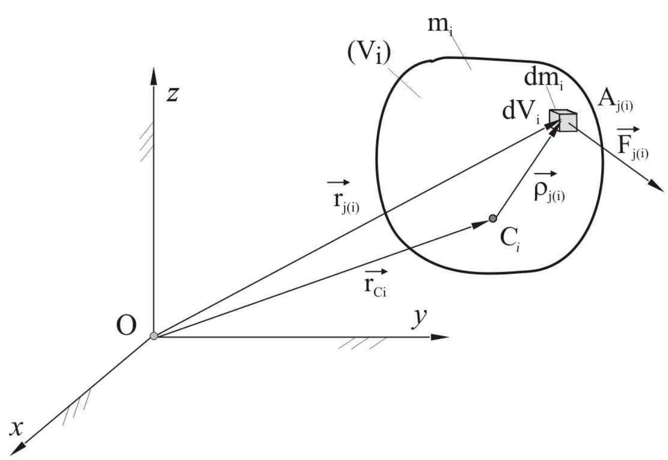
8.2 Generalisane sile robotskog sistema

Razmotrimo sistem sila (7.36) sa napadnim tačkama (7.37), respektivno, koji deluje na segment robotskog sistema u obliku otvorenog kinematičkog lanca bez grananja.

Virtualni rad sile $\vec{F}_{j(i)}$ $(j=1,2,...,l_i)$ određen je izrazom ([7]):

$$\delta A(\vec{F}_{j(i)}) = \vec{F}_{j(i)} \cdot \delta\vec{r}_{j(i)}\,, \tag{8.26}$$

koji, s obzirom na činjenicu da $A_{j(i)} \in (V_i)$, dobija oblik (vidi sl. 8.1)



Slika 8.1

$$\delta A(\vec{F}_{j(i)}) = \vec{F}_{j(i)} \cdot \left(\delta\vec{r}_{C_i} + \delta\vec{\rho}_{j(i)}\right), \tag{8.27}$$

ili

$$\delta A(\vec{F}_{j(i)}) = \vec{F}_{j(i)} \cdot \left(\sum_{\alpha=1}^{n} \vec{T}_{\alpha(i)} \delta q^{\alpha} + \sum_{\alpha=1}^{n} \left(\vec{\Omega}_{\alpha(i)} \times \vec{\rho}_{j(i)} \right) \delta q^{\alpha} \right), \tag{8.28}$$

što se može dovesti na sledeću formu

$$\delta A(\vec{F}_{j(i)}) = \sum_{\alpha=1}^{n} \left(\vec{F}_{j(i)} \cdot \vec{T}_{\alpha(i)} + \vec{M}_{C_i}(\vec{F}_{j(i)}) \cdot \vec{\Omega}_{\alpha(i)} \right) \delta q^{\alpha}, \tag{8.29}$$

gde izraz

$$\vec{M}_{C_i}(\vec{F}_{j(i)}) = \vec{\rho}_{j(i)} \times \vec{F}_{j(i)}, \tag{8.30}$$

predstavlja moment sile $\vec{F}_{j(i)}$ sračunat u odnosu na centar inercije C_i segmenta (V_i). Virtualni rad razmatranog sistema sila (7.36) iznosi

$$\delta A^a = \sum_{j=1}^{l_i} \delta A(\vec{F}_{j(i)}) \,, \tag{8.31}$$

ili

$$\delta A^a = \sum_{\alpha=1}^{n} \left(\left(\sum_{j=1}^{l_i} \vec{F}_{j(i)} \right) \cdot \vec{T}_{\alpha(i)} + \left(\sum_{j=1}^{l_i} \vec{M}_{C_i}(\vec{F}_{j(i)}) \right) \cdot \vec{\Omega}_{\alpha(i)} \right) \delta q^\alpha \,. \tag{8.32}$$

