Машински факултет
УНИВЕРЗИТЕТА У БЕОГРАДУ

Ткива са нелинеарним динамичким понашањем

Др Михаило Лазаревић , ред. проф.
Машински факултет, Београд, Универзитет у Београду,Србија

Нелинеарна еластичност

Изотропија

$$\mathbf{T} = \chi_0 \mathbf{1} + \chi_1 \mathbf{C} + \chi_2 \mathbf{C}^2.$$

χ_0, χ_1 и χ_2 *коефицијенти понашања материјала.*

Овде су χ_0, χ_1 и χ_2 *коефицијенти понашања материјала.* Ово су скаларне функције три основне инваријанте од $\mathbf{C}^*$ дате као

$$I_{\mathrm{C}} \equiv tr\mathbf{C}, \quad II_{\mathrm{C}} \equiv \frac{1}{2}\left[(tr\mathbf{C})^2 - tr\mathbf{C}^2\right], \; III_{\mathrm{C}} \equiv \det \mathbf{C}.$$

$$I_{\mathrm{C}} = \alpha_1^{\ 2} + \alpha_2^{\ 2} + \alpha_3^{\ 2}, \quad II_{\mathrm{C}} \equiv \alpha_1^{\ 2}\alpha_2^{\ 2} + \alpha_2^{\ 2}\alpha_3^{\ 2} + \alpha_3^{\ 2}\alpha_1^{\ 2} \text{ и}$$

$$III_{\mathrm{C}} = \alpha_1^{\ 2}\alpha_2^{\ 2}\alpha_3^{\ 2},$$

$$\mathbf{T} = \nu_o \mathbf{1} + \nu_1 \mathbf{C} + \nu_2 \mathbf{C}^2$$

ν скаларне функције главних истезања $\{\alpha_i\}$.

- Еластични материјални су конзервативни материјали, тј. не дисипирају енергију. То није случај код биолошких ткива чија је карактеристика често значајано *„губљење енергије“*, што се огледа кроз великог (напон-мере деформације) хистерезиса или феномена типа релаксације напона, фазе заостајања између улазних и излазних сигнала у физиолошким системима, итд
- Ипак, у многим случајевима теорија еластичности је корисна у циљу добијања квалитативних, као и квантитативних предвиђања која се тичу понашања датог физиолошког система у статичким или квази-статичким условима.

Линеарна теорија еластичности -примена на биолошка ткива

Ова теорија се бави се случајевима где су деформације мале и где се мале деформације придодају великим деформацијама (*инкрементална еластичност*). *Теорија инкременталне еластичности* је веома значајна у биореологији из следећег разлога.

За разлику од многих инжењерских материјала чије је природно стање без напона, многа биолошка ткива су природно пренапрегнута (тј. плућа су напуњена, кожа је истегнута, крвни судови су под притиском, итд.). Ово су неке од разлика између биолошких и осталих материјала.

линеарна веза напон-мера деформације, познатом као Хооке-ов закон

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}_0 + \mathbb{C}\mathbf{e},$$

преднапон

коефицијент еластичности

$\mathbb{C}$ зависи од $\mathbf{T}_0$.

тензор четвртог реда (*Cijkl*).

материјал чије је природно стање је стање без преднапона $\mathbf{T}_0 \equiv 0, \Rightarrow \mathbb{C} = const.$

- Ако је материјал изотропан и у изотропном стању преднапрегнут,
- на пример, $T_0 = -p_0\mathbf{1}$ где је *po* хидростатички притисак

$$\mathbf{T} = -p_0 1 + \lambda tr e 1 + 2\mu e,$$

где су λ, μ познати као *привидни (apparent) Ламе-ови коефицијенти* еластичности

Назив „привидан“ произилази из чињенице да оба коефицијента зависе од *po* .

Ако је $p_0 = 0$, онда су привидни Ламеови коефицијенти константни.

