



Ткива са нелинеарним динамичким понашањем

Нелинеарна еластичност

Изотропија

Каже се да је материјал изотропан ако поседује исте особине у свим правцима. Прецизније, стање напона је исто за било које две референтне конфигурације које се међусобно разликују за круту ротацију (слика 4.5).

Може се показати да за изотропне еластичне материјале, општа конститутивна једначина може се свести на једноставан облик

$$\mathbf{T} = \chi_0 \mathbf{1} + \chi_1 \mathbf{C} + \chi_2 \mathbf{C}^2. \quad (4.32)$$

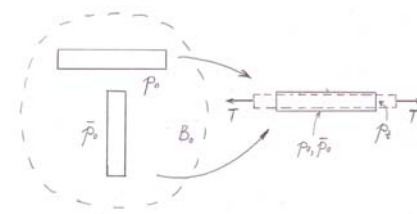
Овде су χ_0 , χ_1 и χ_2 коефицијенти понашања материјала. Ово су скаларне функције три основне инваријанте од \mathbf{C}^* дате као

$$I_c \equiv \text{tr} \mathbf{C}, \quad II_c \equiv \frac{1}{2} [(\text{tr} \mathbf{C})^2 - \text{tr} \mathbf{C}^2], \quad III_c \equiv \det \mathbf{C}. \quad (4.33)$$

Ове функције се зову инваријанте, јер не зависе од избора координатног система. Пошто је

$$I_c = \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2, \quad II_c = \alpha_1^2 \alpha_2^2 + \alpha_2^2 \alpha_3^2 + \alpha_3^2 \alpha_1^2 \text{ и} \\ III_c = \alpha_1^2 \alpha_2^2 \alpha_3^2, \quad (4.34)$$

тада једначина (4.32) може бити написана као



где су v скаларне функције главних истезања $\{\alpha\}$. Општа конститутивна једначина за изотропна вискоеластична чврста тела је много комплекснија него једначина (4.30) и поред три члана мере деформација, такође укључује и члан који представља меру брзине деформације. На пример, изотропни вискоеластични материјал има 13 материјалних коефицијента који су скаларне функције главних инваријанти тензора напона.

4.2 Еластичност

Еластични материјали су конзервативни материјали, тј. не дисипирају енергију. То није случај код биолошких ткива чија је карактеристика често значајано „губљење енергије“, што се огледа кроз великог (напон-мере деформације) хистерезиса или феномена типа релаксације напона, фазе заостајања између улазних и излазних сигнала у физиолошким системима, итд. Ипак, у многим случајевима теорија еластичности је корисна у циљу добијања квалитативних, као и квантитативних предвиђања која се тичу понашања датог физиолошког система у статичким или квази-статичким условима. Генерално, ова теорија није широко коришћена у проучавању динамичких понашања физиолошких система.

Линеарна теорија еластичности -примена на биолошка ткива

Ова теорија се бави се случајевима где су деформације мале и где се мале деформације додају великим деформацијама (*инкрементална еластичност*). Теорија инкременталне еластичности је веома значајна у биореологији из следећег разлога. За разлику од многих инжењерских материјала чије је природно стање без напона, многа биолошка ткива су природно пренапрегнута (тј. плућа су напуњена, кожа је истегнута, крвни судови су под притиском, итд.). Ово су неке од разлика између биолошких и осталих материјала. Без обзира на то да ли су у питању стања без напона или пренапрегнута природна стања, конститутивне једначине у линеарној еластичности дате су линеарном везом напон-мера деформације, познатом као Хooke-ов закон

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}_0 + \mathbb{C}\mathbf{e}, \quad (4.36)$$

где је \mathbf{T}_0 напон, а \mathbb{C} коефицијент еластичности (Trusdell & Noll, 1965). Коефицијент еластичности је *тензор четвртог реда* (C_{ijkl}). Код материјала чије је природно стање је стање без напона $\mathbf{T}_0 \equiv 0$, $\mathbb{C} = const.$ Другачије речено, \mathbb{C} зависи од \mathbf{T}_0 . Ово је очекивано будући да што је преднапрезање веће, материјал је крући.