Poslednji izraz može da se napiše i u obliku

$$\delta A^a = \sum_{\alpha=1}^{n} \left(\vec{F}_{R(i)} \cdot \vec{T}_{\alpha(i)} + \vec{M}^a_{C_i R(i)} \cdot \vec{\Omega}_{\alpha(i)} \right) \delta q^\alpha, \tag{8.33}$$

gde izrazi

$$\vec{M}^a_{C_i R(i)} = \sum_{j=1}^{l_i} \vec{M}_{C_i}\left(\vec{F}_{j(i)}\right), \quad \vec{F}_{R(i)} = \sum_{j=1}^{l_i} \vec{F}_{j(i)} \,, \tag{8.34}$$

predstavljaju glavni vektor i glavni moment sistema sila (7.36), sračunate za redukcionu tačku C_i. U slučaju otvorenog kinematičkog lanca bez grananja generalisane koordinate $(q^1, q^2, ..., q^n)$ su nezavisne i iz (8.33) sledi da generalisane sile Q^a_α sistema sila (7.36) koja odgovara nezavisnoj generalisanoj koordinati q^α $(\alpha = 1,2,...,n)$ figurišu u relaciji

$$\delta A^a = \sum_{j=1}^{n} Q^a_\alpha \delta q^\alpha \,, \tag{8.35}$$

gde je δA^a - virtualni rad svih sistema sila (7.36) koje deluju na razmatrani robotski sistem, tj. virtualni rad sistema sila

$$\left(\vec{F}_{1(1)}, \vec{F}_{2(1)}, ..., \vec{F}_{l_1(1)}\right), \left(\vec{F}_{1(2)}, \vec{F}_{2(2)}, ..., \vec{F}_{l_2(2)}\right), ..., \left(\vec{F}_{1(n)}, \vec{F}_{2(n)}, ..., \vec{F}_{l_n(n)}\right). \tag{8.36}$$

Virtualni rad sistema sila (8.36) iznosi (vidi (8.33))

$$\delta A^a = \sum_{i=1}^{n} \delta A^a_i = \sum_{\alpha=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \left(\vec{F}_{R(i)} \cdot \vec{T}_{\alpha(i)} + \vec{M}^a_{C_i R(i)} \cdot \vec{\Omega}_{\alpha(i)} \right) \delta q^\alpha \,, \tag{8.37}$$

odakle sledi

$$Q^a_\alpha = \sum_{i=1}^{n} \left(\vec{F}_{R(i)} \cdot \vec{T}_{\alpha(i)} + \vec{M}^a_{C_i R(i)} \cdot \vec{\Omega}_{\alpha(i)} \right), \ \alpha = 1,2,...,n. \tag{8.38}$$

Ako je sistem sila (7.36) potencijalan, sa potencijalnom energijom

$$E_p = E_p(q^1, q^2, ..., q^n)\,, \tag{8.39}$$

generalisane sile određene su poznatim izrazom ([25])

$$Q_\alpha^a = -\frac{\partial E_p}{\partial q^\alpha}, \quad \alpha = 1,2,...,n\,. \tag{8.40}$$

8.2.1 Generalisane sile od sila teže robotskog sistema

Neka se robotski sistem (RS) u obliku otvorenog kinematičkog lanca bez grananja kreće u polju zemljine teže. Sila teže segmenta (V_i) iznosi $\vec{G}_i$, napadna tačka joj je u centru inercije segmenta (za robotski sistem ubrzanje zemljine teže možemo smatrati konstantnim; otuda - težište segmenta i njegov centar inercije poklapaju se). Glavni vektor sistema kontinualno podeljenih sila zemljine teže koje deluju na segment (V_i) ima oblik

$$\vec{F}_{R(i)} = \vec{G}_i = m_i \vec{g}, \tag{8.41}$$

a glavni moment (redukciona tačka je C_i) iznosi

$$\vec{M}^a_{C_i R(i)} = 0\,. \tag{8.42}$$

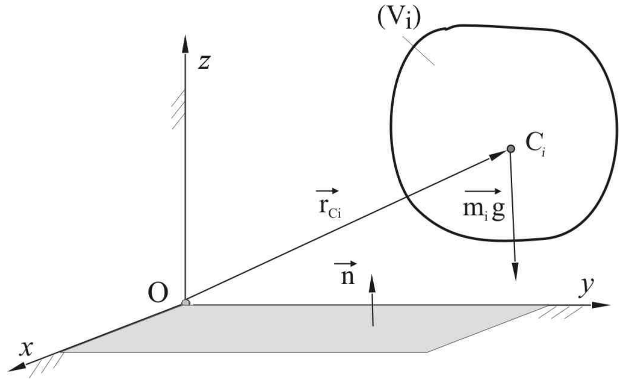
Poslednja dva izraza i izraz (8.38) dovode do generalisane sile od sila zemljine teže u obliku

$$Q_\alpha^G = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{g} \cdot \vec{T}_{\alpha(i)}\,. \tag{8.43}$$

