

Ovaj dokument sadrži zadatke iz predmeta Elektrotehnika na Mašinskom fakultetu u Beogradu. Zadaci su koncipirani tako da prate tematske celine sa predavanja i omogućavaju vežbanje ključnih pojmova i metoda. Zadaci su numerisani i raspoređeni prema oblastima koje se obrađuju na predavanjima. Preporučuje se da pokušate samostalno da rešite svaki zadatak, a zatim uporedite svoj postupak sa ponuđenim rešenjima. Posebnu pažnju obratite na analizu vektorskih veličina, jedinica i fizičkih pretpostavki. U nekim zadacima data su i potpitanja koja podstiču razumevanje i diskusiju. Kroz zadatke ćete uočiti sledeće oznake:



Za važne komentare i mesta gde studenti često greše.



Za dodatna pitanja vezano za zadatak.



Za one koji žele da rade više - ne dolazi na ispitu!



Za ideju, komentar na izvođenje.



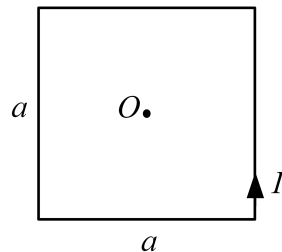
Za preporuku uz zadatak.

Konsultacije: Za dodatna pojašnjenja i pitanja u vezi sa predmetom možete me kontaktirati putem:

- Email: vbecejac@mas.bg.ac.rs
- Uživo: tokom termina konsultacija **sredom u 10 časova** u Laboratoriji za elektrotehniku i elektroniku (soba 2, pored Studentske službe).

1 Elektromagnetizam

1. U kvadratnoj žičanoj konturi dužine stranice a postoji stalna struja jačine I . Kontura se nalazi u vakuumu. Odrediti izraz za vektor magnetske indukcije u centru konture.

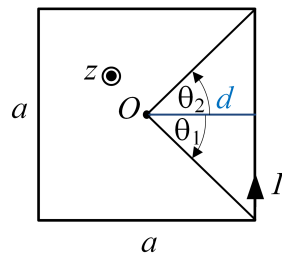


REŠENJE: Magnetska indukcija pravolinijskog strujnog provodnika u vakuumu se može dobiti primenom formule

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi d} (\sin \theta_2 - \sin \theta_1),$$

pri čemu je d normalna razdaljina povučena iz tačke na strujni provodnik, a uglovi θ_1 i θ_2 se računaju u odnosu na tu normalu, pri čemu se smer rasta ugla poklapa sa smerom struje i $\theta_2 > \theta_1$.

Prema oznakama sa slike, za svaku stranicu kvadratne konture je $d = \frac{a}{2}$, $\theta_1 = -\frac{\pi}{4}$ i $\theta_2 = \frac{\pi}{4}$.



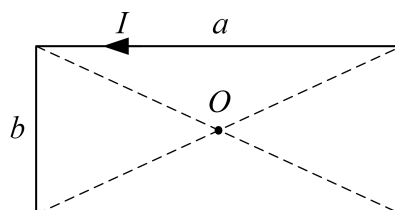
Referentni smerovi magnetske indukcije za sve četiri stranice se poklapaju. Algebarski intenzitet je

$$\begin{aligned} B &= 4B_1 = 4 \cdot \frac{\mu_0 I}{4\pi \frac{a}{2}} \left(\sin \frac{\pi}{4} - \sin \left(-\frac{\pi}{4} \right) \right) \\ &= \frac{2\mu_0 I}{\pi a} \cdot 2 \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2\sqrt{2}\mu_0 I}{\pi a}, \end{aligned}$$

u odnosu na referentni smer sa slike gde smo proizvoljno usvojili z -osu. Konačno,

$$\mathbf{B} = \frac{2\sqrt{2}\mu_0 I}{\pi a} \mathbf{i}_z.$$

2. U pravougaonoj žičanoj konturi, dužina stranica a i b , postoji stalna struja jačine I . Kontura se nalazi u vakuumu. Odrediti izraz za vektor magnetske indukcije u centru konture.

