Универзитет у Београду

Машински факултет

Механика робота

Вежбе - осма недеља

Београд, 2023.
NR

Задатак 14 За Задатак 13 одредити Јакобијан трансформације.

$$\overline{q}^a = \varphi^a \left(q^1, q^2, q^3, ..., q^n\right) \Rightarrow \dot{\overline{q}}^a = \frac{\partial \varphi^a}{\partial q^\alpha}\dot{q}^\alpha \Rightarrow \left\{\dot{\overline{q}}\right\} = [J]\left\{\dot{q}\right\}$$

У конкретном случају:

$$\begin{Bmatrix} \dot{\overline{q}}^1 \\ \dot{\overline{q}}^2 \\ \dot{\overline{q}}^3 \\ \dot{\overline{q}}^4 \\ \dot{\overline{q}}^5 \\ \dot{\overline{q}}^6 \end{Bmatrix} = [J]_{6\times3} \begin{Bmatrix} \dot{q}^1 \\ \dot{q}^2 \\ \dot{q}^3 \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} [J_{\mathrm{I}}]_{3\times3} \\ [J_{\mathrm{II}}]_{3\times3} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{q}^1 \\ \dot{q}^2 \\ \dot{q}^3 \end{Bmatrix}$$

СЛУЧАЈ ПОЗИЦИОНИРАЊА

$$\begin{Bmatrix} \dot{\overline{q}}^1 \\ \dot{\overline{q}}^2 \\ \dot{\overline{q}}^3 \end{Bmatrix} = [J_{\mathrm{I}}] \begin{Bmatrix} \dot{q}^1 \\ \dot{q}^2 \\ \dot{q}^3 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} \dot{x}_H \\ \dot{y}_H \\ \dot{z}_H \end{Bmatrix} = [J_{\mathrm{I}}] \begin{Bmatrix} \dot{q}^1 \\ \dot{q}^2 \\ \dot{q}^3 \end{Bmatrix}$$

СЛУЧАЈ ОРИЈЕНТАЦИЈЕ

$$\begin{Bmatrix} \dot{\overline{q}}^4 \\ \dot{\overline{q}}^5 \\ \dot{\overline{q}}^6 \end{Bmatrix} = [J_{\mathrm{II}}] \begin{Bmatrix} \dot{q}^1 \\ \dot{q}^2 \\ \dot{q}^3 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} \dot{\lambda}_1 \\ \dot{\lambda}_2 \\ \dot{\lambda}_3 \end{Bmatrix} = [J_{\mathrm{II}}] \begin{Bmatrix} \dot{q}^1 \\ \dot{q}^2 \\ \dot{q}^3 \end{Bmatrix}$$

Задатак 14: случај позиционирања Полазимо од вектора брзине врха хватаљке (погледати Задатак 11):

$$\boxed{\overrightarrow{V}_H = \sum_{\beta=1}^{n} \overrightarrow{\tau}_{\beta_{(n)}} \dot{q}^\beta} \tag{1}$$

где су квазибазни вектори:

$$\boxed{\overrightarrow{\tau}_{\beta_{(n)}} = \overline{\xi}_\beta \vec{e}_\beta \times \overrightarrow{R}_{\tau_{\beta_{(n)}}} + \xi_\beta \vec{e}_\beta} \tag{2}$$

док је $\overrightarrow{R}_{\tau_{\beta_{(n)}}}$ вектор положаја врха хватаљке у односу на зглоб сегмента β:

$$\boxed{\overrightarrow{R}_{\tau_{\beta_{(n)}}} = \sum_{\alpha=\beta}^{n} \left(\vec{\rho}_{\alpha\alpha} + \xi_\alpha \vec{e}_\alpha q^\alpha\right)} \tag{3}$$

На основу израза (1) следи:

$$\overrightarrow{V}_H = \sum_{\beta=1}^{n} \overrightarrow{\tau}_{\beta_{(n)}} \dot{q}^{\beta} = \overrightarrow{\tau}_{1_{(3)}} \dot{q}^1 + \overrightarrow{\tau}_{2_{(3)}} \dot{q}^2 + \overrightarrow{\tau}_{3_{(3)}} \dot{q}^3$$

