

Ovaj dokument sadrži zadatke iz predmeta Elektrotehnika na Mašinskom fakultetu u Beogradu. Zadaci su koncipirani tako da prate tematske celine sa predavanja i omogućavaju vežbanje ključnih pojmova i metoda. Zadaci su numerisani i raspoređeni prema oblastima koje se obrađuju na predavanjima. Preporučuje se da pokušate samostalno da rešite svaki zadatak, a zatim uporedite svoj postupak sa ponuđenim rešenjima. Posebnu pažnju obratite na analizu vektorskih veličina, jedinica i fizičkih pretpostavki. U nekim zadacima data su i potpitanja koja podstiču razumevanje i diskusiju. Kroz zadatke ćete uočiti sledeće oznake:



Za važne komentare i mesta gde studenti često greše.



Za dodatna pitanja vezano za zadatak.



Za one koji žele da rade više - ne dolazi na ispitu!



Za ideju, komentar na izvođenje.



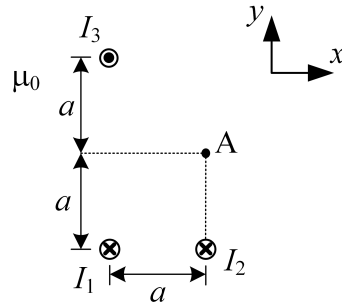
Za preporuku uz zadatak.

Konsultacije: Za dodatna pojašnjenja i pitanja u vezi sa predmetom možete me kontaktirati putem:

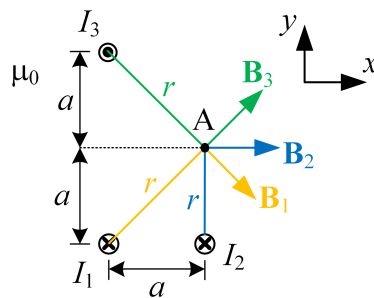
- Email: vbecejac@mas.bg.ac.rs
- Uživo: tokom termina konsultacija **sredom u 10 časova** u Laboratoriji za elektrotehniku i elektroniku (soba 2, pored Studentske službe).

1 Elektromagnetizam

1. Kroz tri veoma dugačka, tanka, paralelna pravolinijska provodnika, koji su u poprečnom preseku raspoređeni kao na slici, postoje struje $I_1 = I_3 = 1$ A i $I_2 = 2$ A. Izračunati vektor magnetske indukcije u tački A, ako je $a = 2$ cm.



REŠENJE: Algebarski intenzitet vektora magnetske indukcije, prema referentnim smerovima prikazanim na slici od dugačkog provodnika je $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$.



Primitimo da, kako važi $I_1 = I_3$, zbog simetrije imamo samo x -komponentu.

$$B_{1x} = B_{3x} = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi a \sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\mu_0 I_1}{4\pi a},$$

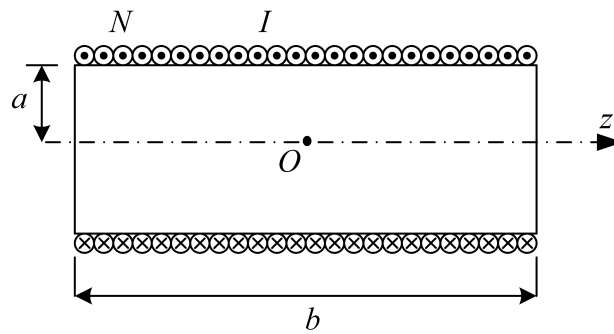
dok je

$$\mathbf{B}_2 = \frac{\mu_0 I_2}{2\pi a} \mathbf{i}_x.$$

Konačno,

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= 2B_{1x} \mathbf{i}_x + \mathbf{B}_2 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi a} \mathbf{i}_x + \frac{\mu_0 I_2}{2\pi a} \mathbf{i}_x \\ &= \frac{\mu_0}{2\pi a} (I_1 + I_2) \mathbf{i}_x = \frac{4\pi \cdot 10^{-7}}{2\pi \cdot 2 \cdot 10^{-2}} 3 \mathbf{i}_x \\ &= 3 \cdot 10^{-5} \mathbf{i}_x = 30 \mu\text{T} \mathbf{i}_x. \end{aligned}$$

2. Izračunati magnetsku indukciju od dugačkog solenoida, kružnog poprečnog preseka, poluprečnika $a = 1$ cm i dužine $b = 50\pi$ cm, smatrati da je $b \gg a$. Broj zavojava na solenoidu je $N = 500$ i u njima je uspostavljena stalna struja jačine $I = 1$ A.



