

Obične diferencijalne jednačine 1. reda

Ivan D. Arandelović

12. avgust 2025.

Neka su $I, J_1, J_2 \subseteq \mathbb{R}$ proizvoljni neprazni inter-
vali. Jednačina oblika

$$F(x, y, y') = 0, \quad y = y(x), \quad y' = y'(x), \quad (1)$$

gde je:

- $F : I \times J_1 \times J_2 \rightarrow \mathbb{R}$ zadata funkcija (izraz) tri
argumenta;

- $x \in I$ nezavisna promenljiva;

- $y = y(x) : I \rightarrow J_1$ nepoznata diferencijabilna
funkcija argumenta x ;

- $y' = y'(x) = \frac{dy}{dx} : I \rightarrow J_2$ izvod nepoznate
funkcije y po argumentu x ,

naziva se obična diferencijalna jednačina prvog
reda.

Nadalje ćemo (1) zapisivati

$$F(x, y, y') = 0, \quad (2)$$

podrazumevajući da je

$$y = y(x) \text{ i } y' = y'(x) = \frac{dy}{dx}.$$

Koristićemo **diferencijalna jednačina** umesto *obična diferencijalna jednačina prvog reda*, zato što druge vrste diferencijalnih jednačina neće moći razmatrati. Postupak određivanja nepoznate funkcije iz date diferencijalne jednačine naziva se rešavanje te jednačine ili integraljenje te jednačine. Rešenje (koristi se i termin integral) diferencijalne jednačine je proizvoljna diferencijabilna funkcija y koja identički zadovoljava jednačinu (1). Grafik rešenja diferencijalne jednačine naziva se integralna kriva.

Opšte rešenje diferencijalne jednačine

Opšte rešenje diferencijalne jednačine (1) se opisuje algebarskom vezom između x i y u kojoj se ne javljaju izvodi, i može se zapisati na sledeće načine:

1. $y = g(x, C)$, odnosno rešenje u eksplicitnom obliku;
2. $G(x, y, C) = 0$, odnosno rešenje u implicitnom obliku;
3. $x = x(t, C)$, $y = y(t, C)$, odnosno rešenje u parametarskom obliku.

Na koji god način da se dođe do opšteg rešenja jednačine (2) (neki od gore navedena tri oblika), konačan zapis istog će sadržati i jednu konstantu C .

Zapis diferencijalne jednačine (2) u eksplicitnom obliku

Ako je u zapisu (2) moguće eksplicitno izraziti y' preko x i y , tj. ako postoji funkcija $f : I \times J_1 \rightarrow J_2$ takva da se uz uslove iz definicije veza (2) može zapisati u obliku

$$y' = f(x, y) \quad (3)$$

onda se za izraz (3) kaže da je zapis diferencijalne jednačine (2) u eksplicitnom obliku.

Zapis diferencijalne jednačine (2) u Košijevom obliku

Zapis diferencijalne jednačine u eksplicitnom obliku je ekvivalentan sa zapisom u takozvanom Košijevom obliku:

$$A(x, y)dx + B(x, y)dy = 0. \quad (4)$$

Naime, ako u (3) zamenimo $y' = \frac{dy}{dx}$, dobijamo $dy = f(x, y) dx$ (odnosno $f(x, y) dx - dy = 0$), dok iz (4) direktno sledi $\frac{dy}{dx} = -\frac{A(x, y)}{B(x, y)}$, što u stvari predstavlja oblik (3) sa $f(x, y) = -\frac{A(x, y)}{B(x, y)}$.

Partikularno (Košijevo) rešenje

Partikularno rešenje jednačine (2) je ono koje se može dobiti od opšteg za neku konkretnu vrednost odgovarajuće konstante C .

Singularno rešenje - implicitni zapis

Kažemo da funkcija φ (nad odgovarajućim domenom) definiše singularno rešenje diferencijalne jednačine (2) (zapisano u implicitnom obliku) ako iz

$$\varphi(x, y) = 0, \quad (5)$$

sledi $F(x, y, y') = 0$ za svako $x \in I$, pri čemu se to rešenje ne može dobiti iz opšteg rešenja ni za jednu vrednost $C \in \mathbb{R}$, niti kada se u opštem rešenju pusti da $C \rightarrow \infty$. U suprotnom, odnosno ukoliko postoji konkretna vrednost C_0 konstante C takva da uslov (5) sledi iz opšteg rešenja za $C = C_0$, ili kada $C \rightarrow \infty$, odgovarajuće rešenje se naziva partikularnim rešenjem jednačine (2).