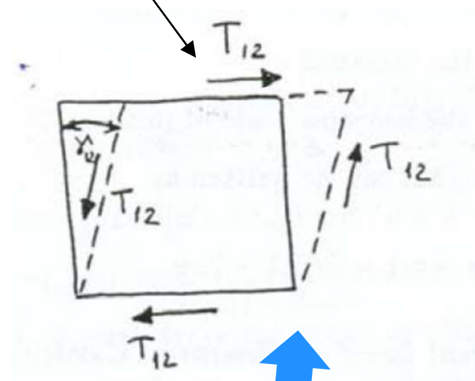
Физичке интерпретације коефицијената еластичности

- Претпоставља се да је у питању деформација при којој се запремина не мења *(isovolumic)* и рефлектује се само променом облика материјалног тела. Онда је

Онда је $tr\mathbf{e} = 0$ и одатле једначина

$$\mathbf{T} = -p_0\mathbf{1} + 2\mu\mathbf{e} \, .$$

напон смицања



„једноставно смицање

Таква деформација се односи на деформацију смицања.

Коефицијент μ познат је као *модуо смицања*.

$\gamma_{12}/2$ страна ромбоида представља угао клизања

једнак линеарној деформацији клизања ι e_{12}

Сада се посматра –промена запремине

деформација таква да облик остаје исти $e_1 = e_2 = e_3 = e$

$$\mathbf{T} = \left[-p_0 + (3\lambda + 2\mu) e \right] \mathbf{1}$$

Како је промена запремине $\Delta V / V = tre = 3e$ $\Rightarrow$ $\mathbf{T} = \left[-p_0 + \kappa \dfrac{\Delta V}{V} \right] \mathbf{1}$,

$$\kappa = \lambda + 2\mu / 3$$

запремински модул који представља способност материјала да се опире униформној промени запремине

Функција специфичне енергије деформације w са применом биолошке материјале и ткива
- нелинеарна еластичност

Пример физиолошког издужења код плућа је у опсегу $(1.1-2)$

Функција w је функција деформације овде је тензор c.

$$W = W(C) = W(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$$

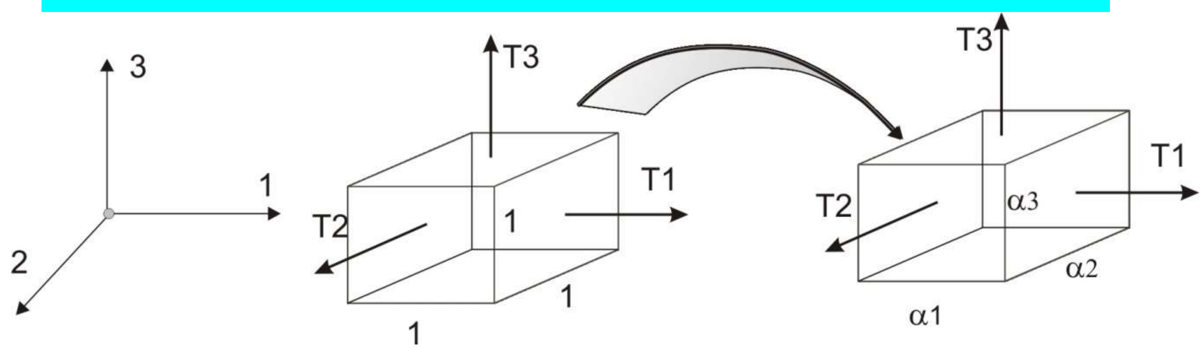
$$C = \begin{bmatrix} \alpha_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3^2 \end{bmatrix}$$

За материјале који су изотропни онда се може $W = W(I_c, II_c, III_c)$

Пример формирања конститутивних релација применом виртуелног рада.

