7 Неодређени интеграли - део 1

7.1 Примитивна функција и основна правила интеграције

Нека је функција $f(x)$ дефинисана на неком интервалу I. Функцију $F(x)$ зовемо *примитивном функцијом* функције $f(x)$, ако важи

$$F'(x) = f(x) \quad \text{за све } x \in I.$$

Постоји бесконачно много примитивних функција функције $f(x)$ и све се разликују до на константу: $(F(x)+C)' = f(x)$.

Скуп свих примитивних функција функције $f(x)$ се зове *неодређени интеграл* функције $f(x)$:

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C.$$

У горњој дефиницији функција $f(x)$ се зове *интегранд*, а C је произвољна константа.

Интеграција је процес супротан диференцирању, па таблица основних интеграла следи из таблице извода. У наставку су дати неки основни интеграли, при чему ће они који не следе директно из таблице извода бити изведени касније.

$* \int x^a\,\mathrm{d}x = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C \quad (a \neq -1)$	$* \int \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln\lvert x\rvert + C$
$* \int e^x\,\mathrm{d}x = e^x + C$	$* \int a^x\,\mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad (a > 0, a \neq 1)$
$* \int \sin x\,\mathrm{d}x = -\cos x + C$	$* \int \cos x\,\mathrm{d}x = \sin x + C$
$* \int \operatorname{sh} x\,\mathrm{d}x = \operatorname{ch} x + C$	$* \int \operatorname{ch} x\,\mathrm{d}x = \operatorname{sh} x + C$
$* \int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$	$* \int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$
$* \int \frac{\mathrm{d}x}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C$	$* \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C$
$* \int \frac{\mathrm{d}x}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left\lvert\frac{a+x}{a-x}\right\rvert + C$	$* \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\lvert x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\rvert + C.$

За неодређени интеграл важе следеће особине:

$$\int af(x)\,\mathrm{d}x = a\int f(x)\,\mathrm{d}x \quad (a = \text{const}); \qquad \int (f(x) \pm g(x))\,\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x \pm \int g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Важно је поменути и интеграле који нису елементарни, тј. који се не могу представити преко елементарних функција. Примери таквих интеграла су:

$$\int \sqrt{1-x^4}\,\mathrm{d}x, \quad \int e^{-x^2}\,\mathrm{d}x, \quad \int \frac{e^{-x}}{x}\,\mathrm{d}x, \quad \int \frac{\mathrm{d}x}{\ln x}, \quad \int \sin x^2\,\mathrm{d}x, \quad \int \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x, \ldots$$

Пример 7.1. Израчунати интеграле:

а) $\int (2+3x^2-\cos x)\,\mathrm{d}x = 2\int \mathrm{d}x + 3\int x^2\,\mathrm{d}x - \int \cos x\,\mathrm{d}x = 2x + 3\cdot\frac{x^3}{3} - \sin x + C = 2x + x^3 - \sin x + C;$

б) $\int \frac{(x+1)^2}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{x^2+2x+1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \int x^{3/2}\,\mathrm{d}x + 2\int x^{1/2}\,\mathrm{d}x + \int x^{-1/2}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{5}x^{5/2} + \frac{4}{3}x^{3/2} + 2x^{1/2} + C;$

в) $\int \frac{x^2}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{x^2+1-1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \int \mathrm{d}x - \int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = x - \operatorname{arctg} x + C$

г) $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2(1-x^2)}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1-x^2+x^2}{x^2(1-x^2)}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}x}{x^2} + \frac{\mathrm{d}x}{1-x^2} = -\frac{1}{x} + \frac{1}{2}\ln\left\lvert\frac{x+1}{x-1}\right\rvert + C;$

д) $\int \cos^2\frac{x}{2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1+\cos x}{2}\,\mathrm{d}x = \frac{x}{2} + \frac{\sin x}{2} + C;$

ђ) $\int \operatorname{tg}^2 x\,\mathrm{d}x = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \operatorname{tg} x - x + C;$

е) $\int \frac{2^x+5^x}{10^x}\,\mathrm{d}x = \int \left(\frac{1}{5}\right)^x \mathrm{d}x + \int \left(\frac{1}{2}\right)^x \mathrm{d}x = \frac{\left(\frac{1}{5}\right)^x}{\ln\frac{1}{5}} + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^x}{\ln\frac{1}{2}} + C.$

7.2 Интеграција методом смене

Смена у интегралу одговара изводу сложене функције.