REŠENJE: Solenoid je nosač na koji je ravnomerno i gusto namotana izolovana žica u jednom sloju. Na ovaj način je dobijen spiralni namotaj. Na slici su zavojsi nacrtani razmaknuti, zbog preglednosti, ali se u praksi postavljaju toliko blizu da im se izolacije dodiruju.

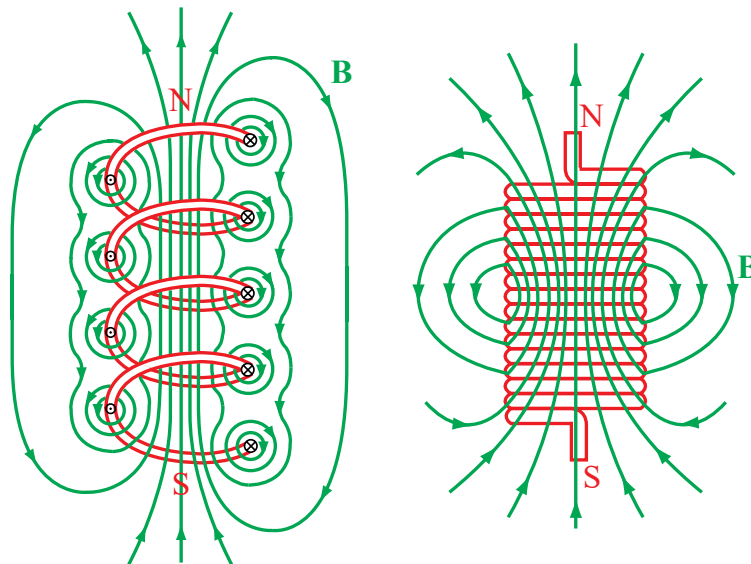
Magnetska indukcija dugačkog solenoida je data formulom

$$B = \frac{\mu_0 NI}{b} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 500 \cdot 1}{50\pi \cdot 10^{-2}} = 40 \cdot 10^{-5} = 400 \mu\text{T}.$$

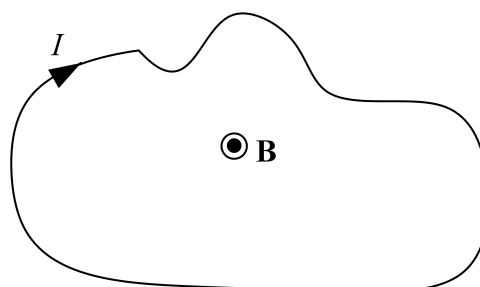
Jačina magnetskog polja dugačkog solenoida je homogena unutar njega, sve dok se ne približimo otvorima.

Na slici su prikazane linije polja vektora magnetske indukcije ređe namotane žice oko držača, linije polja, po pravilu izlaze iz svernog pola (N) i ulaze u južni pol (S), praveći u ovom slučaju veliku petlju izvan solenoida. Vidljivo je da dosta linija „beži” van solenoida. Unutar solenoida polje je i dalje prisutno, ali je manje homogeno i slabije koncentrisano. Dakle, imamo veći rasipni fluks.

Kod gusto zbijenih zavojsaka, linije su veoma guste unutar solenoida i gotovo sve su paralelne. Ukoliko je solenoid teorijski beskonačno dugačak, magnetske indukcije van njega nema.



3. Kontura prikazana na slici se nalazi u homogenom magnetskom polju indukcije \mathbf{B} , kao na slici. U konutri je upostavljena stalna struja jačine I . Odrediti magnetsku silu na konturu.



REŠENJE: Magnetska sila koja deluje na jedan strujni element konture je data izrazom

$$d\mathbf{F} = I d\mathbf{l} \times \mathbf{B}.$$

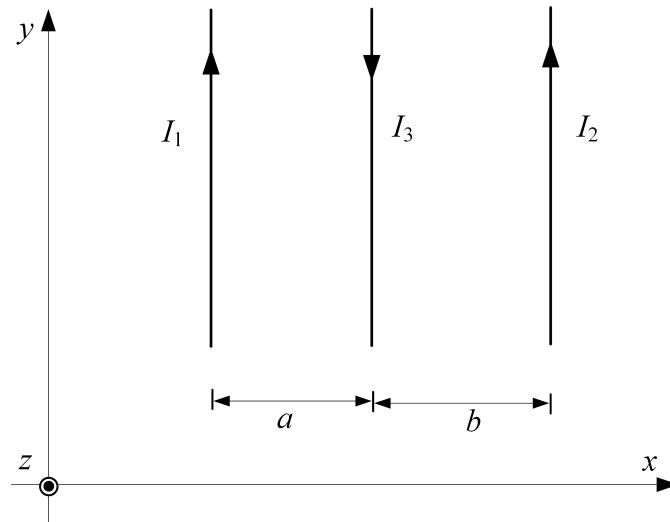
Rezultantnu silu dobijamo vektorskim sabiranjem sila na sve strujne elemente konture, tj.