Uzimajući u obzir činjenicu da je sila teže potencijalna, izraz (8.43) može da se izvede sledećim razmatranjem. Postavimo horizontalnu ravan tako da sadrži koordinatni početak O inercijalnog koordinatnog sistema Oxyz (vidi sl. 8.2). Potencijalna energija sile zemljine teže $\vec{G} = m_i \vec{g}$ segementa (V_i) iznosi (ravan α uzeta je za nivo nultoga potencijala):

$$E^G_{p(i)} = m_i g \vec{r}_{C_i} \cdot \vec{n}\,, \tag{8.44}$$

gde je $\vec{n}$ vektor normale ravni usmeren vertikalno naviše. Ukupna potencijalna energija razmatranog robotskog sistema koja se odnosi na sile zemljine teže iznosi



Slika 8.2

$$E_p^G = \sum_{i=1}^{n} m_i g \, \vec{r}_{C_i} \cdot \vec{n} \, , \tag{8.45}$$

i kako je

$$g \cdot \vec{n} = -\vec{g} \, , \tag{8.46}$$

prema (8.40) sledi

$$Q_\alpha^G = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{g} \cdot \frac{\partial \vec{r}_{C_i}}{\partial q^\alpha} \, , \tag{8.47}$$

i (vidi (4.24))

$$Q_\alpha^G = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{g} \cdot \vec{T}_{\alpha(i)}$$

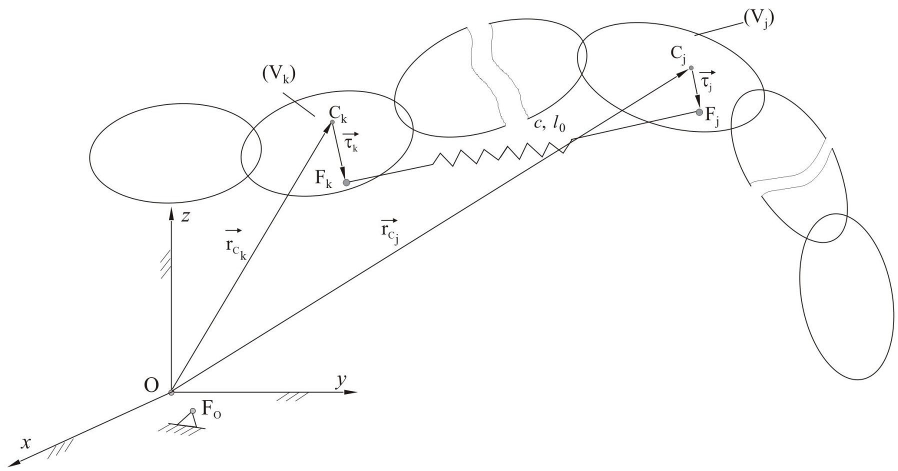
što se poklapa sa (8.43).

8.2.2 Generalisane sile od sila u oprugama

Za tačke $F_k \in (V_i)$ i $F_j \in (V_j)$ RS u obliku otovrenog kinematičkog lanca bez grananja $((V_1),(V_2),\ldots,(V_n))$ vezani su krajevi opruge krutosti c, čija slobodna dužina iznosi l_0 (vidi sl. 8.3). Potencijalna energija te opruge data je izrazom

$$E_p^c = \frac{1}{2} c \left(\overline{F_k F_j} - l_0 \right)^2 , \tag{8.48}$$

a generalisane sile od sila u opruzi date su izrazom



Slika 8.3

$$Q_{\alpha}^{c} = -c\left(\overline{F_k F_j} - l_0\right)\frac{\partial \overline{F_k F_j}}{\partial q^{\alpha}}, \quad \alpha = 1,2,\ldots,n. \tag{8.49}$$

Kako je

$$\overline{F_k F_j} = \sqrt{\overrightarrow{F_k F_j} \cdot \overrightarrow{F_k F_j}}\,, \tag{8.50}$$

dobija se

$$\frac{\partial\left(\overline{F_k F_j}\right)}{\partial q^{\alpha}} = \frac{\overrightarrow{F_k F_j}}{\overline{F_k F_j}} \cdot \frac{\partial\left(\overrightarrow{F_k F_j}\right)}{\partial q^{\alpha}}. \tag{8.51}$$

