Diferencijalni račun realnih funkcija više realnih nezavisno promenljivih

Ivan D. Aranđelović

29. jul 2025.

n - **dimenzioni Euklidski prostor.**

Neka je $n \geq 1$ prirodan broj.

n - dimenzioni Euklidski prostor, označava se sa $\mathbb{R}^n$, je skup svih uredjenih $n-$torki realnih brojeva, to jest

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, ..., x_n) : x_i \in \mathbb{R}^n\}.$$

Elemente prostora $\mathbb{R}^n$ nazivamo tačkama.

Rastojanje između tačaka.

Ako su $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ i $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$ dve tačke iz $\mathbb{R}^n$, rastojanje između njih se označava sa $d\,(x, y)$, a definiše relacijom:

$$d\,(x, y) = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (y_k - x_k)^2}.$$

Nejednakost Košija i Bunjkovskog

Ako su $a = (a_1, a_2, ..., a_n)$ i $b = (b_1, b_2, ..., b_n)$ dve tačke iz $\mathbb{R}^n$, onda je:

$$(i) \quad \left|\sum_{k=1}^{n} a_k \cdot b_k\right| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2} \cdot \sqrt{\sum_{k=1}^{n} b_k^2}.$$

Dokaz:

(i) Kvadratna funkcija definisana sa

$$\sum_{k=1}^{n} (a_k x + b_k)^2 =$$

$$= \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right) x^2 + 2 \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} a_k \cdot b_k\right) x + \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right)$$

je nenegativna, pa je njena diskriminanta manja ili jednaka od nule, to jest:

$$4 \cdot \sum_{k=1}^{n} (a_k \cdot b_k)^2 - 4 \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right) \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right) \leq 0,$$

odakle dobijamo tvrđenje.

Nejednakost trougla

Ako su $a = (a_1, a_2, ..., a_n)$ i $b = (b_1, b_2, ..., b_n)$ dve tačke iz $\mathbb{R}^n$, onda je:

$$(ii) \quad \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k)^2} \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^{n} b_k^2}.$$

Dokaz:

Iz relacija $|p| = \sqrt{p^2}$ i $|a_k + b_k| \leq |a_k| + |b_k|$ sledi

$$\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k)^2 = \sum_{k=1}^{n} |a_k + b_k|^2 \leq$$
$$\leq \sum_{k=1}^{n} (|a_k| + |b_k|)\, |a_k + b_k|\,,$$

odakle dvostrukom primenom nejednakosti (i) dobijamo:

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^2 &\leq \sum_{k=1}^{n}|a_k|\,|a_k+b_k| + \sum_{k=1}^{n}|b_k|\,|a_k+b_k| \\
&\leq \sqrt{\sum_{k=1}^{n}|a_k|^2}\cdot\sqrt{\sum_{k=1}^{n}|a_k+b_k|^2} \\
&\quad + \sqrt{\sum_{k=1}^{n}|b_k|^2}\cdot\sqrt{\sum_{k=1}^{n}|a_k+b_k|^2} \\
&= \left(\sqrt{\sum_{k=1}^{n}a_k^2}+\sqrt{\sum_{k=1}^{n}b_k^2}\right)\cdot\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^2},
\end{aligned}
$$

odakle direktno sledi tvrđenje.

Za svako x, y i z iz $\mathbb{R}^n$ važi:

(i) $d(x,y)=0$ ako i samo ako je $x=y$;

(ii) $d(x,y)=d(y,x)$;

(iii) $d(x,y)\leq d(x,z)+d(z,y)$;

(iv) $|d(x,z)-d(z,y)|\leq d(x,y)$.

Osobine (i) i (ii) slede direktno iz definicije. (iii) Primenom nejednakosti trougla dobijamo

$$d(x,y) = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (y_k - x_k)^2} =$$

$$= \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (y_k - z_k) + (z_k - x_k)^2}$$

$$\leq \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (y_k - z_k)^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (z_k - x_k)^2}$$

$$= d(z,y) + d(x,z) = d(x,z) + d(z,y).$$

(iv) Iz $d(x,z) \geq d(z,y)$ sledi $|d(x,z) - d(z,y)| = d(x,z) - d(z,y)$. Sada iz $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ sledi

$$|d(x,z) - d(z,y)| = d(x,z) - d(z,y) \leq d(x,y).$$

Iz $d(x,z) \leq d(z,y)$ sledi $|d(x,z) - d(z,y)| = d(z,y) - d(x,z)$. Sada iz $d(z,y) \leq d(y,x) + d(x,z))$ sledi

$$|d(x,z) - d(z,y)| = d(z,y) - d(x,z) \leq d(x,y) = d(x,y).$$

Otvorene kugle u
n - dimenzionom Euklidskom prostoru.