$$\mathbf{F} = I \cdot \left(\oint_C d\mathbf{l} \right) \times \mathbf{B} = 0.$$



Rezultantna magnetska sila na strujnu **konturu** (zatvoren put) u **homogenom** magnetskom polju je uvek nula. Međutim, iako je ukupna sila nula, na različite delove konture mogu delovati lokalne magnetske sile, koje mogu izazvati moment sile.

4. Tri dugačka pravolinijska provodnika leže u ravni crteža, kao na slici, pri čemu je $a = 25$ mm i $b = 30$ mm. U provodnicima su uspostavljene stalne struje $I_1 = 10$ A, $I_2 = 15$ A i $I_3 = 20$ A. Izračunati vektor podužne magnetske sile na provodnik sa strujom I_3 , \mathbf{F}'_3 .



REŠENJE: Potrebno je odrediti izraz za vektor magnetske indukcije koji provodnici sa strujama I_1 i I_2 stvaraju na mestu provodnika sa strujom I_3 . Dobijamo

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi a} (-\mathbf{i}_z) + \frac{\mu_0 I_2}{2\pi b} \mathbf{i}_z = \frac{\mu_0}{2\pi} \left(-\frac{I_1}{a} + \frac{I_2}{b} \right) \mathbf{i}_z.$$

Sada je

$$\begin{aligned} d\mathbf{F}_3 &= I_3 d\mathbf{l}_3 \times \mathbf{B} = I_3 d\mathbf{l} \cdot (-\mathbf{i}_y) \times \frac{\mu_0}{2\pi} \left(-\frac{I_1}{a} + \frac{I_2}{b} \right) \mathbf{i}_z \\ &= \frac{\mu_0 I_3}{2\pi} d\mathbf{l} \cdot \left(-\frac{I_1}{a} + \frac{I_2}{b} \right) (-\mathbf{i}_x), \end{aligned}$$

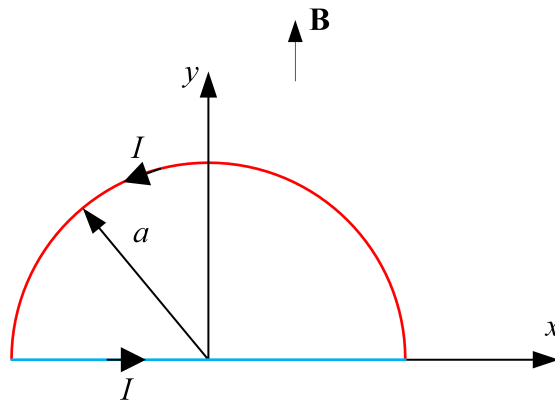
pa je

$$\mathbf{F}_3 = \frac{\mu_0 I_3 l}{2\pi} \cdot \left(\frac{I_1}{a} - \frac{I_2}{b} \right) \mathbf{i}_x.$$

Podužna magnetska sila je

$$\begin{aligned}\mathbf{F}'_3 &= \frac{\mu_0 I_3}{2\pi} \left(\frac{I_1}{a} - \frac{I_2}{b} \right) \mathbf{i}_x \\ &= \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 20}{2\pi} \left(\frac{10}{25 \cdot 10^{-3}} - \frac{15}{30 \cdot 10^{-3}} \right) \mathbf{i}_x \\ &= -400 \mathbf{i}_x \text{ } \mu\text{N/m.}\end{aligned}$$

5. Na slici je prikazana kontura koja se sastoji iz jednog polukružnog dela, poluprečnika a i jednog pravolinijskog segmenta dužine $2a$. U konturi je uspostavljena struja jačine I i nalazi se u homogenom magnetskom polju, indukcije \mathbf{B} . Odrediti magnetsku silu na **polukružni** deo konture.



