицитно задата, $F(x,y,z)=0$

$$F'_x = \frac{x}{8} \overset{(4,3,4)}{=} \frac{1}{2} \ , \quad F'_y = \frac{2y}{9} \overset{(4,3,4)}{=} \frac{2}{3} \ , \quad F'_z = -\frac{z}{4} \overset{(4,3,4)}{=} -1$$

једначина тангентне равни: $\frac{1}{2}(x-4)+\frac{2}{3}(y-3)-1(z-4)=0 \ \ /\cdot 6$

$$3x+4y-6z=0$$

једначина нормале: $\frac{x-4}{\frac{1}{2}} = \frac{y-3}{\frac{2}{3}} = \frac{z-4}{-1}$

$$\frac{x-4}{3} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-4}{-6}$$

⊛ На површи $x^2+y^2-z^2-2x=0$ одредити тачке у којима су тангентне равни паралелне са координатним равнима.

Тражене тачке означимо са $M(x_0,y_0,z_0)$.

$$F'_x = 2x-2 \overset{M}{=} 2x_0-2, \quad F'_y = 2y \overset{M}{=} 2y_0, \quad F'_z = -2z \overset{M}{=} -2z_0$$

$(F'_x(M), F'_y(M), F'_z(M))$ - вектор нормале у тачки M

Ако су две равни паралелне, онда имају исти вектор нормале

1) тангентне равни паралелне са Oxy равни, тј. са равни $z=0$

Вектор нормале равни $z=0$ је $(0,0,k)$, $k\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

$$\left.\begin{array}{l} 2x_0-2=0 \\ 2y_0=0 \\ -2z_0=k \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} x_0=1 \\ y_0=0 \\ z_0=-\frac{k}{2} \end{array}\right\}$$ координате за тачку M. Ова тачка мора припадати површи $x^2+y^2-z^2-2x=0$

$$x_0^2+y_0^2-z_0^2-2x_0=0$$

$$1^2+0^2-\left(-\frac{k}{2}\right)^2-2\cdot 1=0$$

$$\frac{k^2}{4}=-1 \quad \text{↯} \quad \text{контрадикција}$$

Дакле, на датој површи не постоје тачке у којима су тангентне равни паралелне Oxy равни.

2) $\parallel Oxz$, тј. $\parallel y=0$. Вектор нормале $(0,k,0)$, $k\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$

$$\left.\begin{array}{l} 2x_0-2=0 \\ 2y_0=k \\ -2z_0=0 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} x_0=1 \\ y_0=\frac{k}{2} \\ z_0=0 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} 1^2+\left(\frac{k}{2}\right)^2-0^2-2=0 \\ \frac{k^2}{4}=1,\ k=\pm 2 \end{array}$$

Дакле, $x_0=1$, $y_0=\pm 1$, $z_0=0$

У тачкама $(1,1,0)$ и $(1,-1,0)$ тангентне равни су паралелне Oxz равни

3) $\parallel Oyz$, тј. $\parallel x=0$. вектор нормале $(k,0,0)$, $k\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$

$$\left.\begin{aligned} 2x_0-2&=k\\ 2y_0&=0\\ -2z_0&=0\end{aligned}\right\}\quad \left.\begin{aligned} x_0&=\frac{k}{2}+1\\ y_0&=0\\ z_0&=0\end{aligned}\right\}\quad \begin{aligned} &\left(\frac{k}{2}+1\right)^2+0^2-0^2-2\left(\frac{k}{2}+1\right)=0\\ &\frac{k^2}{4}+k+1-k-2=0\\ &\frac{k^2}{4}=1,\quad k=\pm 2\end{aligned}$$

Дакле, $x_0=2$ или $x_0=0$, $y_0=0$, $z_0=0$

У тачкама $(2,0,0)$ и $(0,0,0)$ тангентне равни су паралелне са Oyz равни.

Тејлорова формула за функције више променљивих

⊛ $f=f(x,y)$ развити у Тејлорову формулу у околини тачке (a,b).

$$f(x,y)=\underbrace{f(a,b)+\frac{1}{1!}\left(f'_x(a,b)(x-a)+f'_y(a,b)(y-b)\right)+\frac{1}{2!}\left(f''_{xx}(a,b)(x-a)^2+2f''_{xy}(a,b)(x-a)(y-b)+f''_{yy}(a,b)(y-b)^2\right)+\dots+\frac{1}{n!}\left((x-a)\frac{\partial}{\partial x}+(y-b)\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f(a,b)}_{\text{Тејлоров полином}}+\underbrace{R_n(x,y)}_{\text{остатак}}$$

⊛ Специјалан случај $a=b=0$: Маклоренова формула

⊛ Функцију $f(x,y)=e^x \sin y$ развити у Маклоренов полином 3. степена

$$f(x,y) \approx M_3(x,y) = f(0,0) + \frac{1}{1!}\left(f'_x(0,0)(x-0) + f'_y(0,0)(y-0)\right) +$$
$$+\frac{1}{2!}\left(f''_{x^2}(0,0)(x-0)^2 + 2f''_{xy}(0,0)(x-0)(y-0) + f''_{y^2}(0,0)(y-0)^2\right) +$$
$$+\frac{1}{3!}\left(f'''_{x^3}(0,0)(x-0)^3 + 3f'''_{x^2y}(0,0)(x-0)^2(y-0) + \right.$$
$$\left. + 3f'''_{xy^2}(0,0)(x-0)(y-0)^2 + f'''_{y^3}(0,0)(y-0)^3\right)$$

$f(x,y) = e^x \sin y \overset{(0,0)}{=} 0$;

$f'_x = e^x \sin y \overset{(0,0)}{=} 0$, $f'_y = e^x \cos y \overset{(0,0)}{=} 1$;