Neka je $n \geq 1$ prirodan broj, $r > 0$ i $x \in \mathbb{R}^n$. Skup

$$K(x,r) = \{y \in \mathbb{R}^n : d(x,y) < r\}$$

naziva se otvorena kugla sa centrom u tački x poluprečnika r.

U skupu $\mathbb{R}$ otvorena kugla $K(x,r)$ je otvoreni interval $(x-r, x+r)$.

U skupu $\mathbb{R}^2$ otvorena kugla $K(x,r)$, gde je $x = (x_1, x_2)$, je skup svih (y_1, y_2) za koje je $\sqrt{(y_1-x_1)^2 + (y_2-x_2)^2} < r$, odnosno $K(x,r)$ je kružna oblast sa centrom u tački x i poluprečnikom r.

U skupu $\mathbb{R}^3$ otvorena kugla $K(x,r)$, gde je $x = (x_1, x_2, x_3)$, je skup svih (y_1, y_2, y_3) za koje je $\sqrt{(y_1-x_1)^2 + (y_2-x_2)^2 + (y_3-x_3)^2} < r$, odnosno $K(x,r)$ je loptasta oblast sa centrom u tački x i poluprečnikom r.

Zatvorene kugle u
n - dimenzionom Euklidskom prostoru.

Neka je $n \geq 1$ prirodan broj, $r > 0$ i $x \in \mathbb{R}^n$. Skup

$$K[x,r] = \{y \in \mathbb{R}^n : d(x,y) \leq r\}$$

naziva se zatvorena kugla sa centrom u tački x poluprečnika r.

U skupu $\mathbb{R}$ zatvorena kugla $K(x,r)$ je zatvoreni interval $[x-r, x+r]$.

U skupu $\mathbb{R}^2$ zatvorena kugla $K[x,r]$, gde je $x = (x_1, x_2)$, je skup svih (y_1, y_2) za koje je $\sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2} \leq r$, odnosno $K[x,r]$ je krug sa centrom u tački x i poluprečnikom r.

U skupu $\mathbb{R}^3$ zatvorena kugla $K[x,r]$, gde je $x = (x_1, x_2, x_3)$, je skup svih (y_1, y_2, y_3) za koje je $\sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + (y_3 - x_3)^2} \leq r$, odnosno $K[x,r]$ je lopta sa centrom u tački x i poluprečnikom r.

Otvoreni skupovi u n - dimenzionom Euklidskom prostoru.

Okolina tačke $x \in \mathbb{R}^n$, u oznaci $O(x)$, je podskup od $\mathbb{R}^n$ koji sadrži kuglu $K(x,r)$, za neko $r > 0$.

U skupu $\mathbb{R}^2$ okolina tačke $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ je svaki skup $O(x)$ koji sadrži neku kružnu oblast sa centrom u tački (x_1, x_2).

Skup $G \subset \mathbb{R}^n$ je otvoren ako je okolina svake svoje tačke.

Otvorena kugla $K(x,r) \subseteq \mathbb{R}^n$ je otvoren skup u $\mathbb{R}^n$, zato što za proizvoljno $y \in K(x,r)$ i $s = r - d(x,y)$ iz $d(y,z) < s$ sledi

$$d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z) < d(x,y) + s = r,$$

odnosno za svako $y \in K(x,r)$ je $K(y,s) \subseteq (x,r)$.

Tačka $a \in X \subset \mathbb{R}^n$ je unutrašnja tačka skupa X ako postoji neka kugla $K(a,r)$ takva da je $K(a,r) \subset X$.

Zatvoreni skupovi u
n - dimenzionom Euklidskom prostoru.

Skup $F \subset \mathbb{R}^n$ je zatvoren ako je njegov komplement $\mathbb{R}^n \backslash F$ otvoren.

Zatvorena kugla $K[x, r] \subseteq \mathbb{R}^n$ je zatvoren skup u $\mathbb{R}^n$, zato što za proizvoljno $y \in \mathbb{R}^n$ takvo da je $y \notin K(x, r)$ i $s = d(x, y) - r$ iz $d(y, z) < s$ sledi

$$d(x, z) \geq |d(x, y) - d(y, z)| =$$
$$= d(x, y) - d(y, z) > d(x, y) - s = r,$$

odnosno za svako $y \notin K[x, r]$ je

$K(y, s) \cap K[x, r] = \emptyset$,

to jest

$K(y, s) \subseteq \mathbb{R}^n \backslash K[x, r]$.