Силе - $T_1\alpha_2\alpha_3, T_2\alpha_1\alpha_3, T_3\alpha_1\alpha_2$ рад на вирт. померањима

,



$$\delta W(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \frac{\partial W}{\partial \alpha_1}\delta\alpha_1 + \frac{\partial W}{\partial \alpha_2}\delta\alpha_2 + \frac{\partial W}{\partial \alpha_3}\delta\alpha_3$$

$\delta\alpha_i,\ i = 1,2,3$ $\quad$ $\alpha_i + \delta\alpha_i,\ i = 1,2,3$

$$\delta W(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = T_1\alpha_2\alpha_3\delta\alpha_1 + T_2\alpha_1\alpha_3\delta\alpha_2 + T_3\alpha_1\alpha_2\delta\alpha_3$$

$$T_1 = \frac{\partial W}{\partial \alpha_1}\frac{1}{\alpha_2\alpha_3}, \quad T_2 = \frac{\partial W}{\partial \alpha_2}\frac{1}{\alpha_1\alpha_3}, \quad T_3 = \frac{\partial W}{\partial \alpha_3}\frac{1}{\alpha_1\alpha_2},$$

За мале деформације

$$T_1 = \frac{\partial W}{\partial e_1}\frac{\partial \alpha_1}{\partial e_1}\frac{1}{\alpha_2\alpha_3} = \frac{\partial W}{\partial e_1}\circ 1\circ\left(\left(1+e_2\right)\circ\left(1+e_3\right)\right)^{-1} \approx \frac{\partial W}{\partial e_1} \ ,$$

$$\alpha_i = 1 + e_i,\ i = 1,2,3$$

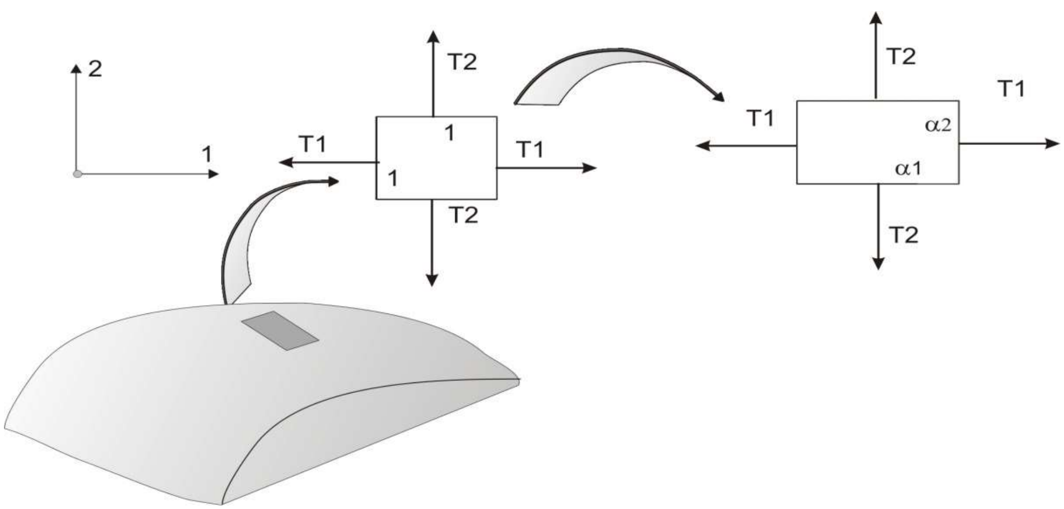
$$T_2 = \frac{\partial W}{\partial e_2},\ \ T_3 = \frac{\partial W}{\partial e_3},\ \ T_i \to \sigma_i \ \ oznake$$

Kastiljanova teorema

Равански случај еластичности (кожа, паренхин плућа)

$$\delta W\left(\alpha_1, \alpha_2\right) = T_1\alpha_2\delta\alpha_1 + T_2\alpha_1\delta\alpha_2$$

$$T_1 = \frac{\partial W}{\partial \alpha_1}\frac{1}{\alpha_2},\ \ T_2 = \frac{\partial W}{\partial \alpha_2}\frac{1}{\alpha_1},$$



Случај нестишљивог материјала

$$III_C = \alpha_1^2 \alpha_2^2 \alpha_3^2 = 1 \, , \, (\Delta V = 0) \Rightarrow \alpha_3 = \frac{1}{\alpha_1 \alpha_2}$$

$$W = W(\alpha_1, \alpha_2)\Big|_{izotropan} = W(I_C, II_C)$$

$p_{0\rightarrow}$ из граничних услова

$$T_1 = -p_0 + \frac{\partial W}{\partial \alpha_1} \frac{1}{\alpha_2 \alpha_3},$$

$$T_2 = -p_0 + \frac{\partial W}{\partial \alpha_2} \frac{1}{\alpha_1 \alpha_3},$$

$$T_3 = -p_0 + \frac{\partial W}{\partial \alpha_3} \frac{1}{\alpha_1 \alpha_2},$$