Singularno rešenje - eksplicitni zapis

Kažemo da funkcija ψ (nad odgovarajućim domenom) definiše singularno rešenje diferencijalne jednačine (2) (zapisano u eksplicitnom obliku) ako iz

$$y = \psi(x), \quad (6)$$

sledi $F(x, y, y') = 0$ za svako $x \in I$, pri čemu se to rešenje ne može dobiti iz opšteg rešenja ni za jednu vrednost $C \in \mathbb{R}$, niti kada se u opštem rešenju pusti da $C \rightarrow \infty$. U suprotnom, odnosno ukoliko postoji konkretna vrednost C_0 konstante C takva da uslov (6) sledi iz opšteg rešenja za $C = C_0$, ili kada $C \rightarrow \infty$, odgovarajuće rešenje se naziva partikularnim rešenjem jednačine (2).

Primer. Neposredno se proverava da

$$y = \sin(x + C)$$

jeste opšte rešenje diferencijalne jednačine

$$(y')^2 + y^2 = 1, \quad (7)$$

dok su $y = 1$ (za sve $x \in \mathbb{R}$) i $y = -1$ (za sve $x \in \mathbb{R}$) njena singularna rešenja. Naime, ukoliko je $y(x) = \sin(x + C)$, onda je $y'(x) = \cos(x + C)$ i zaista za svako $x \in \mathbb{R}$ (u ovom slučaju je ceo skup realnih brojeva domen) važi

$$(y')^2 + y^2 = \cos^2(x + C) + \sin^2(x + C) = 1.$$

Slično, bilo da je $y(x) \equiv 1$ ili $y(x) \equiv -1$, važi $y'(x) = 0$ (izvod konstantne funkcije je uvek jednak 0) i stoga $(y')^2 + y^2 = 1$. Dalje, jasno je da ne postoji konkretna vrednost $C_0 \in \mathbb{R}$ takva da je $y(x) = \sin(x + C_0) = 1$ za svako $x \in \mathbb{R}$. Isto važi i za $y = -1$, tako da se neposredno uveravamo da su oba ova rešenja singularna.

Jedno od partikularnih rešenja je npr. $y = \cos x$ (dobija se od opšteg za $C = \frac{\pi}{2}$).

Diferencijalne jednačine u kojima se ne pojavljuje nepoznata funkcija

Diferencijalna jednačina (3) kod koje se na desnoj strani jednakosti ne pojavljuje nepoznata funkcija y ,

$$y' = f(x),$$

se direktno svodi na $\frac{dy}{dx} = f(x)$, $dy = f(x) dx$, odnosno

$$y = \int f(x) dx$$

nakon integracije.

Diferencijalne jednačine kod kojih se promenljive mogu razdvojiti

Diferencijalna jednačina (3) kod koje se desna strana može razložiti na proizvod funkcije koja zavisi samo od x i funkcije koja zavisi samo od y , odnosno

$$y' = P(x) Q(y), \quad (8)$$

naziva se diferencijalna jednačina kod koje se promenljive mogu razdvojiti. Jednačina (8) može se napisati u obliku

$$\frac{dy}{dx} = P(x) Q(y),$$

odakle sledi

$$\frac{dy}{Q(y)} = P(x) dx.$$

Prema tome, opšte rešenje jednačine (8) dato je formulom

$$\int \frac{dy}{Q(y)} = \int P(x) dx + C, \quad (9)$$

gde je C proizvoljna konstanta.

Prilikom deljenja sa $Q(y)$ implicitno je uvedena pretpostavka $Q(y) \neq 0$. Prema tome opšte rešenje ne sadrži rešenja oblika $y = c$ gde je $Q(c) = 0$, pa su ta rešenja potencijalno singularna rešenja jednačine (8) (jasno je da svako takvo y jeste rešenje date jednačine, jer će, s ozbirom na to da je y konstantna funkcija, važiti $y' = \frac{dy}{dx} = 0$, pa će i (8) neminovno biti ispunjeno).

Homogene diferencijalne jednačine

Diferencijalna jednačina (3), kod koje se desna strana $f(x, y)$ može prikazati kao izraz po $\frac{y}{x}$, odnosno

$$y' = h\left(\frac{y}{x}\right), \quad (10)$$

naziva se homogena diferencijalna jednačina prvog reda.

Ako je h identička funkcija, tj. $h(u) = u$ za sve u , onda jednačina glasi $y' = \frac{y}{x}$ i u njoj su promenljive razdvojene. Pretpostavimo stoga da h nije identička funkcija. Uvedimo smenu

$$y(x) = u(x) \cdot x, \quad (11)$$

gde je u , dakle, nova nepoznata funkcija argumenta x . Nakon što iskoristimo pravilo za izvod proizvoda, jednačina (10) postaje

$$u(x) + xu'(x) = h(u),$$

$$\text{tj. } x \frac{du}{dx} = h(u) - u, \quad (12)$$

$$\text{ili } \frac{du}{h(u) - u} = \frac{dx}{x},$$

a to je jednačina u kojoj su promenljive razdvojene. Posle integraljenja nalazimo opšte rešenje homogene jednačine (10):

$$\ln |x| = \int \frac{du}{h(u) - u} + C, \quad (13)$$

gde je C proizvoljna konstanta.