Uzimajući u obzir da važi (vidi sl.8.3)

$$\overrightarrow{F_k F_j} = \vec{r}_{C_j} + \vec{\tau}_j - \vec{r}_{C_k} - \vec{\tau}_k\,, \tag{8.52}$$

gde su $\vec{r}_{C_j}, \vec{r}_{C_k}$ vektori položaja centara inercije C_j, C_k segmenata (V_j) odnosno (V_j) a $\vec{\tau}_j, \vec{\tau}_k$ vektori položaja tačaka F_j, F_k u odnosu na C_j odnosno C_k izraz (8.51) dobija oblik (vidi (4.24) i (4.25))

$$\frac{\partial\left(\overline{F_k F_j}\right)}{\partial q^{\alpha}} = \frac{\overrightarrow{F_k F_j}}{\overline{F_k F_j}} \cdot \left(\vec{T}_{\alpha(j)} - \vec{T}_{\alpha(k)} + \vec{\Omega}_{\alpha(j)} \times \vec{\tau}_j - \vec{\Omega}_{\alpha(k)} \times \vec{\tau}_k\right), \tag{8.53}$$

gde je

$$\overline{F_k F_j} = \left|\vec{r}_{C_j} + \vec{\tau}_j - \vec{r}_{C_k} - \vec{\tau}_k\right|. \tag{8.54}$$

Uzimajući u obzir poslednja dva izraza relacija (8.49) dobija oblik

$$Q_\alpha^c = -c\left(\left|\vec{r}_{C_j} - \vec{r}_{C_k} + \vec{\tau}_j - \vec{\tau}_k\right| - l_0\right)\frac{\vec{r}_{C_j} - \vec{r}_{C_k} + \vec{\tau}_j - \vec{\tau}_k}{\left|\vec{r}_{C_j} - \vec{r}_{C_k} + \vec{\tau}_j - \vec{\tau}_k\right|}\cdot$$
$$\cdot\left(\vec{T}_{\alpha(j)} - \vec{T}_{\alpha(k)} + \vec{\Omega}_{\alpha(j)} \times \vec{\tau}_j - \vec{\Omega}_{\alpha(k)} \times \vec{\tau}_k\right). \tag{8.55}$$

Prema (8.49) i prema očiglednoj relaciji

$$\overline{F_k F_j} = \overline{F_k F_j}\left(q^{k+1}, q^{k+2}, ..., q^j\right), \tag{8.56}$$

sledi

$$Q_\alpha^c = 0 \;\; \forall \alpha = 1, 2, ..., k \wedge j+1, j+2, ..., n\,. \tag{8.57}$$

Specijalno, ako je jedan kraj opruge vezan za postolje (tački F_0) uzima se (postolje se označava indeksom $k = 0$)

$$\vec{r}_{C_0} = 0, \quad \vec{\rho}_0 = \overrightarrow{OF_0}\,. \tag{8.58}$$

8.2.3 Generalisane sile od sistema pogonskih sila

Relativno kretanje proizvoljnog robotskog segmenta (V_i) u odnosu na segment (V_{i-1}) ostvaruje se pomoću pogonskih motora. Motor koji ostvaruje kretanje segmenta (V_i) u odnosu na (V_{i-1}) (vidi sl.8.5) deluje na (V_i) pogonskom silom $\vec{P}_i$ (u slučaju $\xi_i = 1$), odnosno spregom $\vec{\mathfrak{M}}_i$ pogonskih sila čiji je moment $\vec{M}_i$, (u slučaju $\overline{\xi}_i = 1$). Takođe, motor deluje na segment (V_{i-1}) pogonskom silom $\vec{P}_i'$ odnosno spregom $\vec{\mathfrak{M}}_i'$ pogonskih sila čiji je moment $\vec{M}_i'$. Uzmimo da su za pogonske sile $\vec{P}_i$ i $\vec{P}_i'$ napadne tačke $O_i' \in (V_i)$ i $O_i \in (V_{i-1})$ respektivno. Osim toga važi relacija

$$\vec{P}_i' = -\vec{P}_i, \ \vec{M}_i' = -\vec{M}_i, \ i = 1,2,...,n. \tag{8.72}$$