$f''_{x^2} = e^x \sin y \overset{(0,0)}{=} 0$, $f''_{xy} = e^x \cos y \overset{(0,0)}{=} 1$, $f''_{y^2} = -e^x \sin y \overset{(0,0)}{=} 0$

$f'''_{x^3} = e^x \sin y \overset{(0,0)}{=} 0$, $f'''_{x^2y} = e^x \cos y \overset{(0,0)}{=} 1$,

$f'''_{xy^2} = -e^x \sin y \overset{(0,0)}{=} 0$, $f'''_{y^3} = -e^x \cos y \overset{(0,0)}{=} -1$

$$M_3(x,y) = \cancel{0} + 1(\cancel{0\cdot x} + 1\cdot y) + \frac{1}{2}(\cancel{0x^2} + 2\cdot 1\cdot xy + \cancel{0y^2})$$
$$+\frac{1}{6}(\cancel{0x^3} + 3\cdot 1\cdot x^2 y + \cancel{3\cdot 0\, xy^2} + (-1)y^3)$$
$$= y + xy + \frac{1}{2}x^2 y - \frac{1}{6}y^3$$

(код полинома n-тог степена ф-је нпр. 2 променљиве подразумева се да код $x^\alpha y^\beta$ збир $\alpha+\beta$ није већи од n)

Екстреми функција више променљивих

⊛ $f = f(x,y)$, ф-ја 2 пром.

(екстрем је максимум или минимум ф-је)

⊛ Потребни услови екстрема:

$f'_x = 0$, $f'_y = 0$ — решења ових система (a,b) су стационарне тачке (што су кандидати за екстреме)

⊛ Довољни услови екстрема:

$A = f''_{xx}(a,b)$, $B = f''_{xy}(a,b)$, $C = f''_{yy}(a,b)$

$\Delta = AC - B^2$

1) $\Delta > 0$: (a,b) је екстрем: $A<0$ $(C<0)$ (a,b) је максимум
$A>0$ $(C>0)$ (a,b) је минимум

2) $\Delta < 0$: (a,b) није екстрем ((a,b) је седласта тачка)

3) $\Delta = 0$: даље испитивање ...

(напомена: ако се узима $\Delta = B^2 - AC$, онда се 1), 2), 3) мења у складу са тим)

⊛ Испитати екстреме ф-је $z = x^2 + 3y^2$

$z'_x = 2x = 0$, $z'_y = 6y = 0$ — $(x,y) = (0,0)$ - стационарна тачка (кандидат за екстрем)

$z''_{xx} = 2$, $z''_{xy} = 0$, $z''_{yy} = 6$

$A = 2$ $\quad B = 0$ $\quad C = 6$

$\Delta = AC - B^2 = 12 > 0$; $(0,0)$ је екстрем; $A = 2 > 0$; $(0,0)$ је минимум

$z_{min} = z(0,0) = 0$.

* Испитати екстреме ф-је $z = 2x^2 - 3y^2$

$$\left.\begin{array}{l} z'_x = 4x = 0 \\ z'_y = -6y = 0 \end{array}\right\} (0,0) \text{ - стационарна тачка}$$

$z''_{xx} = 4$, $z''_{xy} = 0$, $z''_{yy} = -6$

$A = 4$ $B = 0$ $C = -6$

$\Delta = AC - B^2 = -24 < 0$, $(0,0)$ није екстрем
(то је седласта тачка)

* Испитати екстреме ф-је $z = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$

$z'_x = 3x^2 + 3y^2 - 15 = 0 \quad /:3$

$z'_y = \underline{6xy - 12 = 0} \quad /:6$

$x^2 + y^2 - 5 = 0 \quad (1)$

$xy - 2 = 0 \quad (2)$

1) $y = 0$
(сист. нема реш.)

2) $y \neq 0$: $x = \frac{2}{y}$ (из (2))

$\left(\frac{2}{y}\right)^2 + y^2 - 5 = 0 \;/ \cdot y^2$ (убацивањем $x = \frac{2}{y}$ у (1))

$y^4 - 5y^2 + 4 = 0$

$y^2_{1,2} = 1$, $y^2_{3,4} = 4$

$y_1 = 1$, $y_2 = -1$, $y_3 = 2$, $y_4 = -2$

Стационарне тачке: $(2,1), (-2,-1), (1,2), (-1,-2)$.

$z''_{xx} = 6x$, $z''_{xy} = 6y$, $z''_{yy} = 6x$

(када рачунамо 2. изводе враћамо се на почетак, у $z'_x = 3x^2 + 3y^2 - 15$, $z'_y = 6xy - 12$, не у неки од израза добијених трансформацијом система)

$\underline{(2,1)}$: $A=12,\ B=6,\ C=12$

$\Delta = AC-B^2 = 144-36 = 108>0$, $(2,1)$ јесте екстрем

$A=12>0$, $(2,1)$ је минимум (локални)

$z_{min} = z(2,1) = 2^3+3\cdot 2\cdot 1^2 - 15\cdot 3 - 12\cdot 1 = -43$

$\underline{(-2,-1)}$ $A=-12,\ B=-6,\ C=-12$

$\Delta = AC-B^2 = 144-36 = 108>0$, $(-2,-1)$ јесте екстрем

$A=-12<0$, $(-2,-1)$ је максимум (локални)

$z_{max} = z(-2,-1) = (-2)^3+3(-2)(-1)-15(-2)-12(-1) = 60$

$\underline{(1,2)}$ $A=6,\ B=12,\ C=6$, $\Delta = AC-B^2 = -108<0$

$(1,2)$ није екстрем.

$\underline{(-1,-2)}$ $A=-6,\ B=-12,\ C=-6$, $\Delta = AC-B^2 = -108<0$

$(-1,-2)$ није екстрем.