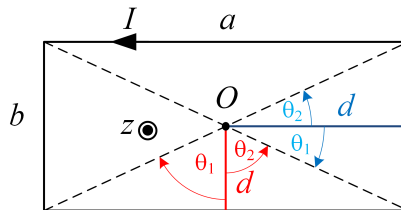


REŠENJE: Prema referentnom smeru koji se poklapa sa z -osom, za stranicu dužine b , algebarski intenzitet vektora magnetske indukcije je

$$\begin{aligned} B_1 &= \frac{\mu_0 I}{4\pi \frac{a}{2}} (\sin \theta_2 - \sin \theta_1) = \frac{\mu_0 I}{4\pi \frac{a}{2}} \left(\frac{\frac{b}{2}}{\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}} - \left(-\frac{\frac{b}{2}}{\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}} \right) \right) \\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi \frac{a}{2}} 2 \cdot \frac{\frac{b}{2}}{\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}} = \frac{\mu_0 I}{\pi a} \cdot \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}. \end{aligned}$$

Za stranicu dužine a je

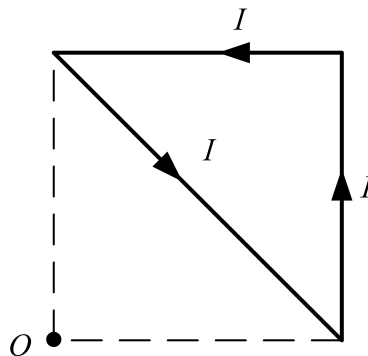
$$\begin{aligned} B_2 &= \frac{\mu_0 I}{4\pi \frac{b}{2}} (\sin \theta_2 - \sin \theta_1) = \frac{\mu_0 I}{4\pi \frac{b}{2}} \left(\frac{\frac{a}{2}}{\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}} - \left(-\frac{\frac{a}{2}}{\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}} \right) \right) \\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi \frac{b}{2}} 2 \cdot \frac{\frac{a}{2}}{\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}} = \frac{\mu_0 I}{\pi b} \cdot \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}. \end{aligned}$$



Konačno,

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= 2\mathbf{B}_1 + 2\mathbf{B}_2 = \frac{2\mu_0 I}{\pi\sqrt{a^2+b^2}} \left(\frac{b}{a} + \frac{a}{b} \right) \mathbf{i}_z \\ &= \frac{2\mu_0 I}{\pi\sqrt{a^2+b^2}} \frac{b^2+a^2}{ab} \mathbf{i}_z = \frac{2\mu_0 I}{\pi ab} \sqrt{a^2+b^2} \mathbf{i}_z. \end{aligned}$$

3. Žičana kontura ima oblik jednakokrako pravouglog trougla, dužine katete a . Kontura se nalazi u vazduhu. Odrediti izraz za vektor magnetske indukcije u tački O .

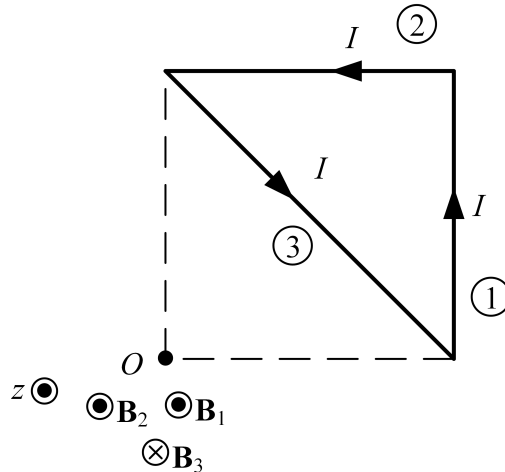


REŠENJE: Vektor magnetske indukcije u tački O je

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2 + \mathbf{B}_3.$$

Za katetu, na slici označenu sa 1, je $d = a$, $\theta_1 = 0$ i $\theta_2 = \frac{\pi}{4}$, za katetu označenu sa 2 je $d = a$, $\theta_1 = -\frac{\pi}{4}$ i $\theta_2 = 0$ i za hipotenuzu, označenu sa 3 je $d = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ i $\theta_1 = -\frac{\pi}{4}$, $\theta_2 = \frac{\pi}{4}$. Dobija se