Realne funkcije dve realne nezavisne promenljive.

Razmatraćemo funkcije dveju realnih nezavisno promenljivih $z = f(x, y)$, gde je f pravilo koje tačkama (x, y) (uređenim parovima realnih brojeva x i y) dodeljuje realne brojeve z. Skoro svi pojmovi uvedeni za funkcije dveju nezavisno promenljivih bez većih teškoća se prenose i na funkcije više nezavisno promenljivih.

Kada je funkcija f zadata formulom (analitičkim izrazom) onda se određuje najveći podskup X xy-ravni u čijim tačkama funkcija uzima realne vrednosti. Taj podskup je njena oblast definisanosti ili definicioni skup.

Neka je funkcija $z = f(x, y)$ definisana na podskupu X xy-ravni. Tada se svakoj tački $(x, y) \in X$ pridružuje (dodeljuje) tačka $(x, y, f(x, y))$ u trodimenzionom prostoru. Skup svih tačaka $(x, y, f(x, y))$ kada $(x, y) \in X$ zove se grafik funkcije $z = f(x, y)$.

Granična vrednost.

Neka je $f(x,y)$ funkcija dveju realnih nezavisno promenljivih, definisana na nekom podskupu $X \subset \mathbb{R}^2$, gde X sadrži neku kružnu oblast sa centrom u tački (x_0, y_0), sem, možda, tačku (x_0, y_0). Funkcija $f(x,y)$ ima graničnu vrednost b u tački (x_0, y_0) ako za svako $\varepsilon > 0$ postoji $\delta = \delta(\varepsilon, x_0, y_0) > 0$ tako da je $|f(x,y) - b| < \varepsilon$ kad god je $0 < \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta$. Tada, kao kod funkcija jedne nezavisno promenljive, pišemo $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = b$.

Za funkcije jedne nezavisno promenljive definisali smo levu i desnu granič-nu vrednost u tački x_0, odnosno posmatrali približavanje tački x_0 s leve i s desne strane. U slučaju funkcije dveju realnih nezavisno promenljivih posmatramo približavanje tački (x_0, y_0) po svakoj krivoj, pa ako granična vrednost postoji, ona mora biti jedinstvena bez obzira po kojoj krivoj se približavamo tački (x_0, y_0).

Osobine granične vrednosti funkcije dveju nezavisno promenljivih analogne su osobinama graničnih vrednosti funkcija jedne nezavisno promenljive.

Pored granične vrednosti $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$

mogu se posmatrati i takozvani ponovljeni, to jest uzastopni limesi. Naime, možemo tražiti graničnu vrednost kad nezavisno promenljive uzastopno teže granicama, to jest

$$\lim_{x\to x_0}\left(\lim_{y\to y_0} f(x,y)\right) \text{ i } \lim_{y\to y_0}\left(\lim_{x\to x_0} f(x,y)\right).$$

U prvom slučaju se pretpostavlja da je x konstanta različita od x_0 a u drugom da je y konstanta različita od y_0.

Granična vrednost funkcije dveju nezavisno promenljivih ne mora biti jednaka ponovljenim limesima te funkcije.

Neprekidnost.

Neka je tačka (x_0, y_0) unutrašnja tačka oblasti definisanosti $X \subset \mathbb{R}^2$ funkcije $f(x,y)$ dveju nezavisno promenljivih. Funkcija $f(x,y)$ je neprekidna u tački (x_0, y_0) ako za svako $\varepsilon > 0$ postoji $\delta(\varepsilon, x_0, y_0) > 0$ tako je $(x,y) \in X$ važi

$$|f(x,y) - f(x_0, y_0)| < \varepsilon$$

kad god je

$$(x,y) \in X \text{ i } \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta.$$

Prema tome funkcija $f(x,y)$ neprekidna u tački $(x_0, y_0) \in X$ ako i samo ako je

$$\lim_{(x,y) \to (x_0, y_0)} f(x,y) = f(x_0, y_0).$$

Funkcija $f : X \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je neprekidna na skupu Y, $Y \subset X$, ako je neprekidna u svakoj tački skupa Y.

Neprekidnost funkcije $f(x, y)$ po svakoj od nezavisno promenljivih x i y razlikuje se od neprekidnosti funkcije $f(x, y)$ kao funkcije dveju nezavisno promenljivih. Naime, funkcija $f(x, y)$ je neprekidna po x za fiksirano $y = y_0$, ako je $\lim_{x \to x_0} f(x, y_0) = f(x_0, y_0)$. Analogno za neprekidnost po promenljivoj y.