Ако је материјал изотропан и у изотропном стању преднапрегнут, на пример, $\mathbf{T}_0 = -p_0 \mathbf{1}$ где је p_0 хидростатички притисак, онда једначина (4.36) може бити написана као

$$\mathbf{T} = -p_0 \mathbf{1} + \lambda \text{tr} \mathbf{e} \mathbf{1} + 2\mu \mathbf{e}, \quad (4.37)$$

где су λ и μ познате као *привидни (apparent) Ламе-ови коефицијенти* еластичности (Ламе-ове константе). Негативни знак преднапрезања представља конвенцију пошто притисак који делује на материјално тело има тенденцију да га компримује. Назив „привидан“ произилази из чињенице да оба коефицијента зависе од p_0 . Ако је $p_0 = 0$, онда су привидни коефицијенти константни. Треба запамтити да ако преднапрезање није изотропно, онда конститутивна једначина не може бити написана у облику једначине (4.37), не везано да ли је природно стање материјала изотропно. Према томе, једначина (4.37) захтева природно изотропију и изотропско преднапрезање. Такво стање, услов је, на пример, присутан у случају плућа.

Једначина (4.37) може бити изведена из, или једначине (4.36) претпостављајући изотропију, или из више уопштеног израза за конститутивну једначину изотропних материјала, једначине (4.32) и (4.35).

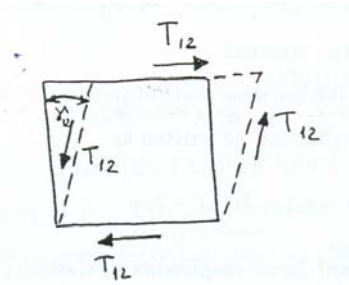
Да би се разумело која је улога горње једначине, при разумевању механичког понашања биолошких ткива, треба размотрити физичко значење Ламе-ових коефицијената.

Физичке интерпретације коефицијената еластичности

Претпоставља се да је у питању деформација при којој се запремина не мења (*isovolumic*) и рефлектује се само променом облика материјалног тела. Онда је $\text{tr} \mathbf{e} = 0$ и одатле једначина (4.37) постаје

$$\mathbf{T} = -p_0 \mathbf{1} + 2\mu \mathbf{e}. \quad (4.38)$$

Таква деформација се односи на деформацију смицања и



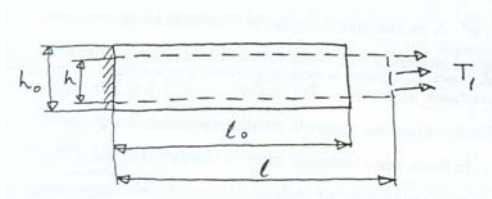
Слика 4.6

одговарајућег напона и мере деформације, као напон смицања и мере деформације. Коefицијент μ познат је као *модуо смицања*. Одражава способност материјала да се одупре промени облика при којој долази до промене запремине. Детаљније објашњење је дато слици 4.6, где је напон смицања T_{12} деформисао коцку у ромбоидно чврсто тело у облику коцке исте запремине. Угао $\gamma_{12}/2$ страна ромбоида представља угао клизања. За мала клизања он је једнак линеарној деформацији клизања e_{12} . За линеарни изотропни еластични материјал према Хуковом закону T_{12} линеарно зависи од e_{12} где фактор пропорционалности μ представља модул смицања. Деформација која је приказана на слици 4.6 је позната као „једноставно смицање“. Сада претпоставимо да је деформација таква да облик остаје исти, и у том случају су деформације једнаке тј. $e_1 = e_2 = e_3 = e$. На тај начин једначина (4.37) постаје

$$\mathbf{T} = [-p_0 + (3\lambda + 2\mu)e] \mathbf{1} \quad (4.39)$$

Како је промена запремине $\Delta V/V = tre = 3e$ једначина (4.39) је сада

$$\mathbf{T} = \left[-p_0 + \kappa \frac{\Delta V}{V} \right] \mathbf{1}, \quad (4.40)$$



Слика 4.7

и $\kappa = \lambda + 2\mu/3$ где је са κ означен запремински модул који представља способност материјала да се опире униформној промени запремине. Ако је материјал нестишљив онда је $\kappa \rightarrow \infty$.