Virtualni rad sprega sila $\vec{\mathfrak{M}}_i$, koji deluje na kruto telo (V_i) čiji moment je $\vec{M}_i$ izračunavamo kao virtualni rad sistema sila $(\vec{F}_{i1}, \vec{F}_{i2})$ čije su napadne tačke $A_i \in (V_i)$ i $B_i \in (V_i)$ respektivno, pri čemu važi

$$\vec{F}_{2i} = -\vec{F}_{1i}, \ \vec{M}_i = \vec{M}_{A_i}\left(\vec{F}_{2i}\right) = \vec{M}_{B_i}\left(\vec{F}_{1i}\right). \tag{8.73}$$

Pod gornjim uslovom, kao što je poznato, biće

$$\vec{\mathfrak{M}}_i \sim \left(\vec{F}_{1i}; \vec{F}_{2i}\right). \tag{8.74}$$

Kao što je rečeno, važi

$$\delta A(\vec{\mathfrak{M}}_i) = \delta A(\vec{F}_{1i}) + \delta A(\vec{F}_{2i}), \tag{8.75}$$

ili

$$\delta A(\vec{\mathfrak{M}}_i) = \vec{F}_{1i} \cdot \delta \vec{r}_{A_i} + \vec{F}_{2i} \cdot \delta \vec{r}_{B_i}, \tag{8.76}$$

gde su $\vec{r}_{A_i}$ i $\vec{r}_{B_i}$ vektori položaja tačaka A_i i B_i respektivno, u odnosu na koordinatni početak O inercijalnog koordinatnog sistema $Oxyz$. Poslednja relacija prema (8.73) dobija oblik

$$\delta A(\vec{\mathfrak{M}}_i) = \vec{F}_{1i} \cdot \delta(\vec{r}_{A_i} - \vec{r}_{B_i}), \tag{8.77}$$

ili, kako je

$$\delta(\vec{r}_{A_i} - \vec{r}_{B_i}) = \delta\left(\overrightarrow{B_i A_i}\right), \tag{8.78}$$

oblik

$$\delta A(\vec{\mathfrak{M}}_i) = \vec{F}_{1i} \cdot \delta\left(\overrightarrow{B_i A_i}\right), \tag{8.79}$$

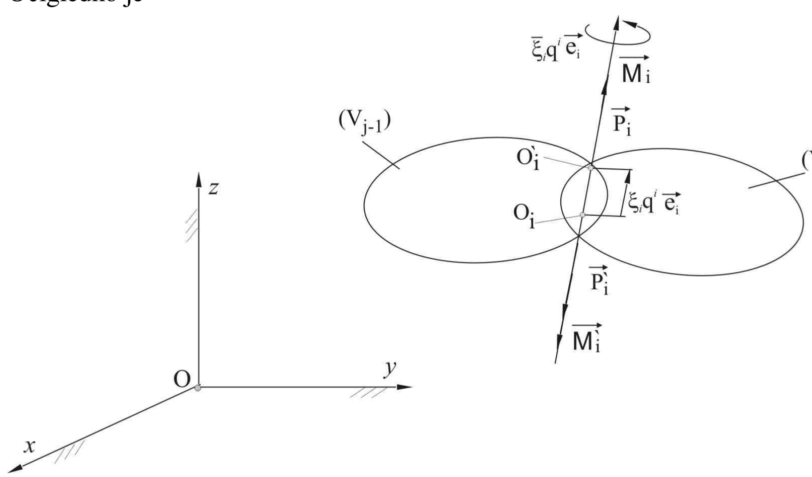
ili

$$\delta A(\vec{\mathfrak{M}}_{\mathrm{i}}) = \sum_{\alpha=1}^{n} \vec{F}_{1i} \cdot (\Omega_{\alpha(i)} \times \overrightarrow{B_i A_i}) \delta q^{\alpha}, \tag{8.80}$$

što dovodi do rezultata

$$\delta A(\vec{\mathfrak{M}}_{\mathrm{i}}) = \sum_{\alpha=1}^{n} \vec{M}_{i} \cdot \vec{\Omega}_{\alpha(i)} \delta q^{\alpha}. \tag{8.81}$$