REŠENJE: I način: Kako se kontura nalazi u homogenom magnetskom polju, rezultantna magnetska sila na nju je jednaka nuli. Dakle,

$$\mathbf{F}_{\text{rez}} = \mathbf{F}_{\text{prav}} + \mathbf{F}_{\text{lučni}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{F}_{\text{lučni}} = -\mathbf{F}_{\text{prav}}.$$

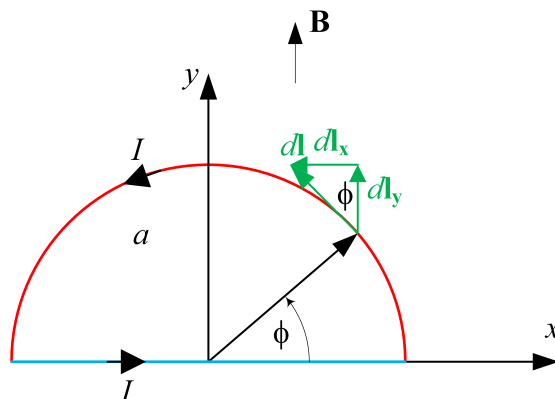
Sila na pravolinijski deo je

$$\mathbf{F}_{\text{prav}} = I \cdot \left(\int_M^N d\mathbf{l} \right) \times \mathbf{B} = I \left(\int_M^N d\mathbf{l} \cdot \mathbf{i}_x \right) \times B \cdot \mathbf{i}_y = I \cdot 2a \cdot \mathbf{i}_x \times B \cdot \mathbf{i}_y = 2IaB \cdot \mathbf{i}_z,$$

pa je

$$F_{\text{lučni}} = -2IaB \cdot \mathbf{i}_z.$$

II način: Strujni element $d\mathbf{l}$ se može razložiti na komponentne



$$d\mathbf{l} = a(-\sin\phi\mathbf{i}_x + \cos\phi\mathbf{i}_y) d\phi$$

pa je sila na jedan strujni element

$$\begin{aligned} d\mathbf{F}_{\text{lučni}} &= Ia(-\sin\phi\mathbf{i}_x + \cos\phi\mathbf{i}_y) d\phi \times B \cdot \mathbf{i}_y \\ &= -IBa \sin\phi d\phi \cdot \mathbf{i}_z, \end{aligned}$$

a ukupna sila se dobija integracijom

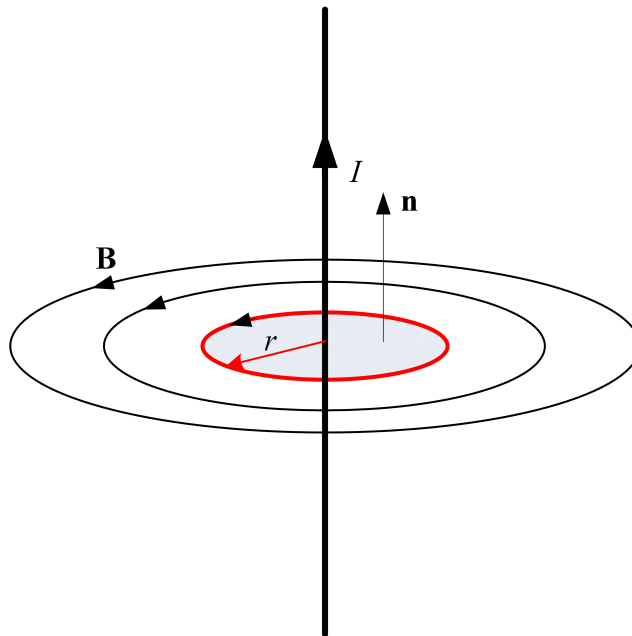
$$\mathbf{F}_{\text{lučni}} = -IBa \int_0^\pi \sin\phi d\phi \mathbf{i}_z = IBa \cos\phi \Big|_0^\pi \mathbf{i}_z = -2IBa \cdot \mathbf{i}_z.$$

6. (Za samostalni rad) Dva dugačka pravolinijska provodnika se nalaze na udaljenosti od 2,5 cm. Sila po jedinici dužine koju svaka žica deluje na drugu je $40 \mu\text{N/m}$. Struja u jednoj žici iznosi 0,6 A. Žice se međusobno odbijaju. **a)** Izračunati struju u drugoj žici i **b)** da li su struje istog ili suprotnog smera?

REZULTAT: a) $I_2 = 8,33 \text{ A}$ i b) suprotnog smera.

7. Primenom Amperovog zakona izvesti izraz za jačinu magnetskog polja u okolini beskonačno dugačkog pravolinijskog provodnika u kome je uspostavljena stalna struja jačine I .

REŠENJE: Amperov zakon možemo koristiti u situacijama sa visokim stepenom simetrije (cilindrična i ravnska geometrija). U ovom slučaju je u pitanju cilindrična geometrija. Zbog simetrije, linije polja vektora magnetske indukcije su koncentrične kružnice centrirane na osi provodnika.