У инжењерској литератури користи се друга два коefицијента у објашњењу могућности одговора материјала на мале поремећаје. То су Јунгов модуо еластичности E и Поасонов коefицијент ν^* . У случају једноосног напрезања сл.4.7, има се:

$$T_1 = Ee_1 - p_0, \quad T_2 = T_3 = -p_0, \quad (4.41)$$

$$\nu = -e_2/e_1 = -e_3/e_1 \quad (4.42)$$

Међутим, пошто су биолошка ткива неправилних облика и постоје неаксијална напрезања то није увек корисно користити претходне инжењерске коefицијенте тј. не представљају корисне индикаторе еластичних особина биолошких ткива као у случају класичних инжењерских материјала.

operator	primjeri	zapis	raspis
grad $\nabla \cdot$	grad f	∇f	$\frac{\partial f}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{k}$ (vektor)
	grad \vec{v}	$\nabla \vec{v}$	$\begin{bmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{\partial v_x}{\partial y} & \frac{\partial v_x}{\partial z} \\ \frac{\partial v_y}{\partial x} & \frac{\partial v_y}{\partial y} & \frac{\partial v_y}{\partial z} \\ \frac{\partial v_z}{\partial x} & \frac{\partial v_z}{\partial y} & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{bmatrix}$ tenzor
	grad \mathbf{T}	$\nabla \mathbf{T}$	tenzor trećeg reda
div $\nabla \cdot$	div \vec{v}	$\nabla \cdot \vec{v}$	$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$ (skalar)
	div \mathbf{T}	$\nabla \cdot \mathbf{T}$	$\begin{pmatrix} \frac{\partial T_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial T_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial T_{zx}}{\partial z} \\ \frac{\partial T_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial T_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial T_{zy}}{\partial z} \\ \frac{\partial T_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial T_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial T_{zz}}{\partial z} \end{pmatrix} \vec{i} +$ $\begin{pmatrix} \frac{\partial T_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial T_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial T_{zy}}{\partial z} \\ \frac{\partial T_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial T_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial T_{zz}}{\partial z} \end{pmatrix} \vec{j} +$ $\begin{pmatrix} \frac{\partial T_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial T_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial T_{zz}}{\partial z} \end{pmatrix} \vec{k}$ (vektor)
rot $\nabla \times$	rot \vec{v}	$\nabla \times \vec{v}$	$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \\ \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \\ \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \end{pmatrix}$ (vektor)

Слика 4.8

* може имати и друге ознаке види лекцију 2, μ

Ткива са нелинеарним динамичким понашањем

Следеће нелинеарности су посматране при динамичком понашању различитих ткива:

1. динамички модули зависе од амлитуде осцилација
2. не-елиптичне петље хистерезиса
3. модули релаксације напона и попустљивост при пузању зависе од величине корака улазног напрезања и улазног напона, респективно
4. разлике у моделима релаксације напона током оптерећења и растерећења.

Ова посматрања се не могу објаснити са појмовима линеарне вискоеластичности. Уобичајено се користе два приступа да би се објашњавале ове нелинеарности, *нелинеарна вискоеластичност* и *вископластичност*. Раније претпоставке представљају резултат посматраног понашања при еластичним нелинеарностима и/или вискозним нелинеарностима код ткива. Касније претпоставке се заснивају на томе да нелинеарности нема ни током вискозних ни током еластичних процеса и да се дешавају првенствено пластични процеси који су фундаментално другачији од вискоеластичних процеса.

Нелинеарна вискоеластичност

Концептуално, нелинеарни вискоеластични материјали могу се посматрати у терминима опруга-цилиндар модела са опругом и/или цилиндром као нелинеарним елементима: не-хуковска (Hook) опруга и/или не-Њутновски цилиндар. Са одговарајућим избором нелинеарних елемената може се симулирати нелинеарно понашање које испољавају различита ткива. Такви модели су веома специфични и могуће их је применити на ограничен број ткива или на ограничен број историје оптерећења. Много општији теоријски прилаз у овој области је *квази-линеарна вискоеластичност* (Фунг, 1981). Ова теорија комбинује линеарну вискоеластичност са нелинеарном еластичношћу. Она раздваја линеарно вискоеластично понашање од нелинеарног еластичног понашања. Нема физичког образложења за ово и првобитно је урађено за математичке интересе. Одговарајућа диференцијална једначина кретања по којој се понаша квази-линеарни вискоеластични систем је такође квази-линеарна (тј. променљиве се мењају током времена док су вискоеластични коефицијенти у функцији мере деформације) и према томе омогућен је принцип суперпозиције као и коришћење интегралних трансформација. Ово су пожељни аспекти ове теорије. Са друге стране, нелинеарности су преузете од еластичности и према томе не одражавају динамичке феномене. Шта више, понашање еластичних ткива показује експоненцијалне напон-мера деформације везе које указују на то да ће се динамички модули понашати слично, тј. повећаће се са повећањем мере деформација, супротно посматраном смањењу динамичких модула са смањењем амплитуде. Ово је озбиљна слабост квази-линеарног приступа у студијама динамичког