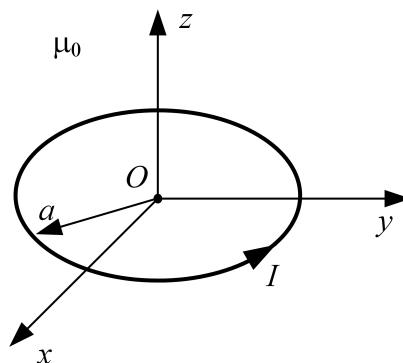
$$\begin{aligned} \mathbf{B}_1 &= \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \left(\sin \frac{\pi}{4} - \sin 0 \right) \mathbf{i}_z = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \mathbf{i}_z \\ \mathbf{B}_2 &= \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \left(\sin 0 - \sin \left(-\frac{\pi}{4} \right) \right) \mathbf{i}_z = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \mathbf{i}_z \\ \mathbf{B}_3 &= \frac{\mu_0 I}{4\pi \frac{a\sqrt{2}}{2}} \left(\sin \frac{\pi}{4} - \sin \left(-\frac{\pi}{4} \right) \right) (-\mathbf{i}_z) = \frac{\mu_0 I}{4\pi \frac{a\sqrt{2}}{2}} \cdot 2 \frac{\sqrt{2}}{2} (-\mathbf{i}_z). \end{aligned}$$



Konačno,

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} - 2 \right) \mathbf{i}_z \\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \left(\sqrt{2} - 2 \right) \mathbf{i}_z. \end{aligned}$$

4. Žičana kontura ima oblik kružnice poluprečnika a . Kontura se nalazi u vazduhu i u njoj je uspostavljena stalna struja jačine I . Odrediti izraz za vektor magnetske indukcije u tački O .



REŠENJE: Bio-Savarov zakon za koplanarni sistem je

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\theta} \frac{I d\theta}{r}. \quad (1)$$



U ovom kontekstu, koplanarni sistem znači da se svi strujni elementi i tačka gde se traži vektor magnetske indukcije nalaze u istoj ravni.

U relaciji (1) je sa r označeno odstojanje od posmatranog strujnog elementa ($I d\mathbf{l}$) do tačke gde se magnetska indukcija traži, a ugao θ se računa od proizvoljno odabranog poluprečnika do potega r .

U konkretnom slučaju je algebarski intenzitet vektora magnetske indukcije

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a} = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \cdot 2\pi = \frac{\mu_0 I}{2a},$$

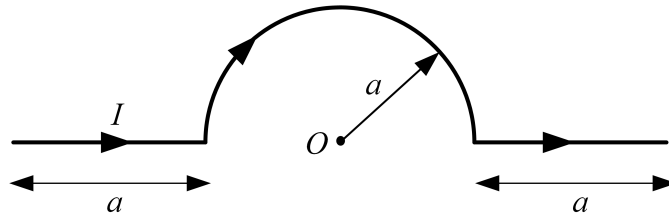
prema referentom smeru koji se poklapa sa z -osom.