Дакле:

$$\begin{Bmatrix} \dot{x}_H \\ \dot{y}_H \\ \dot{z}_H \end{Bmatrix} = \left[\overrightarrow{\tau}_{1_{(3)}} \middle| \overrightarrow{\tau}_{2_{(3)}} \middle| \overrightarrow{\tau}_{3_{(3)}} \right] \begin{Bmatrix} \dot{q}^1 \\ \dot{q}^2 \\ \dot{q}^3 \end{Bmatrix} = [D] \begin{Bmatrix} \dot{q}^1 \\ \dot{q}^2 \\ \dot{q}^3 \end{Bmatrix}$$

С обзиром на то да је:

$$\begin{Bmatrix} \dot{x}_H \\ \dot{y}_H \\ \dot{z}_H \end{Bmatrix} = [J_{\mathrm{I}}] \begin{Bmatrix} \dot{q}^1 \\ \dot{q}^2 \\ \dot{q}^3 \end{Bmatrix}$$

уочавамо Јакобијан трансформације за случај позиционирања:

$$[J_{\mathrm{I}}] = [D] = \left[\overrightarrow{\tau}_{1_{(3)}} \middle| \overrightarrow{\tau}_{2_{(3)}} \middle| \overrightarrow{\tau}_{3_{(3)}} \right]$$

Потребно је обратимо пажњу и на координатни систем у односу на који ћемо одредити све величине:

$$\overrightarrow{V}_H^{(0)} = \overrightarrow{\tau}_{1_{(3)}}^{(0)} \dot{q}^1 + \overrightarrow{\tau}_{2_{(3)}}^{(0)} \dot{q}^2 + \overrightarrow{\tau}_{3_{(3)}}^{(0)} \dot{q}^3$$

Дакле:

$$[J_{\mathrm{I}}] = [D] = \left[\overrightarrow{\tau}_{1_{(3)}}^{(0)} \middle| \overrightarrow{\tau}_{2_{(3)}}^{(0)} \middle| \overrightarrow{\tau}_{3_{(3)}}^{(0)} \right]$$

Из искуства са решавањем претходних задатака можемо да предвидимо да ће сваки од квазибазних вектора бити одређен у односу на локални координатни систем β, те ће се претходни израз свести на:

$$[J_{\mathrm{I}}] = [D] = \left[[A_{0,1}] \overrightarrow{\tau}_{1_{(3)}}^{(1)} \middle| [A_{0,2}] \overrightarrow{\tau}_{2_{(3)}}^{(2)} \middle| [A_{0,3}] \overrightarrow{\tau}_{3_{(3)}}^{(3)} \right]$$

Ипак, до тога ћемо доћи поступно. Прво ћемо одредити квазибазни вектор $\overrightarrow{\tau}_{1_{(3)}}$ на основу израза (2):

$$\overrightarrow{\tau}_{1_{(3)}} = 1 \cdot \vec{e}_1 \times \overrightarrow{R}_{\tau_{1_{(3)}}} + 0 \cdot \vec{e}_1 \Rightarrow \overrightarrow{\tau}_{1_{(3)}}^{(1)} = \vec{e}_1^{(1)} \times \overrightarrow{R}_{\tau_{1_{(3)}}}^{(1)} = \left[e_1^{d(1)} \right] \left\{ \overrightarrow{R}_{\tau_{1_{(3)}}}^{(1)} \right\} \quad (4)$$

Сада је потребно одредити вектор $\overrightarrow{R}_{\tau_{1_{(3)}}}^{(1)}$ на основу израза (3):

$$\overrightarrow{R}_{\tau_{1_{(3)}}}^{(1)} = \vec{\rho}_{11}^{(1)} + \vec{\rho}_{22}^{(1)} + \vec{\rho}_{33}^{(1)} = \left\{ \vec{\rho}_{11}^{(1)} \right\} + [A_{1,2}] \left\{ \vec{\rho}_{22}^{(2)} \right\} + [A_{1,3}] \left\{ \vec{\rho}_{33}^{(3)} \right\} = \begin{Bmatrix} -1,475 \\ -1 \\ 0,1498 \end{Bmatrix}$$