Ako su funkcije $f(x, y)$ i $g(x, y)$ neprekidne u tački (x_0, y_0), tada su u toj tački neprekidne i funkcije $f(x, y) \pm g(x, y)$, $f(x, y) \cdot g(x, y)$, a i $\frac{f(x,y)}{g(x,y)}$ pod uslovom da je $g(x_0, y_0) \neq 0$.

Slično kao kod funkcija jedne nezavisno promenljive, neprekidnost funkcije $z = f(x, y)$ u tački (x_0, y_0) njenog domena može se izraziti i u terminima priraštaja funkcije $f(x, y)$. Naime, razlika $\triangle z = f(x_0 + \triangle x, y_0 + \triangle y) - f(x_0, y_0)$ se zove priraštaj funkcije koji odgovara priraštajima $\triangle x$ i $\triangle y$ argumenata x i y. Tada je jednakost

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0)$$

ekvivalentna jednakosti

$$\lim_{\substack{\triangle x\to 0\\ \triangle y\to 0}} \triangle z = 0,$$

kojom se opisuje uslov da je funkcija

$z = f(x, y)$ neprekidna u tački (x_0, y_0).

Ako je funkcija $z = f(x, y)$ neprekidna u ograničenoj i zatvorenoj oblasti $X \subset \mathbb{R}^2$, tada ona na X dostiže najmanju i najveću vrednost.

Parcijalni izvodi i diferencijal.

Neka je (x_0, y_0) unutrašnja tačka oblasi definisanosti $X \subset \mathbb{R}^2$ funkcije $f(x, y)$ dveju nezavisno promenljivih. Prvi parcijalni izvod po x funkcije $f(x, y)$ u tački (x_0, y_0), u oznaci $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$, definiše se kao

$$\lim_{\triangle x \to 0} \frac{f(x_0 + \triangle\, x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\triangle\, x}.$$

Prvi parcijalni izvod po y funkcije $f(x, y)$ u tački (x_0, y_0), u oznaci $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$, definiše se kao

$$\lim_{\triangle y \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + \triangle\, y) - f(x_0, y_0)}{\triangle\, y}.$$

Brojioci u razlomcima s desne strane se označavaju sa $\triangle_x\, z$ i $\triangle_y\, z$, respektivno, i zovu se delimični priraštaji po x odnosno po y. Prema tome je

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{\triangle_x\, z}{\triangle\, x} \quad \text{i}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) := \lim_{\triangle y \to 0} \frac{\triangle_y\, z}{\triangle\, y}.$$

U oba slučaja pretpostavljamo postojanje graničnih vrednosti.

Koriste se i oznake $f'_x(x_0, y_0)$ i $f'_y(x_0, y_0)$.

Na sličan način se definišu parcijalni izvodi funkcije od n nezavisno promenljivih, za $n > 2$.

Primetimo da se pri određivanju $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ promenljiva y smatra konstantnom, a pri određivanju $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ promenljiva x smatra konstantnom. Potreban uslov za postojanje parcijalnog izvoda po x je neprekidnost funkcije $f(x, y)$ po x za fiksirano y, dok je potreban uslov za postojanje parcijalnog izvoda po y neprekidnost funkcije $f(x, y)$ po y za fiksirano x. Međutim, parcijalni izvod po, na primer, promenljivoj x može da postoji i u tački u kojoj posmatrana funkcija nije neprekidna kao funkcija dveju nezavisno promenljivih.

Geometrijsko tumačenje parcijalnog izvoda.

Posmatraćemo površ S određenu jednačinom $z = f(x, y)$ u trodimenzionom prostoru, gde je $f(x, y)$ neprekidna funkcija koja ima parcijalne izvode u nekoj oblasti X. Želimo da damo geometrijsku interpretaciju parcijalnih izvoda funkcije $f(x, y)$ u tački $(x_0, y_0) \in X$, kojoj odgovara tačka $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ na površi S.

Prilikom izračunavanja parcijalnog izvoda $\frac{\partial z}{\partial x}$ u tački (x_0, y_0) funkciju $z = f(x, y)$ tretiramo kao funkciju jedne nezavisno promenljive x, a y tretiramo kao konstantu, tj. $z = f(x, y_0) = f_1(x)$. Funkcija $z = f_1(x)$ određuje krivu C dobijenu presecanjem površi S i ravni $y = y_0$.

