8 Неодређени интеграли - део 2

8.1 Интеграција рационалних функција

Рационална функција је функција облика $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, где су P и Q полиноми и $Q(x) \neq 0$.

Посматрајмо интеграл рационалне функције $\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,\mathrm{d}x$.

• Ако степен полином P није мањи од степена полинома Q, треба поделити полиноме:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = F(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}.$$

• Даље користимо особину да се сваки полином (са реалним коефицијентима) може факторисати на производ линеарних и нерастављивих квадратних фактора:

$$Q(x) = (x-\alpha_1)^{n_1}\cdots(x-\alpha_i)^{n_i}\cdot(x^2+\beta_1 x+\gamma_1)^{m_1}\cdots(x^2+\beta_j x+\gamma_j)^{m_j} \quad (\alpha_k,\beta_k,\gamma_k \in \mathbb{R},\ n_k, m_k \in \mathbb{N}).$$

Тада се свака рационална функција $\frac{R(x)}{Q(x)}$, где је степен полинома $R(x)$ мањи од степена полинома $Q(x)$ може на јединствен начин представити у облику збира елементарних рационалних функција, тј. функција облика

$$\frac{A_1}{x-\alpha_1},\quad \frac{A_2}{(x-\alpha_1)^2},\ldots,\quad \frac{B_1x+C_1}{x^2+\beta_1x+\gamma_1},\quad \frac{B_2x+C_2}{(x^2+\beta_1x+\gamma_1)^2},\ldots$$

где су и имениоцу фактори из $(x-\alpha_k)^{n_k}$ и $(x^2+\beta_l x+\gamma_l)^{m_l}$ за $k=1,\ldots,i$ и $l=1,\ldots,j$.

Пример 8.1. Израчунати $I = \displaystyle\int \frac{3x}{(x-1)^2(2x+1)}\,\mathrm{d}x$.

Раставимо подинтегралну функцију на збир елементарних рационалних функција:

$$\begin{aligned}\frac{3x}{(x-1)^2(2x+1)} &= \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{2x+1} \quad / \cdot (x-1)^2(2x+1),\\ 3x &= A(x-1)(2x+1) + B(2x+1) + C(x-1)^2\\ &= A(2x^2-x-1) + B(2x+1) + C(x^2-2x+1)\\ &= (2A+C)x^2 + (-A+2B-2C)x - A + B + C.\end{aligned}$$

Изједначавањем коефецијената уз x^2, x и 1 на левој и десној страни добијамо систем $2A+C=0$, $-A+2B-2C=3$, $-A+B+C=0$, чије је решење $(A,B,C) = (\frac{1}{3}, 1, -\frac{2}{3})$. Дакле,

$$\begin{aligned}I &= \frac{1}{3}\int\frac{\mathrm{d}x}{x-1} + \int\frac{\mathrm{d}x}{(x-1)^2} - \frac{2}{3}\int\frac{\mathrm{d}x}{2x+1} = \begin{bmatrix}1+2x = t\\ 2\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t\end{bmatrix} = \frac{1}{3}\ln|x-1| - \frac{1}{x-1} - \frac{1}{3}\int\frac{\mathrm{d}t}{t}\\ &= \frac{1}{3}\ln|x-1| - \frac{1}{x-1} - \frac{1}{3}\ln|2x+1| + C = \frac{1}{3}\ln\left|\frac{x-1}{2x+1}\right| - \frac{1}{x-1} + C.\end{aligned}$$

Пример 8.2. Израчунати $I = \displaystyle\int \frac{x^5+3x+1}{x^4-x^3+x^2}\,\mathrm{d}x$.

