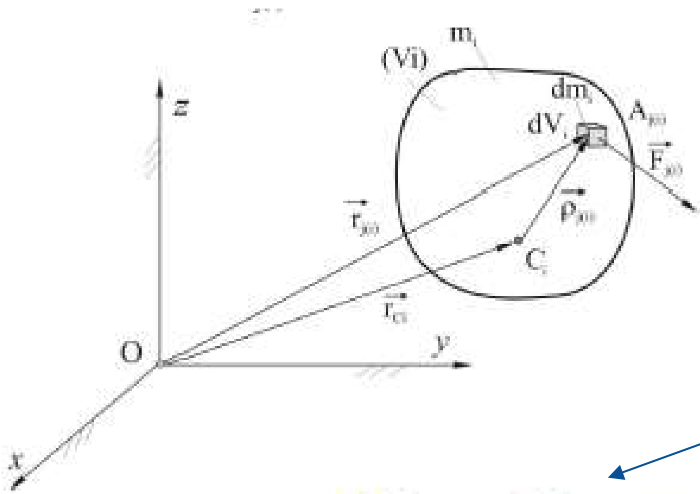
Генералисане силе роботског система



$A_{j(i)} \in (V_i)$, $\vec{F}_{j(i)}\ (j = 1,2,\ldots,l_i)$

- Систем сила који делује на дати роботски сегмент

Virtualni rad sile $\vec{F}_{j(i)}\ (j = 1,2,\ldots,l_i)$ određen je izrazom

$$\delta A(\vec{F}_{j(i)}) = \vec{F}_{j(i)} \cdot \delta \vec{r}_{j(i)}, \quad \Rightarrow \quad \delta A(\vec{F}_{j(i)}) = \vec{F}_{j(i)} \cdot \left(\delta \vec{r}_{C_i} + \delta \vec{\rho}_{j(i)}\right).$$

$$\delta A(\vec{F}_{j(i)}) = \vec{F}_{j(i)} \left(\sum_{\alpha=1}^{n} \vec{T}_{\alpha(i)} \delta q^{\alpha} + \sum_{\alpha=1}^{n} \left(\vec{\Omega}_{\alpha(i)} \times \vec{\rho}_{j(i)} \right) \delta q^{\alpha} \right)$$

$$\vec{M}_{Ci}(\vec{F}_{j(i)}) = \vec{\rho}_{j(i)} \times \vec{F}_{j(i)},$$

moment sile $\vec{F}_{j(i)}$ sračunat u odnosu na centar inercije C_i segmenta

$$\delta A(\vec{F}_{j(i)}) = \sum_{\alpha=1}^{n} \left(\vec{F}_{j(i)} \cdot \vec{T}_{\alpha(i)} + \vec{M}_{C_i}(\vec{F}_{j(i)}) \cdot \vec{\Omega}_{\alpha(i)} \right) \delta q^{\alpha}.$$

- Виртуални рад разматраног система сила

$$\delta A^{a} = \sum_{j=1}^{l_i} \delta A(\vec{F}_{j(i)}) \; . \qquad \Rightarrow \qquad \delta A_i^{a} = \sum_{\alpha=1}^{n} \left(\left(\sum_{j=1}^{l_i} \vec{F}_{j(i)} \right) \cdot \vec{T}_{\alpha(i)} + \left(\sum_{j=1}^{l_i} \vec{M}_{C_i}(\vec{F}_{j(i)}) \right) \cdot \vec{\Omega}_{\alpha(i)} \right) \cdot \delta q^{\alpha} .$$

- Главни вектор и главни момент система сила срачунатог у односу на редукциону тачку Ci

$$\delta A_i^{a} = \sum_{\alpha=1}^{n} \left(\vec{F}_{R(i)} \cdot \vec{T}_{\alpha(i)} + \vec{M}^{a}_{C_i R(i)} \cdot \vec{\Omega}_{\alpha(i)} \right) \cdot \delta q^{\alpha} ,$$

- Роботски систем- отворени кинематички ланац без гранања

  $(q^1, q^2, \ldots, q^n)$ Генералисане координате су независне .