Двосмерна екстензија нестишљивог материјала (пр. Кожа, плућа, ткиво срца)

$$T_3 = 0, \;\; \alpha_3 = 1/(\alpha_1 \alpha_2)$$

$$0 = -p_0 + \frac{\partial W}{\partial \alpha_3} \frac{1}{\alpha_1 \alpha_2} \Rightarrow p_0 = \frac{\partial W}{\partial \alpha_3} \frac{1}{\alpha_1 \alpha_2},$$

Меримо

$$\alpha_1, \alpha_2, T_1, T_2$$

$$T_1 = -p_0 + \frac{\partial W}{\partial \alpha_1} \frac{1}{\alpha_2 \alpha_3}, \;\; T_2 = -p_0 + \frac{\partial W}{\partial \alpha_2} \frac{1}{\alpha_1 \alpha_3},$$

Одређујемо

$$\frac{\partial W}{\partial \alpha_1}, \frac{\partial W}{\partial \alpha_2}, \Rightarrow W = W(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$$

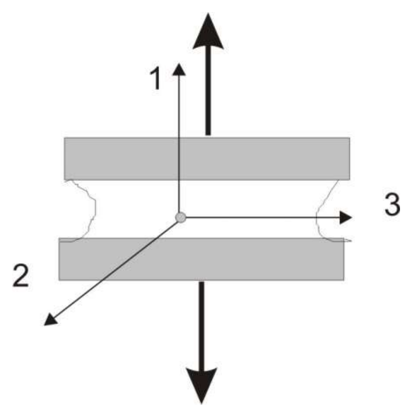
Једносмерна екстензија

$$T_1 \neq 0, \;\; T_2 = T_3 = 0, \;\;\; \alpha_2 = \alpha_3 = 1/\sqrt{\alpha_1}$$

$$T_1 = 2\left(\alpha_1^2 - \frac{1}{\alpha_1}\right)\left(\frac{\partial W}{\partial I_C} + \frac{1}{\alpha_1}\frac{\partial W}{\partial II_C}\right)$$

Тетиве, лигаменти, паренхин плућа, мишићи дијафрагме

Чисто смицање



$$T_1 = 2\left(\alpha_1^2 - \frac{1}{\alpha_1}\right)\left(\frac{\partial W}{\partial I_C} + \frac{1}{\alpha_1}\frac{\partial W}{\partial II_C}\right)$$

$$\alpha_2 = 1, \;\; \alpha_3 = 1/\alpha_1,$$

Нелинеарности ткива

- динамички модули зависе од амлитуде осцилација
- не-елиптичне петље хистерезиса
- модули релаксације напона и попустљивост при пузању зависе од величине корака улазног напрезања и улазног напона, респективно
- разлике у моделима релаксације напона током оптерећења и растерећења.

пластични процеси који су фундаментално другачији од вискоеластичних процеса.

Нелинеарна вискоеластичност

- нелинеарни вискоеластични материјали могу се посматрати као модели где су искоришћени опруга- цилиндар модела са опругом и/или цилиндром као нелинеарним елементима: не-хуковска(Hook) опруга и/или не-њутновски цилиндар.

- општији теоријски прилаз у овој области је *квази-линеарна викоеластичност* (Фунг, 1981).