U ovom slučaju se eventualna singularna rešenja mogu pojaviti za one vrednosti c za koje je $h(c) = c$. Za svako ovakvo c , funkcija $u(x) \equiv c$ jeste rešenje jednačine (12), jer je $u'(x) = 0$ i $h(c) - c = 0$. Na taj način dolazimo do rešenja $\frac{y}{x} = c$, odnosno $y = cx$ polazne diferencijalne jednačine.

Jednačina oblika

$$y' = \frac{y}{x} + g(x) h\left(\frac{y}{x}\right)$$

se smenom (11) svodi na jednačinu

$$xu' = g(x) h(u)$$

u kojoj se promenljive mogu razdvojiti.

Jednačina

$$y' = f\left(\frac{a_{11}x + a_{12}y + b_1}{a_{21}x + a_{22}y + b_2}\right) \quad (14)$$

se može svesti ili na jednačinu u kojoj se promenljive mogu razdvojiti, ili na homogenu jednačinu.

Zaista, ako je $\delta = 0$, gde je

$$\delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},$$

razlikujemo dva slučaja.

Ako je neki od elemenata determinante δ jednak nuli, onda iz $\delta = 0$ sledi da se ili neka od vrsta determinante sastoji od dve nule, odnosno jednačina (14) je oblika

$$y' = g(ax + by + c), \quad (15)$$

ili se neka od kolona determinante sastoji od dve nule, u kom slučaju je jednačina (14) očigledno jednačina u kojoj se promenljive mogu razdvojiti.

Jednačina (15) se smenom

$$z(x) = ax + by + c, \quad z(x) = a + by'$$

svodi na jednačinu u kojoj se promenljive mogu razdvojiti. U drugom slučaju, ako su svi elementi determinante različiti od nule, jednačina se smenom

$$z(x) = a_{11}x + a_{12}y(x)$$

svodi na jednačinu u kojoj se promenljive mogu razdvojiti. Naime, uslov $\delta = 0$ je ekvivalentan sa $\frac{a_{21}}{a_{11}} = \frac{a_{22}}{a_{12}}$ - označimo vrednost ovih količnika sa k .

Tada je

$$a_{21}x + a_{22}y = k(a_{11}x + a_{12}y) = kz$$

i $\frac{dz}{dx} = a_{11} + a_{12}\frac{dy}{dx}$ odnosno

$$z' = a_{11} + a_{12}y' \Rightarrow y' = \frac{z' - a_{11}}{a_{12}}$$

pa se (14) svodi na

$$\begin{aligned} \frac{z' - a_{11}}{a_{12}} &= f\left(\frac{z + b_1}{kz + b_2}\right) \Rightarrow \\ \Rightarrow z' &= a_{12}f\left(\frac{z + b_1}{kz + b_2}\right) + a_{11} = Q(z). \end{aligned}$$

Ako je $\delta \neq 0$, onda se jednačina (14), primenom smene

$$x = u + \alpha, \quad y = v + \beta,$$

gde su α i β rešenja sistema

$$\begin{aligned} a_{11}\alpha + a_{12}\beta + b_1 &= 0, \\ a_{21}\alpha + a_{22}\beta + b_2 &= 0, \end{aligned}$$

svodi na homogenu jednačinu

$$\frac{du}{dv} = f\left(\frac{a_{11}u + a_{12}v}{a_{21}u + a_{22}v}\right) = \quad (16)$$

$$= f\left(\frac{a_{11}\frac{u}{v} + a_{12}}{a_{21}\frac{u}{v} + a_{22}}\right) = h\left(\frac{u}{v}\right). \quad (17)$$

Uopštena homogena jednačina. Diferencijalna jednačina je uopštena homogena ako se smenom $y = x^k z$ svodi na svodi na jednačinu u kojoj se promenljive mogu razdvojiti.