Дељењем одговарајућих полинома добијамо

$$\frac{x^5+3x+1}{x^4-x^3+x^2} = x+1+\frac{-x^2+3x+1}{x^4-x^3+x^2}.$$

Даље је

$$\begin{aligned}\frac{-x^2+3x+1}{x^4-x^3+x^2} = \frac{-x^2+3x+1}{x^2(x^2-x+1)} &= \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Cx+D}{x^2-x+1} \quad / \cdot x^2(x^2-x+1),\\ -x^2+3x+1 &= Ax(x^2-x+1) + B(x^2-x+1) + (Cx+D)x^2\\ &= A(x^3-x^2+x) + B(x^2-x+1) + Cx^3 + Dx^2\\ &= (A+C)x^3 + (-A+B+D)x^2 + (A-B)x + B,\end{aligned}$$

одкале добијамо систем $A+C=0$, $-A+B+D=-1$, $A-B=3$, $B=1$, чије је решење $(A,B,C,D) = (4,1,-4,2)$. Следи да је полазни интеграл

$$\begin{aligned}I &= \int(x+1)\,\mathrm{d}x + 4\int\frac{\mathrm{d}x}{x} + \int\frac{\mathrm{d}x}{x^2} + \int\frac{-4x^2+2}{x^2-x+1}\,\mathrm{d}x = \begin{bmatrix}x^2-x+1 = t\\ 2x-1\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t\end{bmatrix}\\ &= \frac{x^2}{2} + x + 4\ln|x| - \frac{1}{x} - 2\int\frac{\mathrm{d}t}{t} = \frac{x^2}{2} + x + 4\ln|x| - \frac{1}{x} - 2\ln(x^2-x+1) + C.\end{aligned}$$

Пример 8.3. Израчунати $I = \displaystyle\int \frac{x-2}{(x+1)(x^2+2)^2}\,\mathrm{d}x$.

Овде је

$$\frac{x-2}{(x+1)(x^2+2)^2} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+2} + \frac{Dx+E}{(x^2+2)^2} \quad / \cdot (x+1)(x^2+2)^2,$$

$$\begin{aligned} x-2 &= A(x^2+2)^2 + (Bx+C)(x+1)(x^2+2) + (Dx+E)(x+1) \\ &= A(x^4+4x^2+4) + (Bx+C)(x^3+x^2+2x+2) + Dx^2 + Dx + Ex + 1 \\ &= (A+B)x^4 + (B+C)x^3 + (4A+2B+C+D)x^2 + (2B+2C+D+E)x + 4A + 2C + E, \end{aligned}$$

одакле добијамо систем $A+B=0$, $B+C=0$, $4A+2B+C+D=0$, $2B+2C+D+E=1$, $4A+2C+E=-2$, чије је решење $(A,B,C,D,E) = (-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, 1, 0)$. Дакле,

$$\begin{aligned} I &= -\frac{1}{3}\int \frac{\mathrm{d}x}{x+1} + \frac{1}{3}\int \frac{x-1}{x^2+2}\,\mathrm{d}x + \int \frac{x}{(x^2+2)^2}\,\mathrm{d}x \\ &= -\frac{1}{3}\ln|x+1| + \frac{1}{6}\int \frac{2x\,\mathrm{d}x}{x^2+2} - \frac{1}{3}\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+2} + \frac{1}{2}\int \frac{2x}{(x^2+2)^2}\,\mathrm{d}x = \begin{bmatrix} x^2+2 = t \\ 2x\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t \end{bmatrix} \\ &= -\frac{1}{3}\ln|x+1| + \frac{1}{6}\int \frac{\mathrm{d}t}{t} - \frac{\sqrt{2}}{6}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}t}{t^2} \\ &= -\frac{1}{3}\ln|x+1| + \frac{1}{6}\ln(x^2+2) - \frac{\sqrt{2}}{6}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2(x^2+1)} + C. \end{aligned}$$

Пример 8.4. Израчунати $I = \displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{4x^4+1}$.