- Нема физичког образложења

квази-линеарна (тј. променљиве се мењају током времена док су вискоеластични коефицијенти у функцији мере деформације) и према томе омогућен је принцип суперпозиције

- за велике деформације, експоненцијална зависност напон-мера деформације резултује хистерезисном петљом облика „банане“ која је у складу са посматраним понашањем

Једначине понашања квази-линеарне вискоеластичности

- Ако је корак издужења примењен на узорак, онда је релаксација напона функција и α и t времена . Претпоставља се да је функција релаксације у облику

$$K(\alpha,t)=T^{(e)}(\alpha)G^{'}(t)$$

- $G^{'}(t)$ *редуковану функцију релаксације*, а $T^{(e)}$ је *еластични одговор*. $G'(t)=G(t)/G(t_0)$

$$\delta T=G^{'}(t-\tau)\frac{\partial T^{(e)}\left[\alpha(\tau)\right]}{\partial\alpha}\delta\alpha(\tau),\qquad \forall t>\tau$$

$$T(t)=\int_{-\infty}^{t}G^{'}(t-\tau)\frac{\partial T^{(e)}\left[\alpha(\tau)\right]}{\partial\alpha}\frac{\partial\alpha(\tau)}{\partial\tau}d\tau$$

$$T(t)=\int_{-\infty}^{t}G^{'}(t-\tau)\dot{T}^{(e)}\left[\alpha(\tau)\right]d\tau$$

Једначине понашања квази-линеарне вискоеластичности

- конститутивна једначина квази-линеарног вискоеластичног понашања

$$T(t)=\int_{-\infty}^{t} G(t-\tau)\frac{d\gamma}{d\tau}d\tau$$

- и не постоји никаква претходна историја напрезања узорка

$G^{'}(t)$ $T^{(e)}$

$$T(t)=T^{(e)}(1)G^{'}(t)+\int_{0}^{t} G^{'}(t-\tau)\dot{T}^{(e)}\left[\alpha(\tau)\right]d\tau$$

$$T(t)=T^{(e)}\left[\alpha(t)\right]+\int_{0}^{t} T^{(e)}\left[\alpha(t-\tau)\right]\dot{G}^{'}(\tau)d\tau$$

$\dot{G}^{'}<0$

Тренутни напон одговара стакластом стању (тј. адијабатска еластичност).

$$T^{(e)}\left[\alpha(t)\right]=\int_{-\infty}^{t} J^{'}(t-\tau)\dot{T}(\tau)d\tau$$

Једначине понашања квази-линеарне вискоеластичности

$$T(t) = \int_{-\infty}^{t} G(t-\tau)\frac{d\gamma}{d\tau}d\tau$$

- и не постоји никаква претходна историја напрезања узорка

$G^{'}(t)$ $T^{(e)}$

$$T(t) = T^{(e)}(1)G^{'}(t) + \int_{0}^{t} G^{'}(t-\tau)\dot{T}^{(e)}\left[\alpha(\tau)\right]d\tau$$

$$T(t) = T^{(e)}\left[\alpha(t)\right] + \int_{0}^{t} T^{(e)}\left[\alpha(t-\tau)\right]\dot{G}^{'}(\tau)d\tau$$

$\dot{G}^{'} < 0$

Тренутни напон одговара стакластом стању (тј. адијабатска еластичност).

$$T^{(e)}\left[\alpha(t)\right] = \int_{-\infty}^{t} J^{'}(t-\tau)\dot{T}(\tau)d\tau$$