понашања ткива. Ипак, за велике деформације, експоненцијална зависност напон-мера деформације резултује хистерезисном петљом облика „банане“ која је у складу са посматраним понашањем.

И поред горе представљених недостатака, теорија има сврху у биореологији. *Конкретно, корисна је за велике деформације где су статичке нелинеарности доминантне у односу на динамичке нелинеарности.*

Једначине понашања квази-линеарне вискоеластичности

Посматра се цилиндрични узорак изложен напрезању на истезање. Ако је корак издужења α примењен на узорак, онда је релаксација напона функција и α и времена t . Претпоставља се да је функција релаксације $K(\alpha, t)$ у облику

$$K(\alpha, t) = T^{(e)}(\alpha)G'(t) \quad (1)$$

где је $G'(t)$ недимензионална величина која се односи на *редуковану функцију релаксације*, а $T^{(e)}$ је *еластични одговор*. Редукована функција релаксације једнака је релаксационим модулима нормализованих по јединичној вредности (време $t = t_0$), $G'(t) = G(t)/G(t_0)$ и одатле је $G'(t_0) = 1$. Тада се претпоставља да је одговор напона на мало одступање у истезању $\delta\alpha(\tau)$, у тренутку времена τ је

$$\delta T = G'(t - \tau) \frac{\partial T^{(e)}[\alpha(\tau)]}{\partial \alpha} \delta\alpha(\tau), \quad \forall t > \tau. \quad (2)$$

Претпостављајући да се примењује принцип суперпозиције, следи да је

$$T(t) = \int_{-\infty}^t G'(t - \tau) \frac{\partial T^{(e)}[\alpha(\tau)]}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha(\tau)}{\partial \tau} d\tau. \quad (3)$$

Поново пишући једначину (3) као

$$T(t) = \int_{-\infty}^t G'(t - \tau) \dot{T}^{(e)}[\alpha(\tau)] d\tau, \quad (4)$$

добива се конститутивна једначина квази-линеарног вискоеластичног понашања слична једначини

$$T(t) = \int_{-\infty}^t G(t - \tau) \frac{d\gamma}{d\tau} d\tau \quad (6.34, \text{ лекција бр. 6}),$$

где се претпоставља да $T^{(e)}$ игра улогу мере деформације. Треба приметити да ако је $T^{(e)}(\alpha)$ линеарна веза, једначина (3) постаје математички идентична једначини (6.34, лек. бр.6). Ако кретање почне у тренутку времена $m = 0$ и не постоји никаква претходна историја напрезања узорка, онда једначина (4) постаје

$$T(t) = T^{(e)}(1)G'(t) + \int_0^t G'(t - \tau) \dot{T}^{(e)}[\alpha(\tau)] d\tau. \quad (5)$$

Ако су $T^{(e)}$ и G' непрекидне диференцијалне функције у односу на m , тада је једначина (5) једнака

$$T(t) = T^{(e)}[\alpha(t)] + \int_0^t T^{(e)}[\alpha(t - \tau)] \dot{G}'(\tau) d\tau. \quad (6)$$

Узимајући у обзир да је $\dot{G}' < 0$, једначина (6) повлачи да је напон по времену m једнак тренутном еластичном (нелинеарном)

напону $T^{(e)}$ који је смањен количински у зависности од претходне историје (интегрални облик). Тренутни напон одговара стакластом стању (тј. адијабатска еластичност). Према томе, треба експериментално одредити $T^{(e)}(\alpha)$ мерењем довољно великом брзином оптерећења. Са друге стране, з експериментално одређивање $G'(t)$ треба спровести мерења у прелазној вискоеластичној области. Ово је још једна неусаглашеност ове теорије. Инверзни облик једначине (4) води ка једначини понашања пузања

$$T^{(e)}[\alpha(t)] = \int_{-\infty}^t J'(t-\tau) \dot{T}(\tau) d\tau, \quad (7)$$

