

Први колоквијум из Математике 2 - смене 8 и 9

Група 1

1. Израчунати $I_1 = \int \operatorname{arctg}(ax) dx$. 2. Израчунати $I_2 = \int \frac{x-1}{(x+2)(x^2-x+2)} dx$. 3. Израчунати $I_3 = \int \frac{dx}{2-\cos^2 x}$. 4. Израчунати $I_4 = \int_1^\infty \frac{\ln(2x-1) dx}{(x+1)^2}$. 5. Наћи дужину лука криве $y = \frac{2}{3}x^{3/2} + x$ за $0 \leq x \leq 1$.

Решења

1. $I_1 = \left[\begin{array}{l} u = \operatorname{arctg} ax, \quad dv = dx, \\ du = \frac{a dx}{1+(ax)^2}, \quad v = x \end{array} \right] = x \operatorname{arctg}(ax) - \int \frac{ax dx}{1+(ax)^2} = x \operatorname{arctg}(ax) - \frac{1}{2a} \int \frac{d((ax)^2+1)}{(ax)^2+1}$
 $= x \operatorname{arctg}(ax) - \frac{1}{2a} \ln((ax)^2+1) + C.$

2. $\frac{x-1}{(x+2)(x^2-x+2)} = \frac{A}{x+2} + \frac{Bx+C}{x^2-x+2} \Rightarrow (A, B, C) = \left(-\frac{3}{8}, \frac{3}{8}, -\frac{1}{8}\right),$
 $I_2 = -\frac{3}{8} \ln|x+2| + \frac{3}{16} \ln(x^2-x+2) + \frac{1}{8\sqrt{7}} \operatorname{arctg} \frac{2x-1}{\sqrt{7}} + C = \frac{3}{16} \ln \frac{x^2-x+2}{(x+2)^2} + \frac{1}{8\sqrt{7}} \operatorname{arctg} \frac{2x-1}{\sqrt{7}} + C.$

3. Уводимо смену $\operatorname{tg} x = t, \cos^2 x = \frac{1}{1+t^2}, dx = \frac{dt}{1+t^2}$, па се полазни интеграл своди на

$$\int \frac{dt}{2t^2+1} = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t^2+1/2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}(\sqrt{2} \operatorname{tg} x) + C.$$

4. Неодређени: $I_3 = \left[\begin{array}{l} u = \ln(2x-1), \quad \frac{dx}{(x+1)^2} = dv, \\ du = \frac{2 dx}{2x-1}, \quad -\frac{1}{x+1} = v \end{array} \right] = -\frac{\ln(2x-1)}{x+1} + \int \frac{2 dx}{(x+1)(2x-1)}$
 $= -\frac{\ln(2x-1)}{x+1} + \frac{2}{3} \ln \left| \frac{2x-1}{x+1} \right| + C, \quad \text{несвојствени: } I_3 = \frac{\ln 16}{3}.$

5. $L = \int_0^1 \sqrt{1+(\sqrt{x}+1)^2} dx = \left[\begin{array}{l} \sqrt{x}+1 = t, \quad x = (t-1)^2 \\ dx = 2(t-1) dt \end{array} \right] = \int_1^2 \sqrt{1+t^2} \cdot 2(t-1) dt$
 $= \int_1^2 \sqrt{1+t^2} d(1+t^2) - 2 \int_1^2 \sqrt{1+t^2} dt = \dots = \frac{4\sqrt{5}-\sqrt{2}}{3} + \ln \frac{1+\sqrt{2}}{2+\sqrt{5}}.$

Први колоквијум из Математике 2 - смене 8 и 9

Група 2

1. Израчунати $\int \operatorname{arctg}(3x) dx$.
 2. Израчунати $\int \frac{x+1}{(x-2)(x^2+x+2)} dx$. Исто као група 1, само – испред логаритма.
 3. Израчунати $\int \frac{dx}{\cos^2 x - 2}$. Исто као група 1.
 4. Израчунати $\int_1^\infty \frac{\ln(2x-1) dx}{(x+2)^2}$. Неодређени: $-\frac{\ln(2x-1)}{x+2} + \frac{2}{5} \ln \left| \frac{2x-1}{x+2} \right| + C$, несвојствени: $\frac{2}{5} \ln 6$.
 5. Наћи дужину лука криве $y = \frac{2}{3}x^{3/2} - x$ за $0 \leq x \leq 1$. $L = \frac{2-\sqrt{2}}{3} + \ln(1+\sqrt{2})$.