Uzmimo jednu Amperovu konturu koja ima oblik kružnice poluprečnika r . Usmerenje konture se poklapa sa smerom linija polja magnetske indukcije, kao na slici. Amperov zakon je

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \cdot \sum_{\text{kroz } C} I = \mu_0 \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}.$$

Dakle, cirkulacija vektora magnetske indukcije jednaka je struji koja je prošla kroz površ oslonjenu na konturu, pomnožena za konstantu, permeabilnost vakuuma.

U svim tačkama Amperove konture, vektor magnetske indukcije je konstantan i kao takav može izaći ispred integrala, pa se dobija

$$B \cdot 2\pi r = \mu_0 I \implies B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}.$$



Da li se primenom Amperovog zakona može odrediti magnetska indukcija u okolini provodnika konačnih dimenzija?



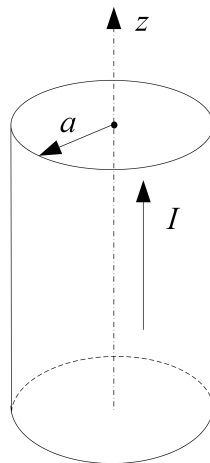
U opštem slučaju Amperov zakon NE važi. Prvi koji je dao tačan oblik Amperovog zakona bio je škotski fizičar i matematičar Džejms Klerk Maksvel, koji je u svom čuvenom delu iz 1865. godine *A Dynamical Theory of the Electromagnetic Field* demonstrirao da električno i magnetsko polje putuju kroz prostor kao talas brzinom svetlosti. Uopšten Amperov zakon koji važi i za slučaj brzopromenljivih polja glasi

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \left(\mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{S}.$$

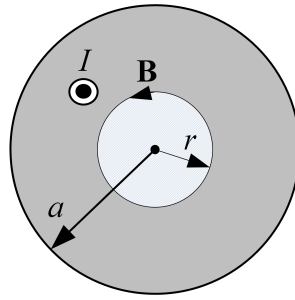
Na ovaj način je Maksvel predvideo i da električno polje može da indukuje magnetsko. Maksvelovo predviđanje je potvrđeno nešto kasnije kada je 1888. godine nemački fizicar Hajnrih Herc eksperimentalno dobio elektromagnetski talas.

Amperov zakon koji je ovde spominjan važi ekzaktno za stacionarna polja u vakuumu.

8. Primenom Amperovog zakona odrediti izraz za vektor magnetske indukcije u proizvoljnoj tački prostora od dugačkog pravolinijskog provodnika poluprečnika a u kome je uspostavljena stalna struja jačine I , ravnomerno raspoređena po poprečnom preseku provodnika.



REŠENJE: U zadatku imamo cilindričnu geometriju. Linije polja vektora magnetske indukcije su koncentrične kružnice centrirane na osi provodnika. Može se primeniti Amperov zakon. Razlikujemo dva slučaja, kada određujemo vektor magnetske indukcije unutar i izvan provodnika. Posmatrajmo poprečni presek provodnika, kao na slici.



Za $r \leq a$ je

$$B \cdot 2\pi r = \mu_0 \underbrace{\frac{I}{a^2\pi} r^2\pi}_J \implies B = \frac{\mu_0 I r}{2\pi a^2},$$

dok je vektor

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I r}{2\pi a^2} \mathbf{i}_\phi,$$

gde je sa \mathbf{i}_ϕ označen cirkularan ort, uperen u smeru suprotnom od kretanja kazaljke na časovniku.

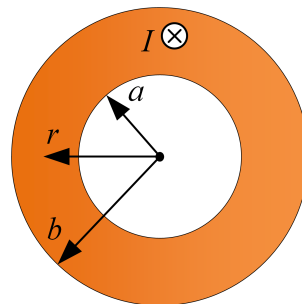
Za $r > a$ je

$$B \cdot 2\pi r = \mu_0 I \implies B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r},$$

dok je vektor

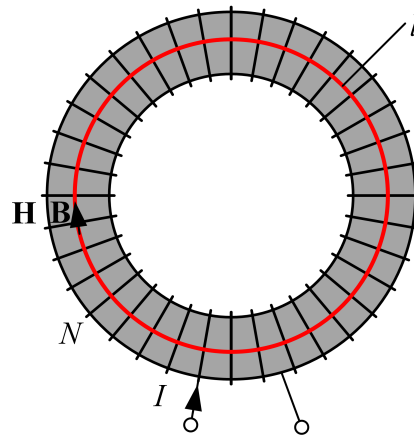
$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \mathbf{i}_\phi.$$

9. (Za samostalan rad) Dat je veoma dugačak provodnik unutrašnjeg poluprečnika a i spoljašnjeg poluprečnika b . U provodniku je upostavljena stalna struja jačine I , kao na slici. Skicirati linije polja vektora \mathbf{B} i označiti smer tog vektora. Odrediti intenzitet vektora magnetske indukcije u funkciji odstojanja od ose provodnika r , za $0 < r < +\infty$.