Нека је $F(x)$ примитивна функција функције $f(x)$,

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C.$$

Ако је $x = x(t)$ диференцијабилна функција, по правилу за извод сложене функције је

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F(x(t)) = F'(x(t))x'(t) = f(x(t))x'(t).$$

Интеграцијом претходне једнакости добијамо

$$F(x(t)) + C = \int f(x(t))x'(t)\,\mathrm{d}t, \quad \text{тј.} \quad \int f(x)\,\mathrm{d}x = \int f(x(t))x'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Пример 7.2. Израчунати интеграле:

а) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{1+3x}} = \begin{bmatrix} 1+3x = t \\ 3\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\int t^{-1/3}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{3}\frac{t^{2/3}}{\frac{2}{3}} + C = \frac{1}{2}\sqrt[3]{(1+3x)^2} + C;$

б) $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{x^3+1}} = \begin{bmatrix} x^3+1 = t \\ 3x^2\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\int t^{-1/2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{3}\frac{t^{1/2}}{\frac{1}{2}} + C = \frac{2}{3}\sqrt{x^3+1} + C;$

в) $\displaystyle\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{x^4+2x^2+1} = \int \frac{x\,\mathrm{d}x}{(x^2+1)^2} = \begin{bmatrix} x^2+1 = t \\ 2x\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}t}{t^2} = -\frac{1}{2t} + C = -\frac{1}{2(x^2+1)} + C;$

г) $\displaystyle\int xe^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \begin{bmatrix} -x^2 = t \\ -2x\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t \end{bmatrix} = -\frac{1}{2}\int e^t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}e^t + C = -\frac{1}{2}e^{-x^2} + C;$

д) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{e^x+e^{-x}} = \int \frac{e^x\,\mathrm{d}x}{e^{2x}+1} = \begin{bmatrix} e^x = t \\ e^x\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t \end{bmatrix} = \int \frac{\mathrm{d}t}{t^2+1} = \operatorname{arctg} t + C = \operatorname{arctg} e^x + C;$

ђ) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{\ln x}}{x}\,\mathrm{d}x = \begin{bmatrix} \ln x = t \\ \mathrm{d}x/x = \mathrm{d}t \end{bmatrix} = \int \sqrt{t}\,\mathrm{d}t = \frac{2}{3}t^{3/2} + C = \frac{2}{3}(\ln x)^{3/2} + C;$

е) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x\ln x\ln\ln x} = \begin{bmatrix} \ln x = t \\ \mathrm{d}x/x = \mathrm{d}t \end{bmatrix} = \int \frac{\mathrm{d}t}{t\ln t} = \begin{bmatrix} \ln t = u \\ \mathrm{d}t/t = \mathrm{d}u \end{bmatrix} = \int \frac{\mathrm{d}u}{u} = \ln|u| + C = \ln|\ln\ln x| + C.$

Пример 7.3. Израчунати интеграле:

а) $\displaystyle\int \operatorname{tg} x\,\mathrm{d}x = \int \frac{\sin x}{\cos x}\,\mathrm{d}x = \begin{bmatrix} \cos x = t \\ -\sin x\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t \end{bmatrix} = -\int \frac{\mathrm{d}t}{t} = -\ln|t| + C = -\ln|\cos x| + C;$

б) $\displaystyle\int \frac{\sin x}{1-\cos x}\,\mathrm{d}x = \begin{bmatrix} 1-\cos x = t \\ \sin x\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t \end{bmatrix} = \int \frac{\mathrm{d}t}{t} = \ln|t| + C = \ln|1-\cos x| + C$

в) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{2+\sqrt{x}} = \begin{bmatrix} \sqrt{x} = t,\ x = t^2, \\ \mathrm{d}x = 2t\,\mathrm{d}t \end{bmatrix} = \int \frac{2t\,\mathrm{d}t}{2+t} = 2\int \frac{t+2-2}{2+t}\,\mathrm{d}t = 2\int \mathrm{d}t - 4\int \frac{\mathrm{d}t}{2+t}$

$\displaystyle= 2t - 4\ln|2+t| + C = 2\sqrt{x} - 4\ln(2+\sqrt{x}) + C;$

г) $\displaystyle\int x\sqrt{x+1}\,\mathrm{d}x = \begin{bmatrix} x+1 = t^2 \\ \mathrm{d}x = 2t\,\mathrm{d}t \end{bmatrix} = \int (t^2-1)t\cdot 2t\,\mathrm{d}t = 2\int (t^4-t^2)\,\mathrm{d}t = \frac{2}{5}t^5 - \frac{2}{3}t^3 + C$

$\displaystyle= \frac{2}{5}\sqrt{(x-1)^5} - \frac{2}{3}\sqrt{(x-1)^3} + C;$

д) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}\,\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{x}-1} = \begin{bmatrix} x = t^6, \sqrt{x} = t^3,\ \sqrt[3]{x} = t^2, \\ \mathrm{d}x = 6t^5\,\mathrm{d}t \end{bmatrix} = \int \frac{t^3}{t^2-1}\cdot 6t^5\,\mathrm{d}t = 6\int \left(t^6+t^4+t^2+1-\frac{1}{t^2-1}\right)\mathrm{d}t$

$\displaystyle= 6\left(\frac{\sqrt[6]{x^7}}{7} + \frac{\sqrt[6]{x^5}}{5} + \frac{\sqrt{x}}{3} + \sqrt[6]{x} + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt[6]{x}-1}{\sqrt[6]{x}+1}\right|\right) + C;$

ђ) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x+\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^5}} = \begin{bmatrix} x = t^3, \\ \mathrm{d}x = 3t^2\,\mathrm{d}t \end{bmatrix} = \int \frac{3t^2\,\mathrm{d}t}{t^3+t+t^5} = 3\int \frac{t\,\mathrm{d}t}{1+t^2+t^4} = \begin{bmatrix} t^2 = u, \\ 2t\,\mathrm{d}t = \mathrm{d}u \end{bmatrix}$

$\displaystyle= \frac{3}{2}\int \frac{\mathrm{d}u}{1+u+u^2} = \frac{3}{2}\int \frac{\mathrm{d}u}{\left(u+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} = 2\int \frac{\mathrm{d}u}{((2u+1)/\sqrt{3})^2+1} = \begin{bmatrix} (2u+1)/\sqrt{3} = p, \\ 2\,\mathrm{d}t/\sqrt{3} = \mathrm{d}p \end{bmatrix}$

$\displaystyle= \sqrt{3}\int \frac{\mathrm{d}p}{p^2+1} = \sqrt{3}\operatorname{arctg} p + C = \sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{2\sqrt[3]{x^2}+1}{\sqrt{3}} + C.$

Пример 7.4. Израчунати а) $I_1 = \displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2-3x+2}$, б) $I_2 = \displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2-x+1}$, в) $I_3 = \displaystyle\int \frac{3x-1}{x^2-x+1}\,\mathrm{d}x$.

а) Интегранд запишимо у облику $\dfrac{1}{x^2-3x+2} = \dfrac{1}{(x-1)(x-2)} = \dfrac{A}{x-1} + \dfrac{B}{x-2}$.

Множењем леве и десне стране са $(x-1)(x-2)$ добијамо систем

$1 = A(x-2) + B(x-1) = (A+B)x - 2A - B$.