Prema geometrijskoj interpretaciji izvoda funkcije jedne nezavisno promenljive, dobija se da je $f_1'(x_0) = \tan \alpha$, gde je α ugao između $x-$ose i tangente krive C u tački $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$.

Iz $f_1'(x_0) = \frac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0)$, sledi $\frac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0) = \tan\alpha$.

Znači, $\frac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0)$ je koeficijent pravca tangente u tački $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ krive koja se dobija presecanjem ravni $y = y_0$ i površi $z = f(x, y)$.

Prilikom izračunavanja parcijalnog izvoda $\frac{\partial z}{\partial y}$ u tački (x_0, y_0) funkciju $z = f(x, y)$ tretiramo kao funkciju jedne nezavisno promenljive y, a x tretiramo kao konstantu, tj. $z = f(x_0, y) = f_2(y)$. Funkcija $z = f_1(x)$ određuje krivu D dobijenu presecanjem površi S i ravni $x = x_0$.

Prema geometrijskoj interpretaciji izvoda funkcije jedne nezavisno promenljive, dobija se da je $f_2'(y_0) = \tan\beta$, gde je β ugao između $y-$ose i tangente krive D u tački $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$.

Iz $f_2'(y_0) = \frac{\partial z}{\partial y}(x_0, y_0)$, sledi $\frac{\partial z}{\partial y}(x_0, y_0) = \tan\beta$.

Znači, $\frac{\partial z}{\partial y}(x_0, y_0)$ je koeficijent pravca tangente u tački $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ krive koja se dobija presecanjem ravni $x = x_0$ i površi $z = f(x, y)$.

Diferencijabilnost funkcije.

Neka je funkcija $z = f(x,y)$ definisana na podskupu X xy-ravni i neka je (x,y) unutrašnja tačka skupa X.

Sa $\triangle\ x$ i $\triangle\ y$ označimo priraštaje nezavisno promenljivih x i y takve da $(x+\triangle x, y+\triangle y) \in X$. Kaže se da je funkcija $z = f(x,y)$ diferencijabilna u tački $(x,y) \in X$ ako se njen totalni priraštaj u tački (x,y) pri priraštajima Δx i Δy nezavisno promenljivih x i y, tj.

$$\triangle z = f(x+\triangle x, y+\triangle y) - f(x,y),$$

za svaku tačku $(x+\triangle x, y+\triangle y)$ neke kugle $K(x,r) \subset X$, može predstaviti u obliku

$$\begin{aligned} \triangle z = A \triangle x + B \triangle y + \\ +\alpha(\triangle x, \triangle y) \triangle x + \beta(\triangle x, \triangle y) \triangle y, \end{aligned}$$

gde su A i B neki brojevi nezavisni od $\triangle x$ i $\triangle y$, a $\alpha(\triangle x, \triangle y)$ i $\beta(\triangle x, \triangle y)$ neke funkcije koje teže nuli kad $\triangle x$ i $\triangle y$ teže nuli.

Ako je funkcija $z = f(x, y)$ diferencijabilna u tački (x, y), tada se linearni (u odnosu na $\triangle\, x$ i $\triangle\, y$) deo njenog priraštaja zove diferencijal funkcije $z = f(x, y)$ u tački (x, y). Diferencijal funkcije $z = f(x, y)$ se označava sa dz i zapisuje

$$dz = A \triangle x + B \triangle y.$$

Tada je $\triangle\, z = dz + \alpha \triangle x + \beta \triangle y$.

Poslednji izraz za totalni priraštaj diferencijabilne funkcije u tački (x, y) može se napisati u obliku $\triangle\, z = dz + o(\rho)$, gde je

$$o(\rho) = \phi(\triangle x, \triangle y)\, \rho, \quad \rho = \sqrt{(\triangle x)^2 + (\triangle y)^2}$$

a funkcija $\phi(\triangle x, \triangle y)$ teži nuli kad $\triangle\, x$ i $\triangle\, y$ teže nuli.

Neophodan uslov diferencijabilnosti funkcije.

Ako je funkcija $z = f(x,y)$ diferencijabilna u nekoj tački, tada $f(x,y)$ ima parcijalne izvode $\frac{\partial z}{\partial x}$ i $\frac{\partial z}{\partial y}$ u toj tački, i oni su, redom, jednaki brojevima A i B, tj. $\frac{\partial z}{\partial x}(x,y) = A$ i $\frac{\partial z}{\partial y}(x,y) = B$.

Dovoljan uslov diferencijabilnosti funkcije.

