Универзитет у Београду

Машински факултет

Механика робота

Вежбе - седма недеља

Београд, 2023.

NR

Решавање директног и инверзног задатка кинематике

q^i - унутрашње координате
$\overline{q}^i$ - спољашње координате

Директан задатак:$\overline{q}^\alpha = \varphi^\alpha\left(q^1, q^2, q^3, ..., q^n\right)$
Инверзан задатак:$q^i = \varphi^i\left(\overline{q}^1, \overline{q}^2, \overline{q}^3, ..., \overline{q}^n\right)$
Базни случај: Декартове координате и Ојлерови углови!

$$\begin{aligned}\overline{q}^1 &= x_H, \quad \overline{q}^4 = \psi_H\\ \overline{q}^2 &= y_H, \quad \overline{q}^5 = \theta_H\\ \overline{q}^3 &= z_H, \quad \overline{q}^6 = \varphi_H\end{aligned}$$

У случају позиционирања (уместо Декартових координата) уводимо и следеће координатне системе:

- поларно-цилиндрични
- сферни

У случају оријентације уводимо и Хамилтон-Родригове параметре.

Хамилтон-Родригови параметри Уместо Ојлерових углова могуће је увести три независне координате:

$$\theta_i = 2\frac{\lambda_i}{\lambda_0}, \quad i = 1, 2, 3$$

при чему су λ_i независне величине, а λ_0 зависи од њих на следећи начин:

$$\lambda_0 = \sqrt{1 - (\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2)}$$

Величине λ_i су Хамилтон-Родригови параметри:

$$\lambda_1 = \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\psi - \varphi}{2}\right)$$

$$\lambda_2 = \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{\psi - \varphi}{2}\right)$$

$$\lambda_3 = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{\psi + \varphi}{2}\right)$$

Задатак 13 За дати роботски систем са 3 степена слободе решити директан кинематички задатак, тј. одредити $\overline{q}^i$, $i = 1, 2, ..., 6$, ако су спољашње координате:

$$\begin{aligned} \overline{q}^1 &= x_H, & \overline{q}^4 &= \lambda_1 \\ \overline{q}^2 &= y_H, & \overline{q}^5 &= \lambda_2 \\ \overline{q}^3 &= z_H, & \overline{q}^6 &= \lambda_3 \end{aligned}$$

Познате су унутрашње координате: $q^1 = 0,2$ rad, $q^2 = 0,3$ rad и $q^3 = 0,4$ rad, као и то да је $\overline{\xi}_i = 1$, $i = 1, 2, 3$. Такође су познати карактеристични вектори сегмената и матрице трансформације:

$$\vec{\rho}_{11}^{(1)} = \begin{Bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \qquad \vec{\rho}_{22}^{(2)} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{Bmatrix}, \qquad \vec{\rho}_{33}^{(3)} = \begin{Bmatrix} -0,5 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Матрице трансформације:

$$[A_{0,1}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos q^1 & -\sin q^1 \\ 0 & \sin q^1 & \cos q^1 \end{bmatrix}$$

$$[A_{1,2}] = \begin{bmatrix} \cos q^2 & 0 & \sin q^2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin q^2 & 0 & \cos q^2 \end{bmatrix}$$

$$[A_{2,3}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos q^3 & -\sin q^3 \\ 0 & \sin q^3 & \cos q^3 \end{bmatrix}$$

Задатак 13: одређивање позиције Позицију врха хватаљке одредићемо на већ познат начин (погледати Задатак 10), на основу израза:

$$\boxed{\vec{r}_H = \sum_{\alpha=1}^{n} (\vec{\rho}_{\alpha\alpha} + \xi_\alpha \vec{e}_\alpha q^\alpha)} \Rightarrow \vec{r}_H = \vec{\rho}_{11} + \vec{\rho}_{22} + \vec{\rho}_{33}$$

У односу на непокретни координатни систем:

$$\vec{r}_H^{(0)} = \vec{\rho}_{11}^{(0)} + \vec{\rho}_{22}^{(0)} + \vec{\rho}_{33}^{(0)} = [A_{0,1}] \left\{ \vec{\rho}_{11}^{(1)} \right\} + [A_{0,2}] \left\{ \vec{\rho}_{22}^{(2)} \right\} + [A_{0,3}] \left\{ \vec{\rho}_{33}^{(3)} \right\} \quad (1)$$

Дакле, потребно је одредити и матрице трансформације $[A_{0,2}]$ и $[A_{0,3}]$:

$$[A_{0,2}] = [A_{0,1}]\,[A_{1,2}] = \begin{bmatrix} 0,995 & 0 & 0,296 \\ 0,059 & 0,98 & -0,19 \\ -0,29 & 0,199 & 0,936 \end{bmatrix}$$

$$[A_{0,3}] = [A_{0,2}]\,[A_{2,3}] = \begin{bmatrix} 0,955 & 0,155 & 0,273 \\ 0,059 & 0,824 & -0,556 \\ -0,29 & 0,547 & 0,784 \end{bmatrix}$$

Коначно, на основу познатих података и израза (1), следи да је позиција врха хватаљке:

$$\vec{r}_H^{(0)} = \begin{Bmatrix} -1,4775 \\ -1,01 \\ -0,054 \end{Bmatrix}$$

Према томе, када унутрашње координате имају задате вредности $q^1 = 0,2$ rad, $q^2 = 0,3$ rad и $q^3 = 0,4$ rad, позиција врха хватаљке у односу на непокретни Декартов координатни систем је:

$$\begin{aligned} x_H &= -1,4775\,\mathrm{m} \\ y_H &= -1,01\,\mathrm{m} \\ z_H &= -0,054\,\mathrm{m} \end{aligned}$$

Задатак 13: одређивање оријентације Спољашње координате су Хамилтон-Родригови параметри који су задати у финкцији Ојлерових углова:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\psi-\varphi}{2}\right) \\ \lambda_2 &= \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{\psi-\varphi}{2}\right) \\ \lambda_3 &= \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{\psi+\varphi}{2}\right) \end{aligned}$$

Дакле, потребно је одредити Ојлерове углове, а затим Хамилтон-Родригове параметре!