Изједначавањем коефицијената уз x и уз 1 на левој и десној страни добијамо

$A + B = 0,\ -2A - B = 1,$ па је $A = -B = -1$ и

$$I_1 = -\int \frac{\mathrm{d}x}{x-1} + \int \frac{\mathrm{d}x}{x-2} = -\ln|x-1| + \ln|x-2| + C = \ln\left|\frac{x-2}{x-1}\right| + C.$$

б) Полином у имениоцу нема реалних нула, па се трансформише у облик потпуног квадрата:

$$I_2 = \int \frac{\mathrm{d}x}{(x-1/2)^2+3/4} = \frac{4}{3}\int \frac{\mathrm{d}x}{\frac{(x-1/2)^2}{3/4}+1} = \frac{4}{3}\int \frac{\mathrm{d}x}{((2x-1)/\sqrt{3})^2+1}$$

$$= \begin{bmatrix} (2x-1)/\sqrt{3} = t, \\ 2\,\mathrm{d}x/\sqrt{3} = \mathrm{d}t \end{bmatrix} = \frac{4}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\int \frac{\mathrm{d}t}{t^2+1} = \frac{2}{\sqrt{3}}\mathrm{arctg}\ t + C = \frac{2}{\sqrt{3}}\mathrm{arctg}\ \frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C.$$

в) $$I_3 = \frac{3}{2}\int \frac{2x-2/3}{x^2-x+1}\,\mathrm{d}x = \frac{3}{2}\int \frac{2x-1}{x^2-x+1}\,\mathrm{d}x + \frac{3}{2}\int \frac{1/3}{x^2-x+1}\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{3}{2}\ln(x^2-x+1) + \frac{1}{2}I_2 = \frac{3}{2}\ln(x^2-x+1) + \frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{arctg}\,\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C.$$

Пример 7.5. Израчунати $I = \displaystyle\int \frac{x-1}{\sqrt{5-4x-x^2}}\,\mathrm{d}x$.

$$I = -\frac{1}{2}\int \frac{-2x+2}{\sqrt{5-4x-x^2}}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\left(\int \frac{-2x-4}{\sqrt{5-4x-x^2}}\,\mathrm{d}x + 6\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{5-4x-x^2}}\right) = \begin{bmatrix} 5-4x-x^2 = t, \\ (-4-2x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t \end{bmatrix}$$

$$= -\frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}} - 3\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{9-(x-2)^2}} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{t^{1/2}}{1/2} - \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-((x-2)/3)^2}} = \begin{bmatrix} (x-2)/3 = u, \\ \mathrm{d}x/3 = \mathrm{d}u \end{bmatrix}$$

$$= -\sqrt{5-4x-x^2} - 3\int \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1-u^2}} = -\sqrt{5-4x-x^2} - 3\arcsin u + C$$

$$= -\sqrt{5-4x-x^2} - 3\arcsin\frac{x-2}{3} + C.$$

Пример 7.6. Израчунати $I = \displaystyle\int \frac{3x-1}{\sqrt{x^2+x}}\,\mathrm{d}x$.

$$I = \frac{3}{2}\int \frac{2x-2/3}{\sqrt{x^2+x}}\,\mathrm{d}x = \frac{3}{2}\left(\int \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x}}\,\mathrm{d}x - \frac{5}{3}\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+x}}\right) = \begin{bmatrix} x^2+x = t, \\ (2x+1)\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t \end{bmatrix}$$

$$= \frac{3}{2}\int \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}} - \frac{5}{2}\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x+1/2)^2-1/4}} = \begin{bmatrix} x+1/2 = u, \\ \mathrm{d}x = \mathrm{d}u \end{bmatrix} = \frac{3}{2}\frac{t^{1/2}}{1/2} - \frac{5}{2}\int \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t^2-1/4}}$$

$$= 3\sqrt{x^2+x} - \frac{5}{2}\ln|u + \sqrt{u^2-1/4}| + C = 3\sqrt{x^2+x} - \frac{5}{2}\ln|x+1/2+\sqrt{x^2+x}| + C$$

7.3 Парцијална интеграција

Парцијална интеграција директно следи из правила за извод производа.