- Са друге стране виртуални рад свих система сила PC је (*) $\delta A^{a} = \sum_{j=1}^{n} Q_{\alpha}^{a} \delta q^{\alpha}$,
- где је са Q_{α}^{a} дата генералисана сила
- (**) $\delta A^{a} = \sum_{i=1}^{n} \delta A_i^{a} = \sum_{\alpha=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \left(\vec{F}_{R(i)} \cdot \vec{T}_{\alpha(i)} + \vec{M}^{a}_{C_i R(i)} \cdot \vec{\Omega}_{\alpha(i)} \right) \delta q^{\alpha}$,

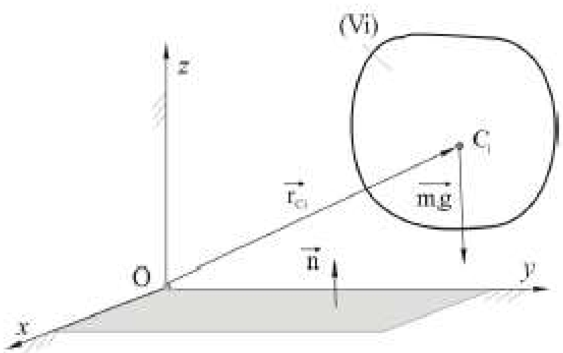
- Изједначавањем израза (*) и (**) следи да је

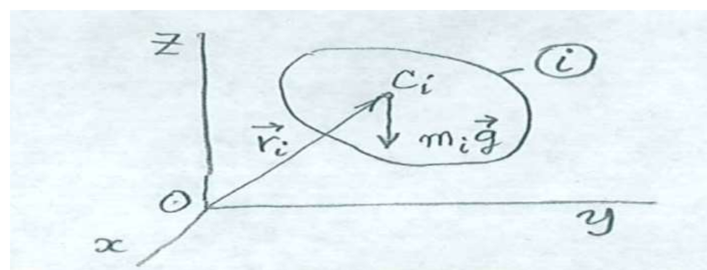
$$Q^a{}_\alpha = \sum_{i=1}^{n}\left(\vec{T}_{\alpha(i)}\vec{F}_{R(i)} + \vec{\Omega}_{\alpha(i)}\vec{M}_{Ci(i)}^{\vec{F}_{R(i)}}\right) \qquad \alpha = 1, 2 \ldots n \qquad \text{(A)}$$

- Ако је систем сила потенцијалан, са потенцијалном енергијом
  - добија се израз познат из аналитичке механике $E_p = E_p(q^1, q^2, \ldots, q^n)$.

$$Q^a_\alpha = -\frac{\partial E_p}{\partial q^\alpha}, \quad \alpha = 1, 2, \ldots, n. \qquad \text{(B)}$$

- **Генералисане силе од сила теже роботског система**



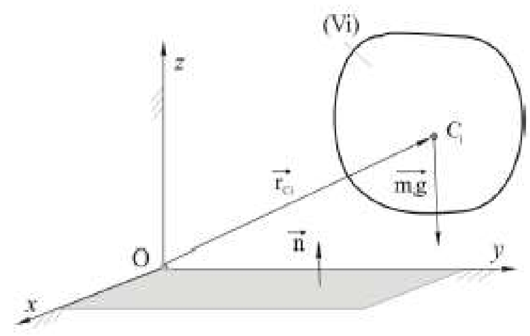


- Главни вектор $\vec{F}_{R(i)} = \vec{G}_i = m_i\vec{g}$, а главни момент је $\vec{M}^{\,a}_{C_i R(i)} = 0$.

$$Q^{a}{}_{\alpha} = \sum_{i=1}^{n}\left(\vec{T}_{\alpha(i)}\overrightarrow{m_i g} + \vec{\Omega}_{\alpha(i)}\cdot 0\right) = -\sum_{i=1}^{n}\left(m_i g \vec{T}_{\alpha(i)}\cdot\vec{k}\right) \qquad \alpha = 1,2\ldots n$$

- **2** начин: гравитационе силе су потенцијалне, са потенцијалном енергијом

$$E^{G}_{p(i)} = m_i g \vec{r}_{C_i}\cdot\vec{n} = m_i g z_i$$



- Укупна потенцијална енергија РС је

$$E_p = \sum_{i=1}^{n} m_i g z_i = \sum_{i=1}^{n} m_i g \vec{r}_i \cdot \vec{k}$$

$$g\cdot\vec{n} = -\vec{g}$$

(B)

$$Q^{a}{}_{\alpha} = -\frac{\partial E_p^g(q)}{\partial q^{\alpha}} = -\sum_{i=1}^{n} m_i g \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q^{\alpha}}\cdot\vec{k} = -\sum_{i=1}^{n}\left(m_i g \vec{T}_{\alpha(i)}\cdot\vec{k}\right) \qquad \alpha = 1,2\ldots n$$

Primer 10 *Odrediti generalisane sile od sila teže robotskog sistema (primer 2).*