Било која оријентација хватаљке може се постићи уз помоћ три узастопне ротације (декомпозиција сферног кретања):

- око осе Oz за угао ψ,
- око чворне осе On за угао θ и
- око осе $O\zeta$ за угао φ.

где су ψ, θ и φ Ојлерови углови.

За појединачне ротације важе следеће матрице трансформације (погледати Задатак 3):

$$[A_\psi] = \begin{bmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[A_\theta] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

$$[A_\varphi] = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Укупна матрица трансформације је:

$$\begin{aligned} [A] &= [A_\psi]\,[A_\theta]\,[A_\varphi] \\ &= \begin{bmatrix} \mathrm{c}\psi\mathrm{c}\varphi - \mathrm{s}\psi\mathrm{c}\theta\mathrm{s}\varphi & -\mathrm{c}\psi\mathrm{s}\varphi - \mathrm{s}\psi\mathrm{c}\theta\mathrm{c}\varphi & \mathrm{s}\psi\mathrm{s}\theta \\ \mathrm{s}\psi\mathrm{c}\varphi + \mathrm{c}\psi\mathrm{c}\theta\mathrm{s}\varphi & -\mathrm{s}\psi\mathrm{s}\varphi + \mathrm{c}\psi\mathrm{c}\theta\mathrm{c}\varphi & -\mathrm{c}\psi\mathrm{s}\theta \\ \mathrm{s}\theta\mathrm{s}\varphi & \mathrm{s}\theta\mathrm{c}\varphi & \mathrm{c}\theta \end{bmatrix} \end{aligned}$$

и она је једнака матрици $[A_{0,3}]$!

$$\boxed{[A] = [A_{0,3}]}$$

$$\begin{aligned} [A_{0,3}] &= [A_\psi]\,[A_\theta]\,[A_\varphi] = [A_{0,1}]\,[A_{1,2}]\,[A_{2,3}] \\ &= \begin{bmatrix} \mathrm{c}\psi\mathrm{c}\varphi - \mathrm{s}\psi\mathrm{c}\theta\mathrm{s}\varphi & -\mathrm{c}\psi\mathrm{s}\varphi - \mathrm{s}\psi\mathrm{c}\theta\mathrm{c}\varphi & \mathrm{s}\psi\mathrm{s}\theta \\ \mathrm{s}\psi\mathrm{c}\varphi + \mathrm{c}\psi\mathrm{c}\theta\mathrm{s}\varphi & -\mathrm{s}\psi\mathrm{s}\varphi + \mathrm{c}\psi\mathrm{c}\theta\mathrm{c}\varphi & -\mathrm{c}\psi\mathrm{s}\theta \\ \mathrm{s}\theta\mathrm{s}\varphi & \mathrm{s}\theta\mathrm{c}\varphi & \boxed{\mathrm{c}\theta} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0,955 & 0,155 & 0,273 \\ 0,059 & 0,824 & -0,556 \\ -0,29 & 0,547 & \boxed{0,784} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Уочавамо чланове матрице трансформације уз помоћ којих можемо одредити Ојлерове углове на најједноставнији начин:

$$\cos\theta = 0,784 \Rightarrow \quad \theta = 0,6697\,\mathrm{rad} = 38,371^\circ$$

$$\left.\begin{aligned} \sin\theta\sin\psi = 0,273 \\ \sin\theta\cos\psi = 0,556 \end{aligned}\right\} \mathrm{tg}\,\psi = \frac{0,273}{0,556} \Rightarrow \quad \psi = 0,455\,\mathrm{rad} = 26.151^\circ$$

$$\left.\begin{array}{l}\sin\theta\sin\varphi = -0,29\\ \sin\theta\cos\varphi = 0,547\end{array}\right\}\mathrm{tg}\,\varphi = \frac{-0,29}{0,547} \Rightarrow \quad \varphi = -0,4875\,\mathrm{rad} = -27.931^{\circ}$$

Коначно, Хамилтон-Родригови параметри су:

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\psi-\varphi}{2}\right) = 0,293\\ \lambda_2 &= \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{\psi-\varphi}{2}\right) = 0,147\\ \lambda_3 &= \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{\psi+\varphi}{2}\right) = 0,9445\end{aligned}$$

Задатак 13: укупно решење За задате унутрашње координате

$$q^1 = 0,2\,\mathrm{rad},\ q^2 = 0,3\,\mathrm{rad}\ \text{и}\ q^3 = 0,4\,\mathrm{rad}$$

решен је директни задатак

$$\overline{q}^{\alpha} = \varphi^{\alpha}\left(q^1, q^2, q^3\right)$$

где су спољашње координате Декартове координате (за позицију врха хватаљке) и Хамилтон-Родригови параметри (за оријентацију врха хватаљке):

$$\begin{aligned}\overline{q}^1 &= x_H = -1,4775\,\mathrm{m} & \overline{q}^4 &= \lambda_1 = 0,293\\ \overline{q}^2 &= y_H = -1,01\,\mathrm{m} & \overline{q}^5 &= \lambda_2 = 0,147\\ \overline{q}^3 &= z_H = -0,054\,\mathrm{m} & \overline{q}^6 &= \lambda_3 = 0,9445\end{aligned}$$