Нека су $u(x)$ и $v(x)$ диференцијабилне функције. На основу оравила за извод производа је

$$\mathrm{d}(uv) = u\,\mathrm{d}v + v\,\mathrm{d}u, \quad \text{tj.} \quad u\,\mathrm{d}v = \mathrm{d}(uv) - v\,\mathrm{d}u,$$

одкале интеграцијом у односу на x добијамо

$$\int u\,\mathrm{d}v = uv - \int v\,\mathrm{d}u,$$

што је формула за парцијалну интеграцију. Приликом примене ове формуле, важно је одабрати функције u и v на прави начин.

Примера ради, за интеграл $\int P_n(x) f(ax)\,\mathrm{d}x$, где је $f(ax) \in \{e^{ax}, \sin(ax), \cos(ax)\}$ и $P_n(x)$ полином степена n, бира се $P_n(x) = u, f(ax)\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}v$.

Пример 7.7. Израчунати интеграле:

$$\text{а)}\ \int xe^{-x}\,\mathrm{d}x = \begin{bmatrix} u = x, & \mathrm{d}v = e^{-x}\,\mathrm{d}x, \\ \mathrm{d}u = \mathrm{d}x, & v = -e^{-x} \end{bmatrix} = uv - \int v\,\mathrm{d}u = -xe^{-x} + \int e^{-x}\,\mathrm{d}x = -e^{-x}(x+1) + C;$$

$$\text{б)}\ \int x^3\cos 2x\,\mathrm{d}x = \begin{bmatrix} u = x^3, & \mathrm{d}v = \cos 2x\,\mathrm{d}x, \\ \mathrm{d}u = 3x^2\,\mathrm{d}x, & v = \frac{1}{2}\sin 2x \end{bmatrix} = \frac{1}{2}x^3\sin 2x - \frac{3}{2}\int x^2\sin 2x\,\mathrm{d}x$$

$$= \begin{bmatrix} u = x^2, & \mathrm{d}v = \sin 2x\,\mathrm{d}x, \\ \mathrm{d}u = 2x\,\mathrm{d}x, & v = -\frac{1}{2}\cos 2x \end{bmatrix} = \frac{1}{2}x^3\sin 2x - \frac{3}{2}\left(-\frac{1}{2}x^2\cos 2x + \int x\cos 2x\,\mathrm{d}x\right)$$

$$= \begin{bmatrix} u = x, & \mathrm{d}v = \cos 2x\,\mathrm{d}x, \\ \mathrm{d}u = \mathrm{d}x, & v = \frac{1}{2}\sin 2x \end{bmatrix} = \frac{1}{2}x^3\sin 2x + \frac{3}{4}x^2\cos 2x - \frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}x\sin 2x - \frac{1}{2}\int \sin 2x\,\mathrm{d}x\right)$$

$$= \frac{1}{2}x^3\sin 2x + \frac{3}{4}x^2\cos 2x - \frac{3}{4}x\sin 2x + \frac{3}{4}\left(-\frac{1}{2}\cos 2x\right) + C$$

$$= \frac{1}{2}x^3\sin 2x + \frac{3}{4}x^2\cos 2x - \frac{3}{4}x\sin 2x - \frac{3}{8}\cos 2x + C = \frac{2x^3 - 3x}{4}\sin 2x + \frac{6x^2 - 3}{8}\cos 2x + C;$$

$$\text{в)}\ \int x\sin^2 x\,\mathrm{d}x = \int x\cdot\frac{1-\cos 2x}{2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int x\,\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int x\cos 2x\,\mathrm{d}x = \begin{bmatrix} u = x, & \mathrm{d}v = \cos 2x\,\mathrm{d}x, \\ \mathrm{d}u = \mathrm{d}x, & v = \frac{1}{2}\sin 2x \end{bmatrix}$$

$$= \frac{x^2}{4} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}x\sin 2x - \frac{1}{2}\int\sin 2x\,\mathrm{d}x\right) = \frac{x^2}{4} - \frac{1}{4}x\sin 2x - \frac{1}{8}\cos 2x + C.$$