Да бисмо факторисали именилац, допуњујемо га до потпуног квадрата:

$$4x^4 + 1 = (2x^2+1)^2 - 4x^2 = (2x^2-2x+1)(2x^2+2x+1).$$

Сада је

$$\frac{1}{4x^4+1} = \frac{Ax+B}{2x^2+2x+1} + \frac{Cx+D}{2x^2-2x+1}.$$

Решавањем одговарајућег система налазимо да је $A = B = D = \frac{1}{2}$ и $C = -\frac{1}{2}$, одакле је

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2}\int \frac{x+1}{2x^2+2x+1}\,\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int \frac{x-1}{2x^2-2x+1}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{8}\int \frac{4x+2+2}{2x^2+2x+1}\,\mathrm{d}x - \frac{1}{8}\int \frac{4x-2-2}{2x^2-2x+1}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{8}\int \frac{\mathrm{d}(2x^2+2x+1)}{2x^2+2x+1}\,\mathrm{d}x + \frac{1}{8}\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+x+1/2} - \frac{1}{8}\int \frac{\mathrm{d}(2x^2-2x+1)}{2x^2-2x+1}\,\mathrm{d}x + \frac{1}{8}\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2-x+1/2} \\ &= \frac{1}{8}\ln\frac{2x^2+2x+1}{2x^2-2x+1} + \frac{1}{8}\int \frac{\mathrm{d}x}{(x+1/2)^2+1/4} + \frac{1}{8}\int \frac{\mathrm{d}x}{(x-1/2)^2+1/4} \\ &= \frac{1}{8}\ln\frac{2x^2+2x+1}{2x^2-2x+1} + \frac{1}{4}\operatorname{arctg}(2x+1) + \frac{1}{4}\operatorname{arctg}(2x-1) + C. \end{aligned}$$

Пример 8.5. Израчунати $I = \displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^2}$, $a > 0$.

Пођимо од интеграла $I_1 = \int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+a^2}$ и на њега применимо парцијалну интеграцију:

$$I_1 = \begin{bmatrix} u = 1/(x^2+a^2), & \mathrm{d}v = \mathrm{d}x, \\ \mathrm{d}u = -2x/(x^2+a^2)^2\,\mathrm{d}x, & v = x \end{bmatrix} = \frac{x}{x^2+a^2} + 2\int \frac{x^2+a^2-a^2}{(x^2+a^2)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{x}{x^2+a^2} + 2I_1 - 2a^2 I,$$

па је

$$I = \frac{1}{2a^2}\left(\frac{x}{x^2+a^2} + I_1\right) = \frac{1}{2a^3}\left(\frac{ax}{x^2+a^2} + \operatorname{arctg}\frac{x}{a}\right) + C.$$

8.2 Експоненцијални и тригонометријски интеграли

Нека је $R(x)$ рационална функција.

- Интеграл $\int R(e^x)\,\mathrm{d}x$ се сменом $e^x = t$ своди на интеграл рационалне функције.

Пример 8.6. Израчунати $I = \displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{e^x + e^{-x/2}}$.

$$I = \int \frac{\mathrm{d}x}{e^x + e^{-x/2}} \cdot \frac{e^{x/2}}{e^{x/2}} = \int \frac{e^{x/2}}{e^{3x/2}+1}\,\mathrm{d}x = \begin{bmatrix} e^{x/2} = t \\ e^{x/2}\,\mathrm{d}x = 2\,\mathrm{d}t \end{bmatrix} = 2\int \frac{\mathrm{d}t}{t^3+1}.$$

Даље је
$$\frac{1}{t^3+1} = \frac{A}{t+1} + \frac{Bt+C}{t^2-t+1}, \quad \text{одакле се добија} \quad (A,B,C) = \left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right).$$