Na osnovu izvedenog izraza za generalisanu silu dobija se izraz za $Q_{3(g)}$ za treći segment:

$$Q_{3(g)} = -\sum_{i=3}^{n=3} m_i g \vec{T}_{a(i)} \cdot \vec{k} = -m_3 g \left(T_{3(3)}^{(0)}\right)\left\{k^{(0)}\right\} = -m_3 g \left(\left[A_{0,3}\right]\left\{T_{3(3)}^{(3)}\right\}\right)\left\{k^{(0)}\right\} =$$
$$= -m_3 g \left(\left[A_{0,1}\right]\left[A_{1,2}\right]\left[I\right]\left\{T_{3(3)}^{(3)}\right\}\right)\left\{k^{(0)}\right\} \qquad (5.197)$$

Generalisane sile odredjujemo u odnosu na nepokretni koordinatni sistem, što je i naznačeno u izrazima za vektore sa $\left(\,^{(0)}\right)$. U prethodnim primerima odredjen je $\left\{T_{3(3)}^{(3)}\right\}$:

$$\left\{T_{3(3)}^{(3)}\right\} = \left\{e_3^{(3)}\right\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

kao i $\left[A_{0,1}\right]\left[A_{1,2}\right]$:

$$\left[A_{0,3}\right] = \left[A_{0,1}\right]\left[A_{1,2}\right]\left[A_{2,3}\right] = \left[A_{0,1}\right]\left[A_{1,2}\right]\left[I\right] = \begin{bmatrix} \cos q^1 & -\sin q^1 & 0 \\ \sin q^1 & \cos q^1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos q^2 & -\sin q^2 \\ 0 & \sin q^2 & \cos q^2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \cos q^1 & -\sin q^1 \cos q^2 & \sin q^1 \sin q^2 \\ \sin q^1 & \cos q^1 \cos q^2 & -\sin q^2 \cos q^1 \\ 0 & \sin q^2 & \cos q^2 \end{bmatrix}$$

$$Q_{3(g)} = -5 \cdot 9{,}81 \left(\begin{bmatrix} \cos q^1 & -\sin q^1 \cos q^2 & \sin q^1 \sin q^2 \\ \sin q^1 & \cos q^1 \cos q^2 & -\sin q^2 \cos q^1 \\ 0 & \sin q^2 & \cos q^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} =$$

$$= -49{,}05 \left(-\sin q^1 \cos q^2 \quad \cos q^1 \cos q^2 \quad \sin q^2 \right) \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} = -49{,}05 \sin q^2$$

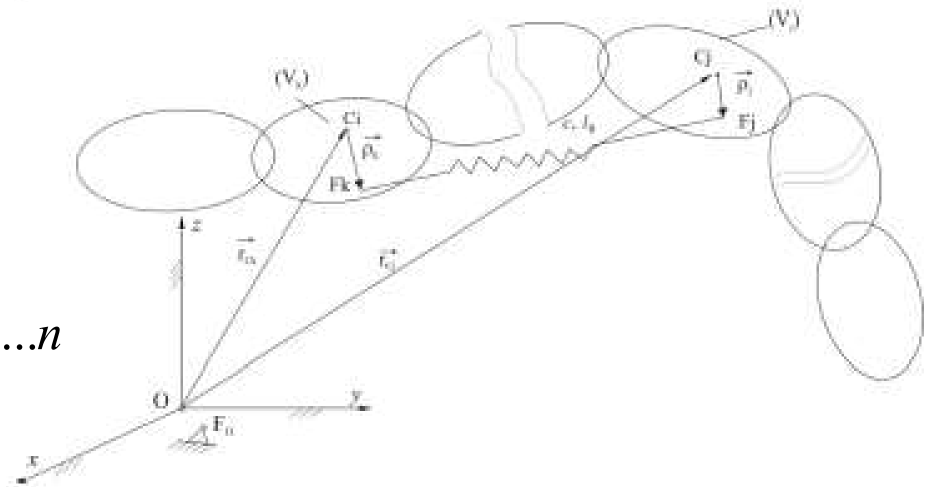
Генералисана сила од сила у опрузи

- Између тачака $F_k \in (V_i)$ i $F_j \in (V_j)$ везана је опруга крутости c слободне дужине *lo,*