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{2a} \mathbf{i}_z.$$



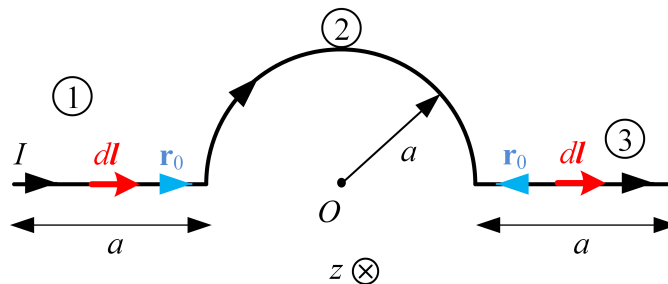
Relaciju (1) je zgodno koristiti kada se u zadatku javljaju strujne kružnice ili delovi strujnih kružnica (kružni lukovi). Naravno, moramo imati koplanarni sistem. Takođe, važno je prisetiti se da u matematici prava i tačka uvek određuju jednu ravan, dok sa kružnim lukom i tačkom to nije u opštem slučaju tačno.

5. Žičana kontura ima oblik kao na slici. Kontura se nalazi u vazduhu i u njoj je uspostavljena stalna struja jačine I . Odrediti izraz za vektor magnetske indukcije u tački O .



REŠENJE: U zadatku iako su delovi 1 i 3 pravolinijski segmenti, ne može se upotrebiti formula $B = \frac{\mu_0 I}{4\pi d} (\sin \theta_2 - \sin \theta_1)$ jer se ne može odrediti normalno rastojanje povučeno iz tačke na segment. Stoga će biti primenjen Bio-Savarov zakon za linijske struje

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\mathbf{l} \times \mathbf{r}_0}{r^2}.$$

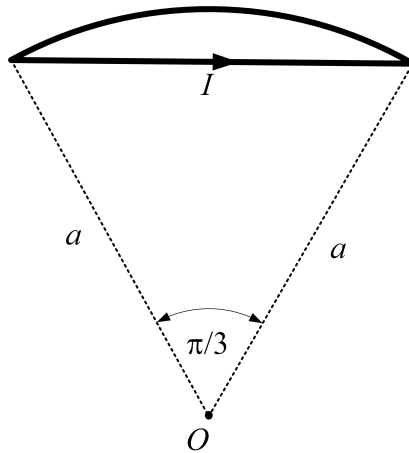


Primetimo da je za segment 1 $\sin(\angle d\mathbf{l}, \mathbf{r}_0) = \sin 0 = 0$, a za 2 je $\sin(\angle d\mathbf{l}, \mathbf{r}_0) = \sin \pi = 0$ pa je stoga i $\mathbf{B}_1 = \mathbf{B}_2 = 0$.

Preostaje samo poluružnica od koje je

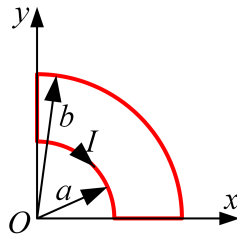
$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \int_0^\pi d\theta \mathbf{i}_z = \frac{\mu_0 I}{4a} \mathbf{i}_z.$$

6. (Za samostalni rad) Žičana kontura ima oblik kao na slici. Kontura se nalazi u vazduhu i u njoj je uspostavljena stalna struja jačine I . Odrediti izraz za vektor magnetske indukcije u tački O .



REZULTAT: $\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \left(\frac{2\sqrt{3}}{3} - \frac{\pi}{3} \right) \mathbf{i}_z$, gde je ort \mathbf{i}_z uperen u papir.

7. (Za samostalni rad) Žičana kontura ima oblik kao na slici. Kontura se nalazi u vazduhu i u njoj je uspostavljena stalna struja jačine I . Odrediti izraz za vektor magnetske indukcije u tački O .



REZULTAT: $\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{8} \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a} \right) \mathbf{i}_z$.

8. (Za samostalni rad) Žičana kontura ima oblik jednakostraničnog trougla dužine stranice a . Kontura se nalazi u ravni crteža, u vakuumu, i u noj je uspostavljena stalna struja jačine I . Odrediti izraz za vektor magnetske indukcije u težištu konture.

REZULTAT: $B = \frac{9\mu_0 I}{2\pi a}$, prema referentnom smeru iz papira.