Дакле,
$$\begin{aligned} I &= \frac{2}{3}\int \frac{\mathrm{d}t}{t+1} + \frac{2}{3}\int \frac{-t+2}{t^2-t+1}\,\mathrm{d}t = \frac{2}{3}\ln(t+1) - \frac{1}{3}\int \frac{2t-1-3}{t^2-t+1}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{2}{3}\ln(t+1) - \frac{1}{3}\ln(t^2-t+1) + \int \frac{\mathrm{d}t}{(t-1/2)^2+3/4} \\ &= \frac{2}{3}\ln(t+1) - \frac{1}{3}\ln(t^2-t+1) + \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2t-1}{\sqrt{3}} + C \\ &= \frac{2}{3}\ln(e^{x/2}+1) - \frac{1}{3}\ln(e^x - e^{x/2}+1) + \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2e^{x/2}-1}{\sqrt{3}} + C. \end{aligned}$$

• Интеграл $\int R(\sin x, \cos x)\,\mathrm{d}x$ се сменом $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$ (*универзалном тригонометријском сменом*) своди на интеграл рационалне функције. Тада је
$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \mathrm{d}x = \frac{2\,\mathrm{d}t}{1+t^2}.$$

Пример 8.7. Израчунати $I = \displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{3 - 2\sin x}$.

$$I = \begin{bmatrix} \operatorname{tg}\dfrac{x}{2} = t,\ \mathrm{d}x = \dfrac{2\,\mathrm{d}t}{1+t^2}, \\ \sin x = \dfrac{2t}{1+t^2},\ \cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}, \end{bmatrix} = \int \frac{2\,\mathrm{d}t/(1+t^2)}{3 - 2\cdot 2t/(1+t^2)} = 2\int \frac{\mathrm{d}t}{3+3t^2-4t} = \frac{2}{3}\int \frac{\mathrm{d}t}{t^2-4t/3+1}$$
$$= \frac{2}{3}\int \frac{\mathrm{d}t}{(t-2/3)^2+5/9} = \frac{2}{3}\cdot\frac{3}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{3t-2}{\sqrt{5}} + C = \frac{2}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{3\operatorname{tg}\frac{x}{2} - 2}{\sqrt{5}} + C.$$

• Интеграли типа $\int R(\sin x)\cos x\,\mathrm{d}x$ и $\int R(\cos x)\sin x\,\mathrm{d}x$ се редом сменама $\sin x = t$ и $\cos x = t$ своде на интеграле рационалне функције.

Пример 8.8. Израчунати $I = \displaystyle\int \sin^2 x \cos^3 x\,\mathrm{d}x$.

$$I = \int \sin^2 x(1-\sin^2 x)\cos x\,\mathrm{d}x = \begin{bmatrix} \sin x = t \\ \cos x\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t \end{bmatrix} = \int (t^2 - t^4)\,\mathrm{d}t = \frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{5} + C = \frac{\sin^3 x}{3} - \frac{\sin^5 x}{5} + C$$

Пример 8.9. Израчунати $I = \displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x}$.

$$I = \int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x}\cdot\frac{\sin x}{\sin x} = \int \frac{\sin x\,\mathrm{d}x}{1-\cos^2 x} = \begin{bmatrix} \cos x = t \\ -\sin x\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t \end{bmatrix} = \int \frac{\mathrm{d}t}{t^2-1}.$$

Даље је
$$\frac{1}{t^2-1} = \frac{A}{t-1} + \frac{B}{t+1}, \quad \text{тј.} \quad 1 = A(t+1) + B(t-1).$$

За $t = 1$ добијамо $A = \frac{1}{2}$, а за $t = -1$ је $B = -\frac{1}{2}$. Дакле,
$$I = \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}t}{t-1} - \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}t}{t+1} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + C = \ln\sqrt{\frac{\cos t - 1}{\cos t + 1}} + C = \ln\sqrt{\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}} + C = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C.$$

Пример 8.10. Израчунати $I = \displaystyle\int \frac{x\sin x}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$.