где је потенцијална енергија

$$E_p^c = \frac{1}{2} c \left(\overline{F_k F_j} - l_0 \right)^2 ,$$

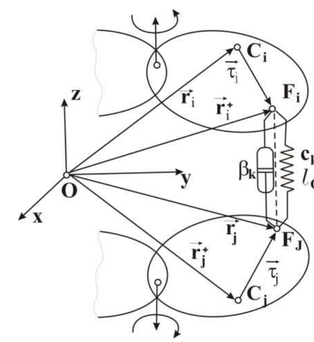
$$Q^a{}_\alpha = -\frac{\partial E_p^g(q)}{\partial q^\alpha}, \qquad \alpha = 1, 2 \ldots n$$



$$\Downarrow$$

$$Q_\alpha^c = -c \left(\overline{F_k F_j} - l_0 \right) \frac{\partial \overline{F_k F_j}}{\partial q^\alpha}, \quad \alpha = 1, 2, \ldots, n .$$

Како је $\overline{F_k F_j} = \sqrt{\vec{F_k F_j} \cdot \vec{F_k F_j}}$, $\Rightarrow$ $\dfrac{\partial \left(\overline{F_k F_j} \right)}{\partial q^\alpha} = \dfrac{\vec{F_k F_j}}{\overline{F_k F_j}} \cdot \dfrac{\partial \left(\vec{F_k F_j} \right)}{\partial q^\alpha},$



Такође, види слику

$$\overrightarrow{F_k F_j} = \bar{r}_{C_j} + \bar{\rho}_j - \bar{r}_{C_k} - \bar{\rho}_k .$$

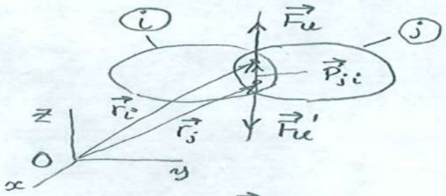
$$\frac{\partial\left(\overline{F_k F_j}\right)}{\partial q^{\alpha}} = \frac{\overrightarrow{F_k F_j}}{\overline{F_k F_j}} \cdot \left(\bar{T}_{\alpha(j)} - \bar{T}_{\alpha(k)} + \bar{\Omega}_{\alpha(j)} \times \bar{\rho}_j - \bar{\Omega}_{\alpha(k)} \times \bar{\rho}_k \right),$$

$$\overline{F_k F_j} = \left| \bar{r}_{C_j} + \bar{\rho}_j - \bar{r}_{C_k} - \bar{\rho}_k \right| .$$

Заменом, коначно добија се

$$\boxed{\begin{aligned} Q_{\alpha}^{c} = -c\left(\left|\bar{r}_{C_j} - \bar{r}_{C_k} + \bar{\rho}_j - \bar{\rho}_k\right| - l_0\right) \frac{\bar{r}_{C_j} - \bar{r}_{C_k} + \bar{\rho}_j - \bar{\rho}_k}{\left|\bar{r}_{C_j} - \bar{r}_{C_k} + \bar{\rho}_j - \bar{\rho}_k\right|} \cdot \\ \cdot \left(\bar{T}_{\alpha(j)} - \bar{T}_{\alpha(k)} + \bar{\Omega}_{\alpha(j)} \times \bar{\rho}_j - \bar{\Omega}_{\alpha(k)} \times \bar{\rho}_k \right). \end{aligned}}$$

Генералисана сила од система погонских сила

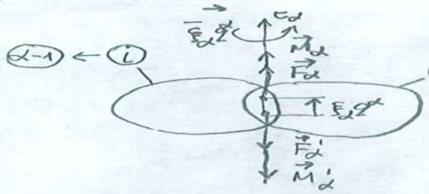


$\vec{F}_u, \vec{F}_u'$ – погонске силе (унутрашње силе система)

$$\delta A_{(u)} = \vec{F}_u \cdot \delta\vec{r}_i + \vec{F}_u' \cdot \delta\vec{r}_j = \vec{F}_u(\delta\vec{r}_i - \delta\vec{r}_j) = \vec{F}_u \cdot \delta\vec{P}_{ji}$$

$\delta\vec{P}_{ji} = \xi_j \vec{e}_j \delta q^j$ – за транслаторни зглоб

$\delta\vec{P}_{ji} = \bar{\xi}_j \vec{e}_j \delta q^j$ – за ротациони зглоб



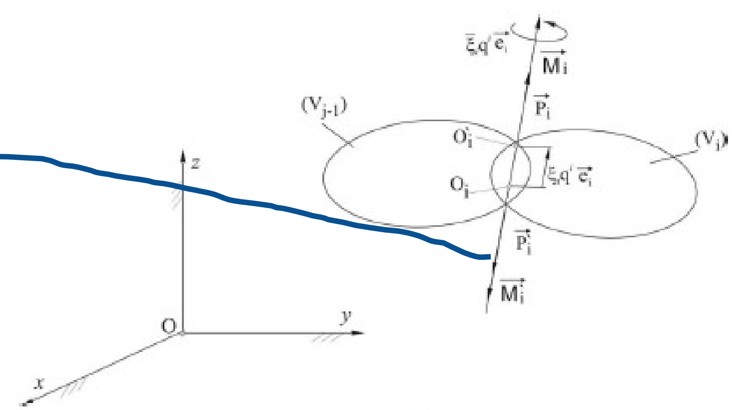
Вектори погонских сила и вектори момента погонских спрегова су колинеарни са осом кинематичког пара па следи:

$$\delta A_{(p)} = \sum_{\alpha=1}^{n} (\xi_\alpha F_\alpha \delta q^\alpha + \bar{\xi}_\alpha M_\alpha \delta q^\alpha) = \sum_{\alpha=1}^{n} \delta q^\alpha (\xi_\alpha F_\alpha + \bar{\xi}_\alpha M_\alpha)$$

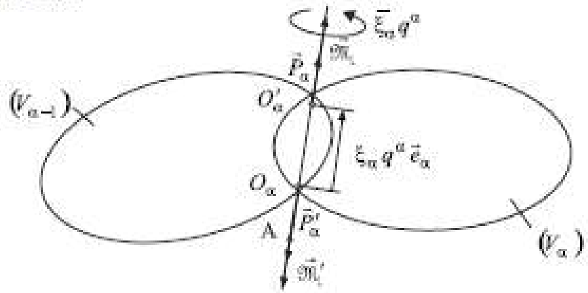
$$\delta A_{(p)} = \sum_{\alpha=1}^{n} Q_{\alpha(p)} \delta q^\alpha \quad \Rightarrow \quad Q_{\alpha(p)} = \xi_\alpha F_\alpha + \bar{\xi}_\alpha M_\alpha \ , \quad \alpha = 1, \dots, n$$

Детаљније

$$\delta q^1 = \delta q^2 = \ldots = \delta q^{\alpha-1}, \delta q^\alpha \neq 0, \delta q^{\alpha+1} = \delta q^{\alpha+2} = \ldots = \delta q^n = 0.$$



Primer 15 *Izvesti izraz za generalisanu silu od sila pogona robotskog sistema sa n stepeni slobode.*



$$\delta A\left(\bar{P}_\alpha, \bar{P}'_\alpha\right) = \bar{P}_\alpha \delta\left(AO'_\alpha \bar{e}_\alpha\right) + \bar{P}'_\alpha \delta\left(AO_\alpha \bar{e}_\alpha\right) = \bar{P}_\alpha \delta\left(AO_\alpha \bar{e}_\alpha + \xi_\alpha q^\alpha \bar{e}_\alpha\right) + \bar{P}'_\alpha \delta\left(AO_\alpha \bar{e}_\alpha\right) =$$
$$= \bar{P}_\alpha \bar{e}_\alpha \delta\left(AO_\alpha + \xi_\alpha q^\alpha\right) + \bar{P}'_\alpha \bar{e}_\alpha \delta\left(AO_\alpha\right) = \bar{P}_\alpha \bar{e}_\alpha \delta q^\alpha$$
$$\overline{AO}_\alpha = const \Rightarrow \delta\left(\overline{AO}_\alpha\right) = 0, \quad A \in osi \quad rotacije, translacije$$

$$\delta A\left(\bar{P}_\alpha, \bar{P}'_\alpha\right) = Q_{\alpha(P)} \delta q^\alpha = \bar{P}_\alpha \bar{e}_\alpha \delta q^\alpha \Rightarrow Q_{\alpha(P)} = \bar{P}_\alpha \bar{e}_\alpha$$

$$\delta A\left(\overline{M}_\alpha, \vec{M}'_\alpha\right) = \overline{M}_\alpha \delta\left(\bar{\xi}_\alpha q^\alpha \bar{e}_\alpha\right) + \vec{M}'_\alpha \delta(0) = \vec{M}_\alpha \bar{e}_\alpha \delta q^\alpha$$

$$\delta A\left(\vec{M}_\alpha, \vec{M}'_\alpha\right) = Q_{\alpha(M)} \delta q^\alpha = \vec{M}_\alpha \bar{e}_\alpha \delta q^\alpha \Rightarrow Q_{\alpha(M)} = \vec{M}_\alpha \bar{e}_\alpha$$

$$\boxed{Q_{\alpha(pog)} = Q_{\alpha(P)} + Q_{\alpha(M)} = \xi_\alpha \bar{P}_\alpha \bar{e}_\alpha + \bar{\xi}_\alpha \vec{M}_\alpha \bar{e}_\alpha}$$