REZULTAT: Linije polja su koncentrične kružnice, centrirane na osi provodnika, usmerene u smeru kretanja kazaljke na časovniku (negativan matematički smer). Za $r \leq a$ je $B = 0$, za $a < r < b$ je $B = \frac{\mu_0 I (r^2 - a^2)}{2\pi (b^2 - a^2) r}$ i $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$ za $r \geq b$.

10. Dužina srednje linije tankog torusa od kartona je dužine $l = 0,2\pi$ m. Na jezgro je ravnomerno i gusto namotano $N = 500$ zavojaka žice i u njima je uspostavljena stalna struja jačine $I = 1$ A. Izračunati vektore jačine magnetskog polja i magnetske indukcije u torusu. Da li bi se jačina magnetskog polja i magnetske indukcije promenile ukoliko se umesto kartonskog torusa upotrebi gvozdeni torus sa $\mu_r = 1000$?



REŠENJE: Ukoliko je torus tanak i ukoliko se magnetsko rasipanje zanemaruje, tada je vektor \mathbf{B} jednak u celom jezgru. Primenom Amperovog zakona na srednju liniju torusa, dobija se

$$B \cdot l = \mu_0 N I \implies B = \frac{\mu_0 N I}{l} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 500 \cdot 1}{0,2\pi} = 1 \text{ mT}.$$

Iz relacije $B = \mu_0 H$ dobijamo da jačina magnetskog polja

$$H = \frac{N I}{l} = 795,77 \frac{\text{A}}{\text{m}}.$$

Ukoliko bi se umesto kartonskog jezgra upotrebilo gvozdeno jezgro, jačina magnetskog polja se ne bi promenila, ali bi se promenila magnetska indukcija

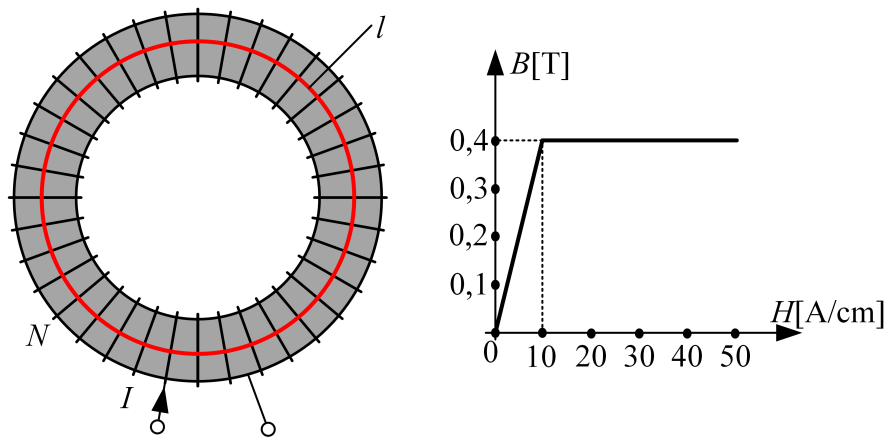
$$B = \frac{\mu_0 \mu_r N I}{l} = 1 \text{ T}.$$



Dakle, gvozdeni torus višestruko povećava magnetsku indukciju, što je osnova za upotrebu feromagnetnih materijala u transformatorima, motorima i elektromagnetima.

Torosi se u elektrotehnici koriste zbog brojnih praktičnih prednosti koje proističu iz njihovog oblika i elektromagnetskih karakteristika. Osnovna prednost torusa je što omogućava zatvoren tok magnetnog polja. Kod torusa linije polja magnetske indukcije ostaju zatvorene unutar jezgra, što drastično smanjuje curenje fluksa u okolinu. Ovo je posebno važno kod uređaja koji zahtevaju visoku efikasnost i niske elektromagnetske smetnje, kao što su transformatori.