$$I = \begin{bmatrix} u = x, & \mathrm{d}v = \sin x/\cos^2 x, \\ \mathrm{d}u = \mathrm{d}x, & v = 1/\cos x \end{bmatrix} = \frac{x}{\cos x} - \int \frac{\mathrm{d}x}{\cos x}\cdot\frac{\cos x}{\cos x} = \frac{x}{\cos x} - \int \frac{\mathrm{d}(\sin x)}{1-\sin^2 x}$$
$$= \frac{x}{\cos x} - \ln\sqrt{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}} + C.$$

• Интеграли типа $\int \sin\alpha x\cos\beta x\,\mathrm{d}x$, $\int \sin\alpha x\sin\beta x\,\mathrm{d}x$ и $\int\cos\alpha x\cos\beta x\,\mathrm{d}x$ се решавају применом одговарајућих адиционих формула:

$$\begin{aligned}\sin\alpha x\cos\beta x &= \frac{1}{2}\left(\sin(\alpha+\beta)x+\sin(\alpha-\beta)x\right),\\ \sin\alpha x\sin\beta x &= \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta)x-\cos(\alpha+\beta)x\right),\\ \cos\alpha x\cos\beta x &= \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha+\beta)x+\cos(\alpha-\beta)x\right).\end{aligned}$$

Пример 8.11. Израчунати $I=\displaystyle\int\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{3}\,\mathrm{d}x$.

$$I=\frac{1}{2}\int\left(\cos\frac{5x}{6}+\cos\frac{x}{6}\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\cdot\frac{6}{5}\sin\frac{5x}{6}+\frac{1}{2}\cdot 6\sin\frac{x}{6}+C=\frac{3}{5}\sin\frac{5x}{6}+3\sin\frac{x}{6}+C.$$

8.3 Ирационални интеграли

Тригонометријске и хиперболичке смене

- Интеграли типа $R(x,\sqrt{a^2-x^2})\,\mathrm{d}x$ се решавају сменом $x=a\sin t$.
- Интеграли типа $R(x,\sqrt{a^2+x^2})\,\mathrm{d}x$ се решавају сменом $x=a\,\mathrm{sh}\,t$ или $x=a\mathrm{tg}\,t$.
- Интеграли типа $R(x,\sqrt{x^2-a^2})\,\mathrm{d}x$ се решавају сменом $x=a\,\mathrm{ch}\,t$.

Лако се проверава да за хиперболичке функције $\mathrm{sh}\,x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$ и $\mathrm{ch}\,x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$ важи

$$\mathrm{ch}^2x-\mathrm{sh}^2x=1,\qquad (\mathrm{sh}\,x)'=\mathrm{ch}\,x,\quad (\mathrm{ch}\,x)'=\mathrm{sh}\,x,$$
$$\mathrm{sh}\,2x=2\,\mathrm{sh}\,x\,\mathrm{ch}\,x,\quad \mathrm{ch}\,2x=\mathrm{ch}^2x+\mathrm{sh}^2x,\quad \mathrm{sh}^2x=\frac{\mathrm{ch}\,2x-1}{2},\quad \mathrm{ch}^2x=\frac{\mathrm{ch}\,2x+1}{2},$$

а за њихове инверзне $\mathrm{arsh}\,x=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$ и $\mathrm{arch}\,x=\ln(x+\sqrt{x^2-1})$.

Пример 8.12. Израчунати $I=\displaystyle\int\sqrt{1-4x^2}\,\mathrm{d}x$.

$$\begin{aligned}I&=\begin{bmatrix}2x=\sin t,\ -\pi/2\leqslant t\leqslant\pi/2,\\ 2\,\mathrm{d}x=\cos t\,\mathrm{d}t\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\int\sqrt{1-\sin^2t}\cos t\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\int\cos^2t\,\mathrm{d}t=\frac{1}{4}\int(1+\cos 2t)\,\mathrm{d}t\\ &=\frac{t}{4}+\frac{1}{8}\sin 2t+C=\frac{t}{4}+\frac{1}{4}\sin t\cos t+C=\frac{1}{4}\arcsin 2x+\frac{1}{4}\sin\arcsin 2x\sqrt{1-\sin^2\arcsin 2x}+C\\ &=\frac{1}{4}\arcsin 2x+\frac{1}{2}x\sqrt{1-4x^2}+C.\end{aligned}$$