Neka funkcija $z = f(x,y)$ ima parcijalne izvode $f'_x(x,y)$ i $f'_y(x,y)$ u nekoj okolini tačke (x_0, y_0) i neka su $f'_x(x,y)$ i $f'_y(x,y)$ neprekidni u tački (x_0, y_0). Tada je funkcija $z = f(x,y)$ diferencijabilna u tački (x_0, y_0).

Diferencijabilnosti funkcije jedne realne promenljive.

Funkcija $y = f(x)$ jedne nezavisno promenljive je diferencijabilna u tački x_0 ako i samo ako u toj tački ima izvod $f'(x_0)$. Međutim, za funkcije više nezavisno promenljivih ne može se formulisati sličan potreban i dovoljan uslov.

Totalni diferencijal.

Ako je funkcija $z = f(x, y)$ diferencijabilna, tada je njen totalni diferencijal dat sa $dz = A \triangle x + B \triangle y$. Znajući da je $A = \frac{\partial z}{\partial x}$ i $B = \frac{\partial z}{\partial y}$, možemo dz pisati kao

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} \triangle x + \frac{\partial z}{\partial y} \triangle y.$$

Kao u slučaju funkcije jedne nezavisno promenljive, izjednačićemo diferen-cijale nezavisno promenljivih sa njihovim priraštajima, tj. $\triangle x = dx$ i $\triangle y = dy$. Tada se totalni diferencijal zapisuje kao

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy.$$

Pretpostavimo da je funkcija $z = f(x, y)$ diferencijabilna u tački (x, y) i da je $dz \neq 0$ u toj tački. Tada se totalni priraštaj

$$\triangle z = \frac{\partial z}{\partial x} \triangle x + \frac{\partial z}{\partial y} \triangle y +$$
$$+\alpha(\triangle x, \triangle y) \triangle x + \beta(\triangle x, \triangle y) \triangle y$$

razlikuje od linearnog dela

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} \triangle x + \frac{\partial z}{\partial y} \triangle y$$

samo za sumu $\alpha \triangle x + \beta \triangle y$, gde su $\alpha \triangle x$ i $\beta \triangle y$, kad $\triangle x \to 0$ i $\triangle y \to 0$, infinitezimale višeg reda nego sabirci u dz. Ako je $dz \neq 0$, linearni deo totalnog priraštaja diferencijabilne funkcije se zove glavni deo tog priraštaja. Aproksimacija

$$\triangle z \approx dz$$

se često koristi. Napomenimo da je navedena aproksimacija to preciznija što su manje vrednosti priraštaja nezavisno promenljivih.

Parcijalni izvodi složene funkcije.

Neka je data funkcija $z = f(x, y)$ definisana u nekom podskupu X xy-ravni i neka su x i y funkcije jedne nezavisno promenljive t takve da je

$$x = g(t), \; y = h(t), \quad t_0 < t < t_1.$$

Pretpostavimo da za bilo koje $t \in (t_0, t_1)$ odgovarajuća tačka (x, y) pripada domenu X funkcije $z = f(x, y)$. Tada smena $x = g(t)$, $y = h(t)$ svodi funkciju $z = f(x, y)$ na složenu funkciju $z = f(g(t), h(t))$ jedne realne nezavisno promenljive.

Ako u tački t postoje izvodi

$$\frac{dx}{dt} = g'(t) \quad \text{i} \quad \frac{dy}{dt} = h'(t),$$

i ako je funkcija $z = f(x, y)$ diferencijabilna u tački $(x, y) = (g(t), h(t))$, tada složena funkcija $z = f(g(t), h(t))$ ima izvod $\frac{dz}{dt}$ u tački t i važi formula

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}.$$

Teorema o parcijalnim izvodima složene funkcije

Neka je funkcija $z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ diferencijabilna u tački $(x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0})$ i neka su funkcije

$$\begin{aligned} x_1 &= \varphi_1(t_1, t_2, \dots, t_m), \\ x_2 &= \varphi_2(t_1, t_2, \dots, t_m), \\ &\dots \\ x_n &= \varphi_n(t_1, t_2, \dots, t_m) \end{aligned}$$

diferencijabilne u tački $(t_{10}, t_{20}, \ldots, t_{m0})$, pri čemu je

$$\begin{aligned}
\varphi_1(t_{10}, t_{20}, \ldots, t_{m0}) &= x_{10}, \\
\varphi_2(t_{10}, t_{20}, \ldots, t_{m0}) &= x_{20}, \\
&\cdots \\
\varphi_n(t_{10}, t_{20}, \ldots, t_{m0}) &= x_{n0}.
\end{aligned}$$