11. Dužina srednje linije tankog torusa je dužine $l = 0,4 \text{ m}$. Na jezgro je ravnomerno i gusto namotano $N = 1000$ zavojava žice i u njima je uspostavljena stalna struja jačine $I = 1,6 \text{ A}$. Karakteristika magnetisanja materijala od koga je jezgro načinjeno je prikazana na slici. Izračunati vektor magnetske indukcije u jezgru.

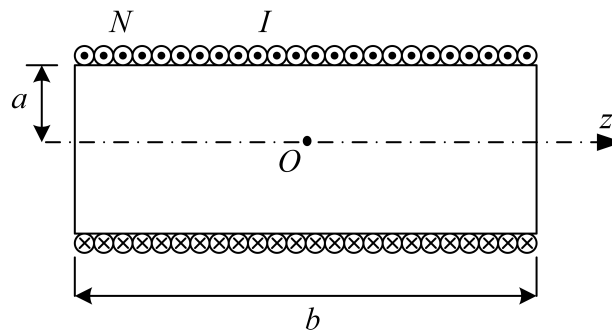


REŠENJE: Primenom Amperovog zakona dobijamo

$$H \cdot l = NI \implies H = \frac{NI}{l} = \frac{1000 \cdot 1,6}{0,4} = 4000 \frac{\text{A}}{\text{m}} = 40 \frac{\text{A}}{\text{cm}}.$$

Sa karakteristike magnetisanja materijala dobijamo da je $B = 0,4$ T.

12. (Za samostalni rad) Primenom Amperovog zakona izvesti izraz za vektor magnetske indukcije unutar dugačkog solenoida, kružnog poprečnog preseka, poluprečnika a koji ima N gusto namotanih zavojaka sa strujom jačine I i dužinu b ($b \gg a$).

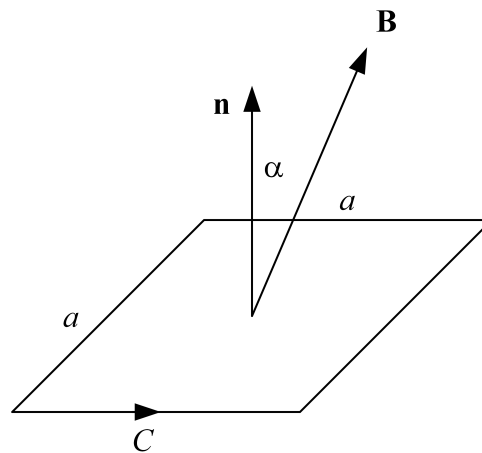


REZULTAT: $B = \frac{\mu_0 NI}{b}$.



Da li se primenom Amperovog zakona može odrediti i magnetska indukcija kratkog solenoida? Da li je u ovom zadatku bitan poprečni presek solenoida? Objasniti.

13. Kvadratna kontura, dužine stranice a , nalazi se u homogenom magnetskom polju indukcije B , kao na slici. Odrediti izraz za magnetski fluks kroz površinu oslonjenu na ovu konturu. Normalna na površ konture i vektor magnetske indukcije zaklapaju ugao α .



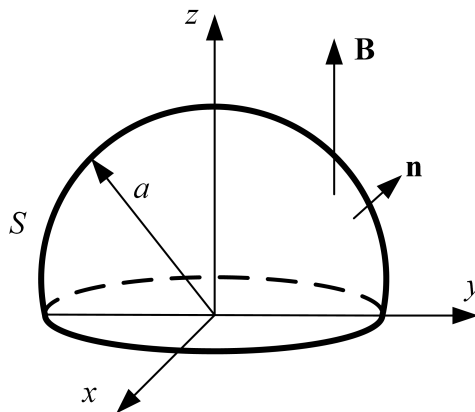
REŠENJE: Magnetski fluks je dat izrazom

$$\Phi = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \int_S B \cdot dS \cdot \cos(\angle \mathbf{B}, d\mathbf{S}) = B \cdot a^2 \cos \alpha.$$



Da li će izraz za fluks zavisiti od oblika površi koja se osloni na kvadratnu konturu?

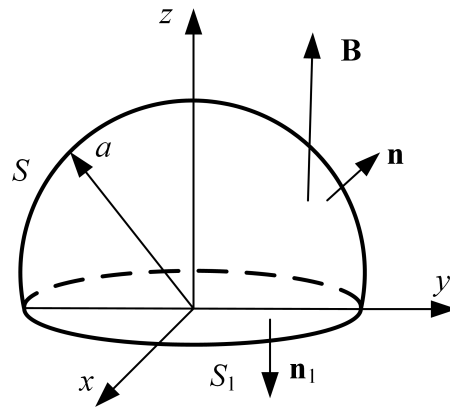
14. Površ S ima oblik polusfere poluprečnika $a = 1$ cm, kao na slici. Polusfera se nalazi u homogenom magnetskom polju $\mathbf{B} = 1\mathbf{i}_z$ T. Izračunati magnetski fluks kroz površ S u odnosu na datu normalu \mathbf{n} .