Пример 7.8. Израчунати интеграле:

$$\text{а)}\ \int \ln x\,\mathrm{d}x = \begin{bmatrix} u = \ln x, & \mathrm{d}v = \mathrm{d}x, \\ \mathrm{d}u = \mathrm{d}x/x, & v = x \end{bmatrix} = x\ln x - \int \mathrm{d}x = x(\ln x - 1) + C;$$

$$\text{б)}\ \int \ln(x^2+1)x\,\mathrm{d}x = \begin{bmatrix} u = \ln(x^2+1), & \mathrm{d}v = \mathrm{d}x, \\ \mathrm{d}u = 2x\,\mathrm{d}x/(x^2+1), & v = x \end{bmatrix} = x\ln(x^2+1) - \int\frac{2x^2}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$$

$$= x\ln(x^2+1) - 2\int\frac{x^2+1-1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = x\ln(x^2+1) - 2\int\mathrm{d}x + 2\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2+1}$$

$$= x\ln(x^2+1) - 2x + 2\mathrm{arctg}\,x + C;$$

$$\text{в)}\ \int \arcsin x\,\mathrm{d}x = \begin{bmatrix} u = \arcsin x, & \mathrm{d}v = \mathrm{d}x, \\ \mathrm{d}u = \mathrm{d}x/\sqrt{1-x^2}, & v = x \end{bmatrix} = x\arcsin x - \int\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$$

$$= x\arcsin x + \frac{1}{2}\int\frac{-2x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \begin{bmatrix} 1 - x^2 = t, \\ -2x\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t \end{bmatrix} = x\arcsin x + \frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}}$$

$$= x\arcsin x + \frac{1}{2}\frac{t^{1/2}}{1/2} = x\arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C;$$

$$\text{г)}\ \int x^2\arcsin 2x\,\mathrm{d}x = \begin{bmatrix} u = \arcsin 2x, & \mathrm{d}v = x^2\,\mathrm{d}x, \\ \mathrm{d}u = 2\,\mathrm{d}x/\sqrt{1-4x^2}, & v = x^3/3 \end{bmatrix} = \frac{x^3}{3}\arcsin 2x - \frac{2}{3}\int\frac{x^3}{\sqrt{1-4x^2}}\,\mathrm{d}x$$

$$= \left[x^3 = -x(-4x^2)/4 = -x(1-4x^2-1)/4 = -x(1-4x^2)/4 + x/4\right]$$

$$= \frac{x^3}{3}\arcsin 2x - \frac{2}{3}\int\frac{-x(1-4x^2)/4 + x/4}{\sqrt{1-4x^2}}\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{x^3}{3}\arcsin 2x + \frac{1}{6}\int x\sqrt{1-4x^2}\,\mathrm{d}x - \frac{1}{6}\int\frac{x}{\sqrt{1-4x^2}}\,\mathrm{d}x = \begin{bmatrix} 1 - 4x^2 = t, \\ -8x\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t \end{bmatrix}$$

$$= \frac{x^3}{3}\arcsin 2x - \frac{1}{48}\int\sqrt{t}\,\mathrm{d}t + \frac{1}{48}\int\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}} = \frac{x^3}{3}\arcsin 2x - \frac{1}{48}\frac{t^{3/2}}{3/2} + \frac{1}{48}\frac{t^{1/2}}{1/2} + C$$

$$= \frac{x^3}{3}\arcsin 2x - \frac{1}{72}\sqrt{(1-4x^2)^3} + \frac{1}{24}\sqrt{1-4x^2} + C$$

$$= \frac{x^3}{3}\arcsin 2x + \frac{1}{72}\sqrt{1-4x^2}\left(-1 + 4x^2 + 3\right) + C$$

$$= \frac{x^3}{3}\arcsin 2x + \frac{1}{36}\sqrt{1-4x^2}\left(1 + 2x^2\right) + C,$$