Tada je i složena funkcija

$$z = f(\varphi_1(t_1, t_2, \ldots, t_m), \varphi_2(t_1, t_2, \ldots, t_m), \ldots \\ \varphi_n(t_1, t_2, \ldots, t_m)) = F(t_1, t_2, \ldots, t_m)$$

diferencijabilna u tački $(t_{10}, t_{20}, \ldots, t_{m0})$ i važi

$$\frac{\partial F(t_{10}, t_{20}, \ldots, t_{m0})}{\partial t_j} =$$

$$= \frac{\partial f(x_{10}, x_{20}, \ldots, x_{n0})}{\partial x_1} \frac{\partial \varphi_1(t_{10}, t_{20}, \ldots, t_{m0})}{\partial t_j} +$$

$$+ \frac{\partial f(x_{10}, x_{20}, \ldots, x_{n0})}{\partial x_2} \frac{\partial \varphi_2(t_{10}, t_{20}, \ldots, t_{m0})}{\partial t_j} + \ldots$$

$$+ \frac{\partial f(x_{10}, x_{20}, \ldots, x_{n0})}{\partial x_n} \frac{\partial \varphi_n(t_{10}, t_{20}, \ldots, t_{m0})}{\partial t_j},$$

za $j = 1, 2, \ldots, m$.

Diferencijal složene funkcije.

Ako je $z = f(x,y)$ diferencijabilna funkcija nezavisno promenljivih x i y, tada je njen totalni diferencijal dz jednak

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy, \qquad (*)$$

gde je $dx = \triangle x$ i $dy = \triangle y$.

Pretpostavimo sada da je $z = f(x,y)$ složena funkcija, na primer, da je $x = g(u,v)$ i $y = h(u,v)$. Za funkcije $x = g(u,v)$ i $y = h(u,v)$ još pretpostavimo da imaju neprekidne parcijalne izvode u tački (u,v). Kako je $z = z(u,v) = f(g(u,v), h(u,v))$, to je

$$dz = \frac{\partial z}{\partial u}du + \frac{\partial z}{\partial v}dv. \qquad (**)$$

Zamenjujući u formuli (**) $\frac{\partial z}{\partial u}$ i $\frac{\partial z}{\partial v}$ sa

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} \quad \text{i} \quad \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v},$$

uz korišćenje jednakosti

$$\frac{\partial x}{\partial u}du+\frac{\partial x}{\partial v}dv=dx \quad \text{i} \quad \frac{\partial y}{\partial u}du+\frac{\partial y}{\partial v}dv=dy,$$

dobijamo formulu (*). Odatle zaključujemo da je totalni diferencijal funkcije $z=f(x,y)$ dat formulama istog oblika kada su promenljive x i y nezavisne i kada promenljive x i y zavise od drugih promenljivih. Dakle, totalni diferencijal funkcije dveju i više nezavisno promenljivih ostaje isti (invarijantan je) pri smeni promenljivih.

Napomena. Na osnovu prethodnih rezultata lako je proveriti sledeća pravila diferenciranja:

$$d(x\pm y)=dx\pm dy,\ d(xy)=xdy+ydx,$$
$$d\left(\frac{x}{y}\right)=\frac{ydx-xdy}{y^2}\ (y\neq 0).$$

Ona ostaju tačna i kada su x i y diferencijabilne funkcije od proizvoljnog konačnog broja nezavisno promenljivih, tj. za $x=g(u,v,w,...)$ i $y=h(u,v,w,...)$.

Izvodi viših redova.

Neka funkcija $z = f(x, y)$ ima parcijalne izvode u svakoj tački oblasti G. Tada su $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ i $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ nove funkcije dveju nezavisno promenljivih definisane na G. Ako i one imaju svoje parcijalne izvode u tačkama oblasti G, dolazimo do drugih parcijalnih izvoda funkcije $f(x, y)$ i označavamo ih redom sa

$$\begin{aligned}
f_{xx} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x} f_x = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2},\\
f_{yy} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y} f_y = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2},\\
f_{xy} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y} f_x = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y},\\
f_{yx} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x} f_y = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}.
\end{aligned}$$

Poslednja dva parcijalna izvoda se zovu mešoviti parcijalni izvodi drugog reda funkcije $z = f(x, y)$. Na isti način može se govoriti o parcijalnim izvodima trećeg, četvrtog, ... reda funkcije dveju ili više nezavisno promenljivih.