REŠENJE: Najlakši način da se reši ovaj zadatak je da primenimo zakon o konzervaciji magnetskog fluksa, koji govori da je fluks vektora magnetske indukcije kroz **zatvorenu** površ jednak nuli. Matematički

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0.$$

Kako je u zadatku data polusferna površ koja je **otvorena**, potrebno je nadodati još jednu otvorenu površ, oblika kružnog diska S_1 , kao na slici.



Na ovaj način je dobijena zatvorena površ

$$\oint_{S \cup S_1} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \underbrace{\int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}}_{\Phi} + \underbrace{\int_{S_1} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}}_{\Phi_1} = 0. \quad (1)$$

Integral za Φ_1 možemo dobiti relativno jednostavno

$$\Phi_1 = \int_{S_1} B_0 \mathbf{i}_z \cdot d\mathbf{S} \cdot (-\mathbf{i}_z) = -B_0 a^2 \pi = -1 \cdot 10^{-4} \pi = -314 \mu\text{WB},$$

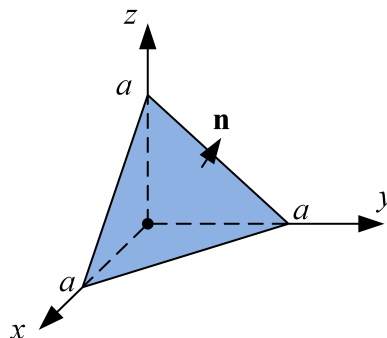
a iz relacije (1) je traženi fluks jednak

$$\Phi = 314 \mu\text{WB}.$$

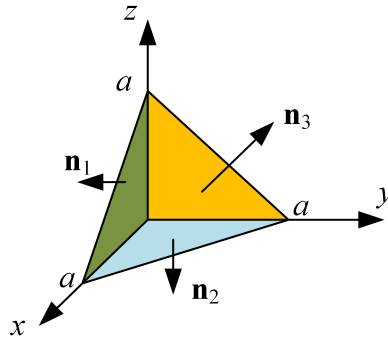
15. Površ S ima oblik jednakostraničnog trougla sa temenima u tačkama $A(a, 0, 0)$, $B(0, a, 0)$ i $C(0, 0, a)$. Površ se nalazi u homogenom magnetskom polju indukcije

$$\mathbf{B} = B_0 (3\mathbf{i}_x + 2\mathbf{i}_y + \mathbf{i}_z).$$

Odredizi izraz za magnetski fluks kroz površ S prema normali prikazanoj na slici.



REŠENJE: Nadodajmo **otvorenoj** površi iz postavke zadatke još tri površi, oblika jednakostraničnog pravouglog trougla, katete dužine a , kao na slici. Na ovako dobijenu piramidu, možemo primeniti zakon o konzervaciji magnetskog fluksa.



Dakle,

$$\oint_{S \cup S_1 \cup S_2 \cup S_3} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \underbrace{\int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}}_{\Phi} + \underbrace{\int_{S_1} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}}_{\Phi_1} + \underbrace{\int_{S_2} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}}_{\Phi_2} + \underbrace{\int_{S_3} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}}_{\Phi_3} = 0. \quad (1)$$

Sada je

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= \int_{S_1} B_0 (3\mathbf{i}_x + 2\mathbf{i}_y + \mathbf{i}_z) \cdot d\mathbf{S} \cdot (-\mathbf{i}_y) = -2B_0 \frac{a^2}{2} \\ \Phi_2 &= \int_{S_1} B_0 (3\mathbf{i}_x + 2\mathbf{i}_y + \mathbf{i}_z) \cdot d\mathbf{S} \cdot (-\mathbf{i}_z) = -B_0 \frac{a^2}{2} \\ \Phi_3 &= \int_{S_1} B_0 (3\mathbf{i}_x + 2\mathbf{i}_y + \mathbf{i}_z) \cdot d\mathbf{S} \cdot (-\mathbf{i}_x) = -3B_0 \frac{a^2}{2}. \end{aligned}$$

Iz realcije (1) je sada

$$\Phi = -\Phi_1 - \Phi_2 - \Phi_3 = 6B_0 \frac{a^2}{2} = 3B_0 a^2.$$