Једначине понашања квази-линеарне вискоеластичности

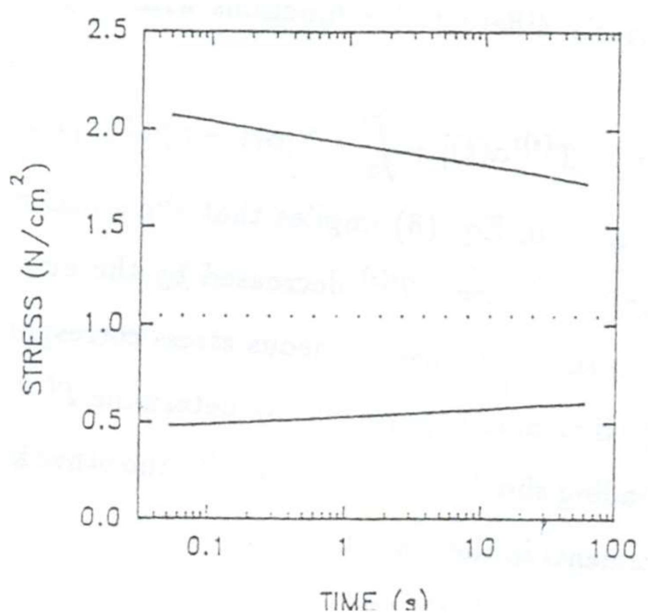
- Једначине за осцилаторно понашање

$$K^{*}(\alpha,\omega)=T^{(e)}(\alpha)G'^{*}(\omega)$$

$$\eta=\frac{G_2^{'}}{G_1^{'}}$$

Динамичко понашање дијафрагме

Релаксација напона (горња пуна линија) и опоравак напона (доња пуна линија) вс. време изоловане релаксиране дијафрагме пацова.



Навајас ет ал. (1992) испитивао је динамичко понашање изоловане релаксиране

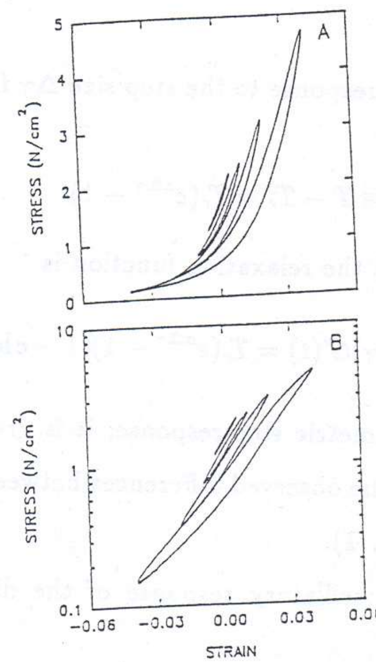
дијафрагме пацова

- Разлика између криве релаксације напона и криве опоравка напона показује нелинеарно понашање
- петље имају „банана“ облик, такође за веће амплитуде.

$$G(t) = A - B\log t$$

$$G'(t) = 1 - c\log t,\quad G'(1) = 1,\quad c = B/A$$

$$\ln T = \ln T_r + a\gamma$$



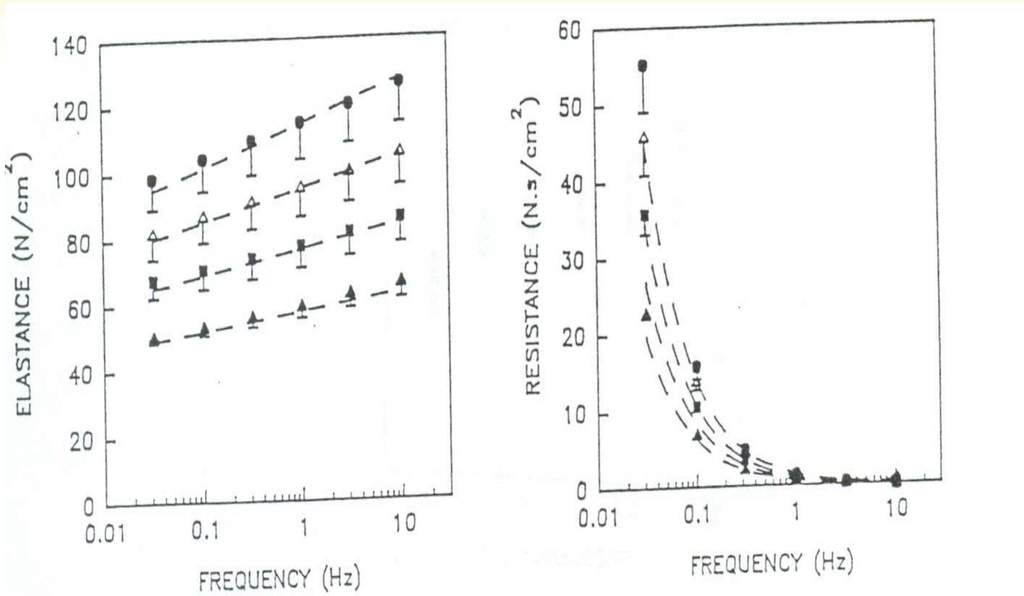
a функција амплитуде деформације пошто мерења указују да нагиб кривих опада са повећањем ,

$$T = T_r e^{a\gamma}$$

$$T^{(e)}\left(\Delta\gamma\right)=T-T_r=T_r\left(e^{a\Delta\gamma}-1\right)$$

$$K(\Delta\gamma)=T^{(e)}\left(\Delta\gamma\right)G'\left(t\right)=T_r\left(e^{a\gamma}-1\right)\left(1-c\log t\right)$$