U vezi sa parcijalnim izvodima, od interesa je da se raspravi pitanje kada će mešoviti parcijalni izvodi k-tog reda funkcije od n nezavisno promenljivih biti nezavisni od redosleda diferenciranja. O tome govore naredne dve teoreme, prva u slučaju $k = n = 2$, a druga u opštem slučaju.

Teorema 1. Neka je data funkcija $z = f(x, y)$ definisana na oblasti $G \subset \mathbb{R}^2$ i neka je (x_0, y_0) neka tačka oblasti G. Ako postoje $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ u svakoj tački oblasti G, i $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ su neprekidni u tački (x_0, y_0), tada važi jednakost $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0)$.

Teorema 2. Ako u nekoj oblasti $G \subset \mathbb{R}^n$ funkcija $z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ima neprekidne sve parcijalne izvode k-tog reda, i neprekidne mešovite parcijalne izvode $k+1$-vog reda, tada je svaki od tih mešovitih parcijalnih izvoda nezavisan od redosleda diferenciranja.

Diferencijal drugog reda.

Ako funkcija $z = f(x, y)$ dveju nezavisno promenljivih x i y ima neprekidne druge parcijalne izvode u tački (x_0, y_0), onda je diferencijal od dz, odnosno diferencijal drugog reda funkcije $z = f(x, y)$, $d^2z = d(dz)$, u tački (x_0, y_0) pri priraštajima dx i dy, jednak

$$\begin{aligned} d^2z &= \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x^2}(dx)^2 \\ &+ 2\frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial y^2}(dy)^2 . \end{aligned}$$

Izraz na desnoj strani ove jednakosti može se simbolički predstaviti u obliku

$$d^2z = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy\right)^2 f(x_0, y_0) ,$$

pri čemu operator $\left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy\right)^2$ deluje na funkciju $z = f(x, y)$ na sledeći način:

$\frac{\partial}{\partial x}dx+\frac{\partial}{\partial y}dy$ treba kvadrirati po binomnom obrascu, a zatim stepene od $\frac{\partial}{\partial x}$ i $\frac{\partial}{\partial y}$ zameniti parcijalnim izvodima odgovarajućih redova.

Diferencijali viših redova.

Ako funkcija $z = f(x, y)$ ima u tački (x_0, y_0) neprekidne sve parcijalne izvode k-tog reda, tada postoji k-ti diferencijal $d^k f(x_0, y_0; dx, dy)$ funkcije f u tački (x_0, y_0) pri priraštajima dx i dy nezavisno promenljivih, i jednak je

$$d^k f(x_0, y_0; dx, dy) = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^k f(x_0, y_0).$$

Tejlorova teorema o aproksimaciji

Neka je funkcija $z = f(x, y)$ definisana i neprekidna zajedno sa svim svojim parcijalnim izvodima do $n+1$-vog reda u nekoj otvorenoj okolini V tačke (x_0, y_0), takvoj da iz $(x, y) \in V$ sledi da i duž koja spaja tačke (x_0, y_0) i (x, y) leži u V. Tada za svaku tačku $(x, y) \in V$ postoji broj $\theta \in (0, 1)$ takav da važi

$$\begin{aligned} & f(x, y) = f(x_0, y_0) + \\ + \quad & \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \left(\frac{\partial}{\partial x} \triangle x + \frac{\partial}{\partial y} \triangle y \right)^k f(x_0, y_0) + \\ & + R_n(f; x_0, y_0; x, y), \end{aligned} \tag{1}$$

gde je

$$R_n(f; x_0, y_0; x, y) = \frac{1}{(n+1)!} \cdot$$

$$\cdot \left(\frac{\partial}{\partial x} \triangle x + \frac{\partial}{\partial y} \triangle y \right)^{n+1} f(x_0 + \theta \triangle x, y_0 + \theta \triangle y_0),$$

i $\Delta x = x - x_0$, $\Delta y = y - y_0$.

Relacija (1) je Tejlorova formula za funkciju dveju nezavisno promenljivih. Polinom

$$f(x_0, y_0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \left[\frac{\partial}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial}{\partial y}(y - y_0) \right]^k f(x_0, y_0) =: \\ =: T_n(f; x_0, y_0; x, y)$$

je Tejlorov polinom n-tog stepena oko tačke (x_0, y_0) funkcije $z = f(x, y)$.

Ako je $(x_0, y_0) = (0, 0)$, tada se Tejlorova teorema naziva Maklorenovom teoremom a Tejlorov polinom Maklorenovim polinomom, kao kod funkcija jedne nezavisno promenljive.