д) $\int x\operatorname{arctg}\frac{x}{x+1}\,\mathrm{d}x=\begin{bmatrix} u=\operatorname{arctg}\dfrac{x}{x+1}, & \mathrm{d}v=x\,\mathrm{d}x,\\ \mathrm{d}u=\dfrac{\mathrm{d}x}{2x^2+2x+1}, & v=x^2/2\end{bmatrix}=\frac{x^2}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{x+1}-\frac{1}{2}\int\frac{x^2}{2x^2+2x+1}\,\mathrm{d}x$

$$=\frac{x^2}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{x+1}-\frac{1}{4}\int\frac{2x^2+2x+1-2x-1}{2x^2+2x+1}\,\mathrm{d}x=\frac{x^2}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{x+1}-\frac{1}{4}\int\mathrm{d}x+\frac{1}{8}\int\frac{4x+2}{2x^2+2x+1}\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{x^2}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{x+1}-\frac{x}{4}+\frac{1}{8}\ln(2x^2+2x+1)+C.$$

Пример 7.9. Израчунати:

$$I_1=\int e^{ax}\sin bx\,\mathrm{d}x=\begin{bmatrix} u=e^{ax}, & \mathrm{d}v=\sin bx\,\mathrm{d}x,\\ \mathrm{d}u=ae^{ax}\,\mathrm{d}x, & v=-\dfrac{1}{b}\cos bx\end{bmatrix}=-\frac{1}{b}e^{ax}\cos bx+\frac{a}{b}\int e^{ax}\cos bx\,\mathrm{d}x$$

$$=\begin{bmatrix} u=e^{ax}, & \mathrm{d}v=\cos bx\,\mathrm{d}x,\\ \mathrm{d}u=ae^{ax}\,\mathrm{d}x, & v=\dfrac{1}{b}\sin bx\end{bmatrix}=-\frac{1}{b}e^{ax}\cos bx+\frac{a}{b}\left(\frac{1}{b}e^{ax}\sin bx-\frac{a}{b}I\right),$$

$$\Rightarrow\ \left(1+\frac{a^2}{b^2}\right)I_1=\frac{e^{ax}}{b^2}\,(a\sin bx-b\cos bx)+C,\quad \text{тј.}\quad I_1=\frac{e^{ax}}{a^2+b^2}\,(a\sin bx-b\cos bx)+C;$$

$$I_2=\int\sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x=\begin{bmatrix} u=\sqrt{a^2-x^2}, & \mathrm{d}v=\mathrm{d}x,\\ \mathrm{d}u=-x\,\mathrm{d}x/\sqrt{a^2-x^2}, & v=x\end{bmatrix}=x\sqrt{a^2-x^2}+\int\frac{x^2-a^2+a^2}{\sqrt{a^2-x^2}}\,\mathrm{d}x$$

$$=x\sqrt{a^2-x^2}-\int\sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x+a^2\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

$$\Rightarrow\ 2I_2=x\sqrt{a^2-x^2}-a^2\arcsin\frac{x}{a}+C,\quad \text{тј.}\quad I_2=\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+C;$$

$$I_3=\int\sqrt{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x=\begin{bmatrix} u=\sqrt{x^2+a^2}, & \mathrm{d}v=\mathrm{d}x,\\ \mathrm{d}u=x\,\mathrm{d}x/\sqrt{x^2+a^2}, & v=x\end{bmatrix}=x\sqrt{x^2+a^2}-\int\frac{x^2+a^2-a^2}{\sqrt{x^2+a^2}}\,\mathrm{d}x$$

$$=x\sqrt{x^2+a^2}-\int\sqrt{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x+a^2\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+a^2}}$$

$$\Rightarrow 2I_3=x\sqrt{x^2+a^2}+a^2\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})+C,\quad \text{тј.}\quad I_3=\frac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2}+\frac{a^2}{2}\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})+C.$$