Пример 8.13. Израчунати $I=\displaystyle\int\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}\,\mathrm{d}x\quad(a>0)$.

$$\begin{aligned}I&=\begin{bmatrix}x=a\,\mathrm{sh}\,t,\\ \mathrm{d}x=a\,\mathrm{ch}\,t\,\mathrm{d}t\end{bmatrix}=a\int\frac{\mathrm{ch}\,t\,\mathrm{d}t}{\sqrt{a^2(1+\mathrm{sh}^2\,t)}}=\int\frac{\mathrm{ch}\,t}{\mathrm{ch}\,t}\,\mathrm{d}t=t+C=\mathrm{arsh}\,x/a+C\\ &=\ln\left(x/a+\sqrt{(x/a)^2+1}\right)+C=\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})+C_1\quad(C_1=C-\ln a).\end{aligned}$$

Пример 8.14. Израчунати $I=\displaystyle\int\sqrt{x^2+x-1}\,\mathrm{d}x$.

Допуном до потпуног квадрата добијамо

$$\begin{aligned}I&=\int\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{5}{4}}\,\mathrm{d}x=\begin{bmatrix}x+\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{5}}{2}\,\mathrm{ch}\,t,\\ \mathrm{d}x=\frac{\sqrt{5}}{2}\,\mathrm{sh}\,t\,\mathrm{d}t\end{bmatrix}=\frac{\sqrt{5}}{2}\int\sqrt{\frac{5}{4}\,\mathrm{ch}^2\,t-\frac{5}{4}}\,\mathrm{sh}\,t\,\mathrm{d}t=\frac{5}{4}\int\mathrm{sh}^2\,t\,\mathrm{d}t\\ &=\frac{5}{4}\int\frac{\mathrm{ch}\,2t-1}{2}\,\mathrm{d}t=\frac{5}{8}\left(\frac{\mathrm{sh}\,2t}{2}-t\right)=\frac{5}{8}\left(\mathrm{sh}\,t\,\mathrm{ch}\,t-t\right)=\frac{5}{8}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{5}}\sqrt{\left(\frac{2x+1}{\sqrt{5}}\right)^2-1}-\mathrm{arch}\,\frac{2x+1}{\sqrt{5}}\right)+C\\ &=\frac{1}{4}(2x+1)\sqrt{x^2+x-1}-\frac{5}{8}\ln(2x+1+2\sqrt{x^2+x-1})+C_1.\end{aligned}$$

Пример 8.15. Израчунати $I = \displaystyle\int x^2\sqrt{x^2+1}\,\mathrm{d}x$.

$$I = \begin{bmatrix} x = \operatorname{sh} t, \ \sqrt{1+x^2} = \operatorname{ch} t \\ \mathrm{d}x = a\operatorname{ch} t\,\mathrm{d}t \end{bmatrix} = \int \operatorname{sh}^2 t \operatorname{ch}^2 t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{4}\int \operatorname{sh}^2 2t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{8}\int (\operatorname{ch} 4t - 1)\,\mathrm{d}t$$
$$= \frac{1}{8}\left(\frac{\operatorname{sh} 4t}{4} - t\right) + C = \frac{1}{8}\left(\frac{\operatorname{sh} 2t \operatorname{ch} 2t}{2} - t\right) + C = \frac{1}{8}\left(\operatorname{sh} t \operatorname{ch} t(1+2\operatorname{sh}^2 t) - t\right) + C$$
$$= \frac{1}{8}\left(x\sqrt{1+x^2}(1+2x^2) - \operatorname{arsh} x\right) + C = \frac{1}{8}\left(x\sqrt{1+x^2}(1+2x^2) - \ln(x+\sqrt{x^2+1})\right) + C.$$

Метод Остроградског

Овом методом решавамо интеграле облика $\displaystyle\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,\mathrm{d}x$ тако што их напишемо на следећи начин:

$$\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,\mathrm{d}x = Q_{n-1}(x)\sqrt{ax^2+bx+c} + \lambda\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{ax^2+bx+c}},$$

где је $P_n(x)$ је полином степена n, $Q_{n-1}(x)$ полином степена $n-1$ са неодређеним коефицијентима и λ константа. Коефицијенти полинома $Q_{n-1}(x)$ и λ се налазе диференцирањем претходне једнакости.