где је $J'(t)$ редукована функција пузања, $J'(t-\tau) \equiv J(t)/J(0)$. Једначине за осцилаторно понашање могу бити добијене коришћењем Лапласових трансформација једначина релаксације напона, тј.

$$K^*(\alpha, \omega) = T^{(e)}(\alpha) G^*(\omega), \quad (8)$$

где је G^* Лапласова трансформација од $G'(t)$. За добијање комплексних модула треба поделити једначину (2) са амплитудом осцилација. Треба приметити да у овом случају, коефицијент хистерезности η не зависи од α . Потпуно је одређен вискоелатичним одговором,

$$\eta = \frac{G_2'}{G_1'}, \quad (9)$$

где су G_1' и G_2' реални и имагинарни делови од G^* , респективно.

Динамичко понашање дијафрагме

Навајас ет ал. (1992) испитивао је динамичко понашање изоловане релаксирани дијафрагме пацова. Преднапрегли су дијафрагму жељеним напонам T_r и мерили релаксацију напона и осцилаторне одговоре. Нашли су да се напон релаксира скоро линеарно са $\log t$ (слика 8.1). Разлика између криве релаксације напона и криве опоравка напона показује нелинеарно понашање. Хистерезисне петље напон-мера деформације дате су на слици 8.2а. Ове петље имају „банана“ облик, такође за веће амплитуде. Представљањем логаритма за напон – мера деформације, може се видети да петље постају скоро „линеарне“ (слика 8.2б). На бази горњих опажања, аутори су формулисали квази линеарно понашање на следећи начин:

$$G(t) = A - B \log t \quad (10)$$

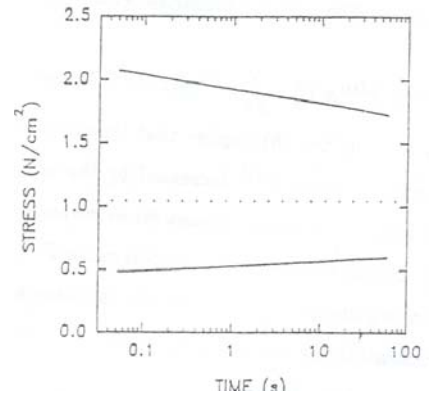
где су А и В константе које су одређене фитовањем криве (10) у односу на податке дате сл. 8.1. Редукована функција релаксације напона је

$$G'(t) = 1 - c \log t, \quad G'(1) = 1, \quad c = B/A \quad (11)$$

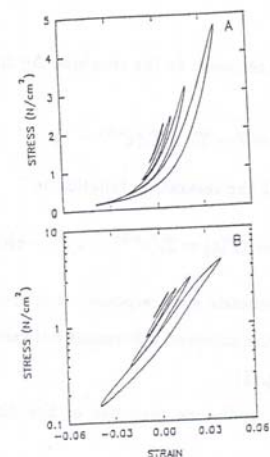
Зависност напона од деформације (види сл. 8.2.б) је облика

$$\ln T = \ln T_r + a\gamma, \quad (12)$$

где је a функција амплитуде деформације $\Delta\gamma$ пошто мерења указују да нагиб кривих опада са повећањем $\Delta\gamma$,



Слика 8.1 Релаксација напона (горња пуна линија) и опоравак напона (доња пуна линија) вс. време изоловане релаксирани дијафрагме пацова.