На основу израза (4) следи:

$$\overrightarrow{\tau}^{(1)}_{1_{(3)}} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -0,1498 \\ -1 \end{Bmatrix}$$

Сличан поступак се понавља за наредна два квазибазна вектора (за детаљнији поступак погледати Задатак 11):

$$\overrightarrow{R}^{(2)}_{\tau_{2_{(3)}}} = \left\{\vec{\rho}^{(2)}_{22}\right\} + [A_{2,3}]\left\{\vec{\rho}^{(3)}_{33}\right\} = \begin{Bmatrix} -0,5 \\ -1 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\overrightarrow{\tau}^{(2)}_{2_{(3)}} = \left[e^{d(2)}_{2}\right]\left\{\overrightarrow{R}^{(2)}_{\tau_{2_{(3)}}}\right\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0,5 \end{Bmatrix}$$

$$\overrightarrow{R}^{(3)}_{\tau_{3_{(3)}}} = \vec{\rho}^{(3)}_{33} = \begin{Bmatrix} -0,5 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\overrightarrow{\tau}^{(3)}_{3_{(3)}} = \left[e^{d(3)}_{3}\right]\left\{\overrightarrow{R}^{(3)}_{\tau_{3_{(3)}}}\right\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Пошто квазибазни вектори нису одређени у односу на непокретни координатни систем, након неопходних трансформација одређујемо Јакобијан трансформације за случај позиционирања:

$$[J_{\mathrm{I}}] = [D] = \left[[A_{0,1}]\,\overrightarrow{\tau}^{(1)}_{1_{(3)}} \middle| [A_{0,2}]\,\overrightarrow{\tau}^{(2)}_{2_{(3)}} \middle| [A_{0,3}]\,\overrightarrow{\tau}^{(3)}_{3_{(3)}} \right]$$

$$[J_{\mathrm{I}}] = [D] = \begin{bmatrix} 0 & 0,148 & 0 \\ 0,054 & -0,095 & 0 \\ -1,01 & 0,468 & 0 \end{bmatrix}$$

С обзиром на то да Декартове координате представљају такозвани "базни случај", овај Јакобијан трансформације је све време такође обележаван као матрица $[D]$, и биће коришћена у случају када у оквиру непокретног Декартовог координатног система уводимо друге непокретне координатне системе (поларно-цилиндрични и сферни).

Позиционирање: поларно-цилиндричне координате

Јакобијан за случај позиционирања је већ одређен за Дакартов координатни систем:

$$\begin{Bmatrix} \dot{x}_H \\ \dot{y}_H \\ \dot{z}_H \end{Bmatrix} = [D] \begin{Bmatrix} \dot{q}^1 \\ \dot{q}^2 \\ \dot{q}^3 \end{Bmatrix} = [J_{\mathrm{I}}] \begin{Bmatrix} \dot{q}^1 \\ \dot{q}^2 \\ \dot{q}^3 \end{Bmatrix} \tag{5}$$

Поларно-цилиндрични координатни систем се уводи у оквиру Декартовог координатног система:

$$\begin{aligned} x_H &= \rho \cos\varphi & & & \rho &= \sqrt{x_H^2 + y_H^2} \\ y_H &= \rho \sin\varphi & &\Rightarrow & \varphi &= \mathrm{arctg}\frac{y_H}{x_H} \\ z_H &= z & & & z &= z_H \end{aligned}$$

Овде се може приметити да се јављају сингуларитети када су x_H и y_H истовремено једнаки нули, тј. није дозвољено кретање по оси Oz.