Пример 8.16. Израчунати $I = \displaystyle\int \frac{x^2+x+2}{\sqrt{x^2+x+1}}\,\mathrm{d}x$.

$$\int \frac{x^2+x+2}{\sqrt{x^2+x+1}}\,\mathrm{d}x = (Ax+B)\sqrt{x^2+x+1} + \lambda\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+x+1}},$$

одакле диференцирањем добијамо

$$\frac{x^2+x+2}{\sqrt{x^2+x+1}} = A\sqrt{x^2+x+1} + (Ax+B)\frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+1}} + \frac{\lambda}{\sqrt{x^2+x+1}}.$$

Множењем претходне једнакости са $2\sqrt{x^2+x+1}$ добијамо

$2(x^2+x+2) = 2A(x^2+x+1) + (Ax+B)(2x+1) + 2\lambda$, тј. $2x^2+2x+4 = 4Ax^2 + (3A+2B)x + (2A+B+2\lambda)$,

одакле изједначавањем коефицијената добијамо систем $4A = 2$, $3A+2B = 2$, $2A+B+2\lambda = 4$, чије је решење $(A,B,C) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{11}{8})$. Дакле,

$$I = \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\right)\sqrt{x^2+x+1} + \frac{11}{8}\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+x+1}} = \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\right)\sqrt{x^2+x+1} + \frac{11}{8}\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}}$$
$$= \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\right)\sqrt{x^2+x+1} + \frac{11}{8}\ln|2x+1+2\sqrt{x^2+x+1}| + C.$$

Интеграли облика $\displaystyle\int \frac{dx}{(x-\alpha)^n\sqrt{ax^2+bx+c}}$ $(n\in\mathbb{N})$ се сменом $x-\alpha = 1/t$ своде на претходни облик.

Интеграл диференцијалног бинома

Интеграли облика $\displaystyle\int x^m(a+bx^n)^p\,\mathrm{d}x$, где су $a,b\in\mathbb{R}$ и $m,n,p\in\mathbb{Q}$ се своди на интеграл рационалне функције ако је бар један од бројева $p, \frac{m+1}{n}, p+\frac{m+1}{n}$ цео. У свим осталим случајевим интеграл диференцијалног бинома се не може изразити помоћу елементарних функција.

Ако је $p\in\mathbb{Z}$ и $p>0$, бином $(a+bx^n)^p$ треба развити по биномном обрасцу. Размотримо наредне случајеве.

(1°) Када је $p\in\mathbb{Z}$ и $p<0$ уводи се смена $x = t^k$, где је k најмањи заједнички садржалац за имениоце разломака m и n.

(2°) Када је $\frac{m+1}{n}\in\mathbb{Z}$ уводи се смена $a+bx^n = t^r$, где је r именилац разломка p.

(3°) Када је $p+\frac{m+1}{n}\in\mathbb{Z}$ уводи се смена $ax^{-n}+b = t^r$, где је r поново именилац разломка p.