Vratimo se nadalje određivanju virutalnog rada sistema pogonskih sila koje deluju na robotski sistem u obliku otvorenog kinematičkog lanca bez grananja. Očigledno je



Slika 8.5

$$\delta A^{p} = \sum_{i=1}^{n} \delta A\left(\vec{M}_{i}\right) + \delta A\left(\vec{M}_{i}'\right) + \delta A\left(\vec{P}_{i}\right) + \delta A\left(\vec{P}_{i}'\right), \tag{8.82}$$

što prema (8.81) i (8.26) dovodi do

$$\delta A^{p} = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{\alpha=1}^{n}\left(\vec{M}_{i} \cdot \vec{\Omega}_{\alpha(i)} + \vec{M}_{i}' \cdot \vec{\Omega}_{\alpha(i-1)}\right)\right)\delta q^{\alpha} + \sum_{i=1}^{n}\left(\vec{P}_{i} \cdot \delta\vec{r}_{O_i'} + \vec{P}_{i}' \cdot \delta\vec{r}_{O_i}\right), \tag{8.83}$$

što se može napisati i u obliku

$$\delta A^{p} = \sum_{\alpha=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} \vec{M}_{i} \cdot \left(\vec{\Omega}_{\alpha(i)} - \vec{\Omega}_{\alpha(i-1)}\right)\delta q^{\alpha} + \sum_{\alpha=1}^{n} \vec{P}_{\alpha} \cdot \delta\left(\vec{r}_{O_\alpha'} - \vec{r}_{O_\alpha}\right). \tag{8.84}$$

Kako je

$$\delta\left(\vec{r}_{O'\alpha} - \vec{r}_{O\alpha}\right) = \delta\left(\xi_{\alpha}\vec{e}_{\alpha} q^{\alpha}\right), \tag{8.85}$$

i

$$\vec{P}_\alpha \cdot \delta\left(\vec{r}_{O'\alpha} - \vec{r}_{O\alpha}\right) = \vec{P}_\alpha \cdot \vec{e}_\alpha \xi_\alpha \delta q^\alpha \,, \tag{8.86}$$

jer je

$$\vec{P}_\alpha \cdot \delta\vec{e}_\alpha = 0 \,, \tag{8.87}$$

sledi da (8.84) ima i sledeću formu

$$\delta A^p = \sum_{\alpha=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n}\vec{M}_i \cdot \left(\vec{\Omega}_{\alpha(i)} - \vec{\Omega}_{\alpha(i-1)}\right) + \xi_\alpha \vec{P}_\alpha \cdot \vec{e}_\alpha\right)\delta q^\alpha \,, \tag{8.88}$$

iz koje se dobija tražena generalisana sila u obliku

$$Q_\alpha^p = \sum_{i=1}^{n}\vec{M}_i \cdot \left(\vec{\Omega}_{\alpha(i)} - \vec{\Omega}_{\alpha(i-1)}\right) + \xi_\alpha \vec{P}_\alpha \cdot \vec{e}_\alpha \,. \tag{8.89}$$

Poznato je da važe relacije

$$\begin{aligned} &\vec{\Omega}_{\alpha(i)} = 0 \quad \forall\ \alpha < i, \\ &\vec{\Omega}_{\alpha(i)} = \bar{\xi}_\alpha \vec{e}_\alpha \quad \forall\ \alpha \ge i, \end{aligned} \tag{8.90}$$

koje izraz (8.89), uzimajući u obzir da je $\vec{\Omega}_{\alpha(i)} \equiv 0,$ dovode na oblik

$$\boxed{Q_\alpha^p = \left(\bar{\xi}_\alpha \vec{M}_\alpha + \vec{P}_\alpha \xi_\alpha\right) \cdot \vec{e}_\alpha, \ \ \alpha = 1, 2, \ldots, n.} \tag{8.91}$$

Primetimo da se do poslednje relacije dolazi direktno ako se sračuna virtualni rad sistema pogonskih sila koji deluje na RS pod uslovom da je virtualno pomeranje RS određeno na sledeći način:

$$\delta q^1 = \delta q^2 = \ldots = \delta q^{\alpha-1}, \delta q^\alpha \ne 0, \delta q^{\alpha+1} = \delta q^{\alpha+2} = \ldots = \delta q^n = 0. \tag{8.92}$$