Јакобијан трансформације за поларно-цилиндрични координатни систем је:

$$\begin{Bmatrix} \dot{\rho} \\ \dot{\varphi} \\ \dot{z} \end{Bmatrix} = [J_{\mathrm{I}}] \begin{Bmatrix} \dot{q}^1 \\ \dot{q}^2 \\ \dot{q}^3 \end{Bmatrix}$$

На основу везе између Декартовог и поларно-цилиндричног координатног система, следи:

$$\begin{Bmatrix} \dot{x}_H \\ \dot{y}_H \\ \dot{z}_H \end{Bmatrix} = [L] \begin{Bmatrix} \dot{\rho} \\ \dot{\varphi} \\ \dot{z} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \dot{x}_H \\ \dot{y}_H \\ \dot{z}_H \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x_H}{\partial \rho} & \dfrac{\partial x_H}{\partial \varphi} & \dfrac{\partial x_H}{\partial z} \\ \dfrac{\partial y_H}{\partial \rho} & \dfrac{\partial y_H}{\partial \varphi} & \dfrac{\partial y_H}{\partial z} \\ \dfrac{\partial z_H}{\partial \rho} & \dfrac{\partial z_H}{\partial \varphi} & \dfrac{\partial z_H}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\rho} \\ \dot{\varphi} \\ \dot{z} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \dot{x}_H \\ \dot{y}_H \\ \dot{z}_H \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\rho} \\ \dot{\varphi} \\ \dot{z} \end{Bmatrix} = [L] \begin{Bmatrix} \dot{\rho} \\ \dot{\varphi} \\ \dot{z} \end{Bmatrix} \tag{6}$$

Пошто су једнаке леве стране једначина (5) и (6), можемо изједначити и њихове десне стране:

$$[D] \begin{Bmatrix} \dot{q}^1 \\ \dot{q}^2 \\ \dot{q}^3 \end{Bmatrix} = [L] \begin{Bmatrix} \dot{\rho} \\ \dot{\varphi} \\ \dot{z} \end{Bmatrix}$$

Дакле:

$$\begin{Bmatrix} \dot{\rho} \\ \dot{\varphi} \\ \dot{z} \end{Bmatrix} = [L]^{-1} [D] \begin{Bmatrix} \dot{q}^1 \\ \dot{q}^2 \\ \dot{q}^3 \end{Bmatrix}$$

Тј.

$$[J_{\mathrm{I}}] = [L]^{-1} [D]$$

Позиционирање: сферне координате

Сферне координате се такође уводе у оквиру Декартовог координатног система, на следећи начин:

$$\begin{aligned} x_H &= r\sin\theta\cos\varphi & & & r &= \sqrt{x_H^2 + y_H^2 + z_H^2} \\ y_H &= r\sin\theta\sin\varphi & &\Rightarrow & \varphi &= \mathrm{arctg}\frac{y_H}{x_H} \\ z_H &= r\cos\theta & & & \theta &= \mathrm{arctg}\frac{\sqrt{x_H^2 + y_H^2}}{z_H} \end{aligned}$$

Овде се може приметити да се такође јављају сингуларитети када су x_H и y_H истовремено једнаки нули, тј. није дозвољено кретање по оси Oz. Међутим, сингуларитет се јавља и при проласку кроз координатни почетак, тј. када је $x_H = y_H = z_H = 0$.

Јакобијан трансформације се одређује на исти начин:

$$[J_{\mathrm{I}}] = [L]^{-1} [D]$$

али матрица $[L]$ се наравно разликује!

$$[L] = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x_H}{\partial r} & \dfrac{\partial x_H}{\partial \varphi} & \dfrac{\partial x_H}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial y_H}{\partial r} & \dfrac{\partial y_H}{\partial \varphi} & \dfrac{\partial y_H}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial z_H}{\partial r} & \dfrac{\partial z_H}{\partial \varphi} & \dfrac{\partial z_H}{\partial \theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\sin\varphi \\ \cos\theta & 0 & -r\sin\theta \end{bmatrix}$$

Занимљиво: матрица трансформације у функцији Хамилтон-Родригових параметара Може се формирати дуални објекат:

$$\left[\theta^d\right] = \frac{2}{\lambda_0}\left[\lambda^d\right]$$

где је:

$$\left[\lambda^d\right] = \begin{bmatrix} 0 & -\lambda_3 & \lambda_2 \\ \lambda_3 & 0 & -\lambda_1 \\ -\lambda_2 & \lambda_1 & 0 \end{bmatrix}$$

и формирати матрица трансформације:

$$[A] = [I] + 2\left[\lambda^d\right]^2 + 2\lambda_0\left[\lambda^d\right]$$