Пример 8.17. Свести дате интеграле на интеграле рационалних функција:

а) $$\int x^{\frac{1}{2}}\left(1+2x^{\frac{1}{3}}\right)^{-3}\,\mathrm{d}x = \begin{bmatrix} x=t^6, \\ \mathrm{d}x = 6t^5\,\mathrm{d}t \end{bmatrix} = \int t^3(1+2t^2)^{-3}\cdot 6t^5\,\mathrm{d}t = 6\int \frac{t^8\,\mathrm{d}t}{(1+2t^2)^3}.$$

б) $$\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \int x^{-\frac{1}{2}}\left(1+x^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{1}{3}}\,\mathrm{d}x = \begin{bmatrix} 1+x^{\frac{1}{4}} = t^3,\ x=(t^3-1)^4 \\ \mathrm{d}x = 12t^2(t^3-1)^3\,\mathrm{d}t \end{bmatrix} = 12\int (t^6-t^3)\,\mathrm{d}t.$$

в) $$\int x^{-11}\left(1+x^4\right)^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x = \begin{bmatrix} x^{-4}+1=t^2,\ t=(x^{-4}+1)^{\frac{1}{2}}, \\ \mathrm{d}t = -2x^{-5}(x^{-4}+1)^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x \end{bmatrix} = -\frac{1}{2}\int (t^2-1)^2\,\mathrm{d}t.$$

Ојлерове смене

Посматрамо интеграле облика $I = \displaystyle\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\,\mathrm{d}x$.

(1°) Ако је $a>0$, уводи су смена

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = t \mp x\sqrt{a}.$$

Пример 8.18. Израчунати $I = \displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x+\sqrt{x^2+1}}$.

$$\begin{aligned} I &= \begin{bmatrix} \sqrt{x^2+1} = t-x, \\ x = \dfrac{t^2-1}{2t},\ \mathrm{d}x = \dfrac{t^2+1}{2t^2}\,\mathrm{d}t \end{bmatrix} = \int \frac{1}{t}\cdot\frac{t^2+1}{2t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\ln t - \frac{1}{4t^2} + C \\ &= \frac{1}{2}\ln(x+\sqrt{x^2+1}) - \frac{1}{4(x+\sqrt{x^2+1})^2}\cdot\frac{(x-\sqrt{x^2+1})^2}{(x-\sqrt{x^2+1})^2} + C \\ &= \frac{1}{2}\left(\ln(x+\sqrt{x^2+1}) - x^2 + \sqrt{1+x^2}\right) + C_1. \end{aligned}$$

(2°) Ако је $c>0$, уводи су смена

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = tx \mp \sqrt{c}.$$

Пример 8.19. Израчунати $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(1+x)\sqrt{1+x-x^2}}$.

$$\begin{aligned} I &= \begin{bmatrix} \sqrt{1+x-x^2} = tx-1, \\ x = \dfrac{1+2t}{t^2+1},\ \mathrm{d}x = -\dfrac{2(t^2+t-1)}{(t^2+1)^2}\,\mathrm{d}t \end{bmatrix} = -2\int \frac{dt}{1+(t+1)^2} = -2\mathrm{arctg}\,(t+1) + C \\ &= -2\mathrm{arctg}\,\frac{1+x+\sqrt{1+x-x^2}}{x} + C. \end{aligned}$$

(3°) Ако су корени квадратног тринома ax^2+bx+c реални, уводи се смена

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a(x-\alpha)(x-\beta)} = (x-\alpha)t.$$

Пример 8.20. Израчунати $I = \displaystyle\int \frac{(x-1)\,\mathrm{d}x}{(x^2+2x)\sqrt{x^2+2x}}$.

$$I = \begin{bmatrix} \sqrt{x^2+2x} = xt, \\ x = \dfrac{2}{t^2-1},\ \mathrm{d}x = -\dfrac{4tdt}{(t^2-1)^2}\,\mathrm{d}t \end{bmatrix} = -\frac{1}{2}\int \frac{3-t^2}{t^2}dt = \frac{3}{2t} - \frac{1}{2}t + C = \frac{1+2x}{\sqrt{x^2+2x}} + C.$$

Напомена: Случајеви $a>0$ и $c>0$ своде се један на други сменом $x = 1/t$.

Рада Мутавџић Ђукић