Слика 8.2

сл.8.2.б.Вредност a за дато $\Delta\gamma$, се одређује такође фитовањем претходног израза на основу кривих датих на сл.8.2.б. На основу (12) следи

$$T = T_r e^{a\gamma}, \quad (13)$$

На основу које се може одредити еластични одговор на јединичну промену деформације $\Delta\gamma$ из напонског стања T_r :

$$T^{(e)}(\Delta\gamma) = T - T_r = T_r (e^{a\Delta\gamma} - 1) \quad (14)$$

Имајући у виду јед. (1),(11),(14) функција релаксације је облика

$$K(\Delta\gamma) = T^{(e)}(\Delta\gamma)G'(t) = T_r (e^{a\Delta\gamma} - 1)(1 - c \log t) \quad (15)$$

Уочава се да $K(\Delta\gamma, t)$ имплицира асиметрични одговор на јединичну промену улаза, већа је за $\Delta\gamma > 0$ него за $\Delta\gamma < 0$ што је у сагласности са уоченом разликом између одговора релаксације напона и адаптације напона, сл.8.1. У циљу добијања осцилаторног одговора дијафрагме, користи се Лапласова трансформација претходног израза

$$K^*(\Delta\gamma, \omega) = T_r (e^{a\Delta\gamma} - 1) \left(1 + 0.25c + c \log \omega + i \frac{\pi c}{4.6} \right) \quad (16)$$

За осцилације око T_r са опсегом $[-\Delta\gamma, +\Delta\gamma]$ комплексни модули су

$$G^* = \frac{1}{2} \frac{K^*(\Delta\gamma, \omega) - K^*(-\Delta\gamma, \omega)}{\Delta\gamma} = T_r \frac{\sinh a\Delta\gamma}{\Delta\gamma} \left(1 + 0.25c + c \log \omega + i \frac{\pi c}{4.6} \right) \quad (17)$$

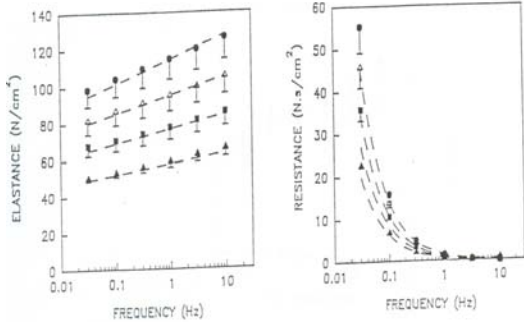
Тако да се добија динамичка еластичност $E_{dyn} = G_1$ и отпорност ткива $R_{tis} = G_2 / \omega$ су

$$E_{dyn} = T_r \frac{\sinh a\Delta\gamma}{\Delta\gamma} (1 + 0.25c + c \log \omega) \quad (18)$$

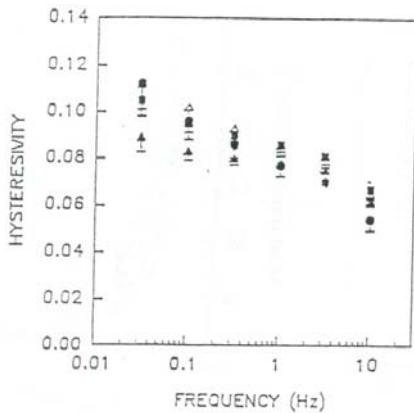
и

$$R_{tis} = T_r \frac{\sinh a\Delta\gamma}{\Delta\gamma} \frac{\pi c}{4.6\omega} \quad (19)$$

Према претходним релацијама E_{dyn} повећава се приближно линеарно са $\log \omega$ и R_{tis} опада хиперболично са ω . Ово понашање је конзистентно са опаženим понашањем дијафрагминих тракастих исечака, сл.(8.3). На основу слике се може закључити да E_{dyn} и R_{tis} опадају са порастом амплитуде деформације. С друге стране, израз $\sinh a\Delta\gamma / \Delta\gamma$ треба порастати са повећањем $\Delta\gamma$ осим ако a има довољно јаку негативну зависност од $\Delta\gamma$ што обезбеђује E_{dyn} и R_{tis} смањивање E_{dyn} и R_{tis} са повећањем $\Delta\gamma$. Оваква зависност a од $\Delta\gamma$ нужно није вискоеластична у природи и други описи као што је пластичност би био прикладнији. Ово сугерише да амплитудна зависност E_{dyn} и R_{tis} која је опажена у дијафрагми је вероватно одређена пластичношћу ткива.



Слика 8.3 Осцилаторни одговор мерен различитим врх-врх амплитудама мера деформације: 0,005 (●), 0,01 (Δ), 0,02 (■) и 0,04 (▲); испрекидане линије су модели симулација.



Слика 8.4 Релаксација напона (горња пуна линија) и опоравак напона (доња пуна линија) вс. време изоловане релаксиране дијафрагме пацова.