Пример 7.10. Израчунати

$$I=\int(2x-1)\ln x\ln(x-1)\,\mathrm{d}x=\begin{bmatrix} u=\ln x\ln(x-1), & \mathrm{d}v=(2x-1)\,\mathrm{d}x,\\ \mathrm{d}u=\left(\dfrac{\ln(x-1)}{x}+\dfrac{\ln x}{x-1}\right)\mathrm{d}x, & v=x^2-x\end{bmatrix}$$

$$=(x^2-x)\ln x\ln(x-1)-\int\frac{(x^2-x)\ln(x-1)}{x}\,\mathrm{d}x-\int\frac{(x^2-x)\ln x}{x-1}\,\mathrm{d}x$$

$$=(x^2-x)\ln x\ln(x-1)-\int(x-1)\ln(x-1)\,\mathrm{d}x-\int x\ln x\,\mathrm{d}x$$

Даље је $\int x\ln x\,\mathrm{d}x=\begin{bmatrix} u=\ln x, & \mathrm{d}v=x\,\mathrm{d}x,\\ \mathrm{d}u=\mathrm{d}x/x, & v=x^2/2\end{bmatrix}=\frac{1}{2}x^2\ln x-\frac{1}{2}\int x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}x^2\ln x-\frac{1}{4}x^2+C$. Дакле,

$$I=(x^2-x)\ln x\ln(x-1)-\frac{1}{2}(x-1)^2\ln(x-1)+\frac{1}{4}(x-1)^2-\frac{1}{2}x^2\ln x+\frac{1}{4}x^2+C.$$

7.4 Рекурентне формуле

Пример 7.11. Израчунати $I_n = \displaystyle\int \sin^n x \,\mathrm{d}x \quad (n \geqslant 2)$.

$$I_n = \begin{bmatrix} u = \sin^{n-1} x, & \mathrm{d}v = \sin x \,\mathrm{d}x, \\ \mathrm{d}u = (n-1)\sin^{n-2} x \cos x \,\mathrm{d}x, & v = -\cos x \end{bmatrix} = -\cos x \sin^{n-1} x + (n-1)\int \sin^{n-2} x \cos^2 x \,\mathrm{d}x$$
$$= -\cos x \sin^{n-1} x + (n-1)\int \sin^{n-2} x(1-\sin^2 x)\,\mathrm{d}x = -\cos x \sin^{n-1} x + (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n.$$

Дакле,
$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2} - \frac{1}{n}\cos x \sin^{n-1} x, \qquad I_1 = -\cos x + C, \quad I_0 = x + C.$$

Пример 7.12. Израчунати $I_n = \displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^n} \quad (n \geqslant 2)$.

$$I_n = \frac{1}{a^2}\int \frac{a^2+x^2-x^2}{(x^2+a^2)^n}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a^2} I_{n-1} - \frac{1}{a^2}\int \frac{x^2}{(x^2+a^2)^n}\,\mathrm{d}x = \begin{bmatrix} u = x, & \mathrm{d}v = x\,\mathrm{d}x/(x^2+a^2)^n, \\ \mathrm{d}u = \mathrm{d}x, & v = -1/(2(n-1)(x^2+a^2)^{n-1}) \end{bmatrix}$$
$$= \frac{1}{a^2} I_{n-1} - \frac{1}{a^2}\left(-\frac{x}{2(n-1)(x^2+a^2)^{n-1}} + \frac{1}{2(n-1)} I_{n-1}\right).$$

Дакле,
$$I_n = \frac{2n-3}{2n-2}\cdot\frac{1}{a^2} I_{n-1} + \frac{1}{2a^2(n-1)}\cdot\frac{x}{(x^2+a^2)^{n-1}}, \qquad I_1 = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C, \quad I_0 = x + C.$$

Рада Мутавџић Ђукић