већа је за $\Delta\gamma>0$ него за $\Delta\gamma<0$ што је у сагласности са уоченом разликом између одговора релаксације напона и адаптације напона



Осцилаторни одговор мерен различитим врх-врх амплитудама мера деформације: 0,005 (•), 0,01 (Δ), 0,02 (■) и 0,04 (▲); испрекидане линије су модели симулација.

$$K^*(\Delta\gamma,\omega) = T_r\left(e^{a\gamma} - 1\right)\left(1 + 0.25c + c\log\omega + i\frac{\pi c}{4.6}\right)$$

$$\left[-\Delta\gamma, +\Delta\gamma\right]$$

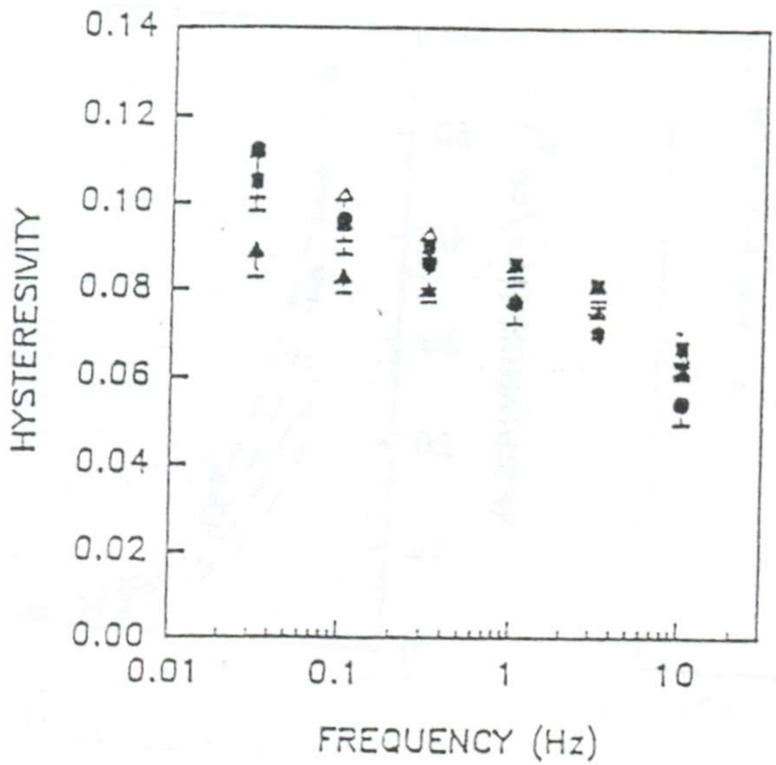
$$G^* = \frac{1}{2}\frac{K^*(\Delta\gamma,\omega) - K^*(-\Delta\gamma,\omega)}{\Delta\gamma} = T_r\frac{\sinh a\Delta\gamma}{\Delta\gamma}\left(1 + 0.25c + c\log\omega + i\frac{\pi c}{4.6}\right)$$

$$E_{dyn} = T_r\frac{\sinh a\Delta\gamma}{\Delta\gamma}\left(1 + 0.25c + c\log\omega\right)$$

$$R_{tis} = T_r\frac{\sinh a\Delta\gamma}{\Delta\gamma}\frac{\pi c}{4.6\omega}$$

$$R_{tis} = G_2 / \omega$$

На основу слике се може закључити да E_{dyn} R_{tis} и опадају са порастом амплитуде деформације.



Коефицијент хистерезибилности утицај амплитуде

Мера деформације: 0,005 (●), 0,01 (Δ), 0,02 (■) и 0,04 (▲)