Linearna diferencijalna jednačina

Diferencijalna jednačina

$$y' + p(x)y = q(x), \quad (18)$$

gde su $p(x)$ i $q(x)$ date integrabilne funkcije, naziva se linearna diferencijalna jednačina prvog reda. Opšte rešenje linearne diferencijalne jednačine (18):

$$y = e^{-\int p(x)dx} \left(C + \int q(x) e^{\int p(x)dx} dx \right). \quad (19)$$

Bernulijeva diferencijalna jednačina

Diferencijalna jednačina

$$y' + p(x)y = q(x)y^k \quad (k \in \mathbb{R}), \quad y = y(x) \quad (20)$$

naziva se Bernulijeva diferencijalna jednačina. Ako je $k = 0$, jednačina (20) je linearna, a ako je $k = 1$, u njoj se promenljive mogu razdvojiti. Pretpostavimo da je $k \neq 0$ i $k \neq 1$. Uvedimo smenu $y(x) = (u(x))^m$, gde je u nova nepoznata funkcija argumenta x , a m je konstanta koju treba odrediti. Dobijamo $y' = mu^{m-1}u'$,

te jednačina (20) postaje

$$mu^{m-1}u' + p(x)u^m = q(x)u^{mk},$$

$$\text{to jest, } u' + \frac{1}{m}p(x)u = \frac{1}{m}q(x)u^{mk-m+1}. \quad (21)$$

Izaberimo m tako da bude

$$mk - m + 1 = 0,$$

to jest $m = \frac{1}{1-k}$. Na taj način dobijamo da se Bernulijeva diferencijalna jednačina (20) svodi se pomoću smene

$$y = u^{\frac{1}{1-k}}, \quad \text{odnosno} \quad u = y^{1-k},$$

na linearnu diferencijalnu jednačinu

$$u' + (1 - k) p(x) u = (1 - k) q(x).$$

Rikatijeva diferencijalna jednačina

Diferencijalna jednačina oblika

$$y' = P(x)y^2 + Q(x)y + R(x) \quad (22)$$

to jest diferencijalna jednačina čija je desna strana kvadratna funkcija nepoznate funkcije, naziva se Rikatijeva diferencijalna jednačina. Ako je $P(x) \equiv 0$, jednačina (22) se svodi na lineranu, a ako je $R(x) \equiv 0$ na Bernulijevu diferencijalnu jednačinu.

Rikatijeva jednačina se linearnom transformacijom $y = \alpha(x)z + \beta(x)$, gde su α i β pogodno izabrane funkcije može svesti na kanonski oblik

$$\frac{dz}{dx} = \pm z^2 + R(x). \quad (23)$$

Ako su P, Q i R konstante, onda se Rikatijeva jednačina svodi se na jednačinu u kojoj se promenljive mogu razdvojiti. Ako P, Q i R nisu konstante, onda su rešenja Rikatijeve jednačine elementarne funkcije samo u specijalnim slučajevima.

1) U jednačini oblika

$$y' = \varphi(x)(ay^2 + by + c) \quad (24)$$

mogu se promenljive razdvojiti.

2) Jednačina oblika

$$y' = a \frac{y^2}{x^2} + b \frac{y}{x} + c,$$

gde su a, b i c konstante takve da je $(a^2 + b^2 \neq 0)$ je homogena diferencijalna jednačina prvog reda.

3) Jednačina oblika

$$y' = a \frac{y^2}{x} + \frac{1}{2} \frac{y}{x} + c,$$

gde su $a, i c$ konstante $(a^2 + c^2 \neq 0)$ se smenom

$$y = z\sqrt{x},$$

gde je z nova nepoznata funkcija, svodi na jednačinu (24).

4) Jednačina oblika

$$y' = ay^2 + \frac{b}{x}y + \frac{c}{x^2},$$

gde su a, b i c konstante, je uopštena homogena jednačina (sa $k = -1$) i ona se smenom

$$y = \frac{z}{x}$$

svodi na jednačinu

$$xz' = az^2 + (b + 1)z + c$$

u kojoj se promenljive mogu razdvojiti.

5) Rešenja Rikatijeve jednačine oblika

$$y' + Ay^2 = Bx^m, \quad (25)$$

gde su A i B konstante, su elementarne funkcije u sledećimi slučajevima:

5.1) $m = 0$ jednačina (25) se svodi na jednačinu

$$y' + Ay^2 = B,$$

u kojoj se promenljive mogu razdvojiti.

5.2) $m = -2$ jednačina (25) se svodi na jednačinu

$$y' + Ay^2 = \frac{B}{x^2},$$

koja se smenom $y = \frac{1}{z}$ svodi na homogenu jednačinu.

5.3) Kada je $m = -\frac{4k}{2k \pm 1}$ ceo broj, onda su takođe rešenja jednačine (25) elementarne funkcije.

Ako je funkcija y_1 partikularno rešenje Rikatijeve jednačine, onda se ona smenom

$$y = y_1 + \frac{1}{z}$$

svodi na linearnu diferencijalnu jednačinu prvog reda, a smenom

$$y = y_1 + z$$

na Bernulijevu diferencijalnu jednačinu.