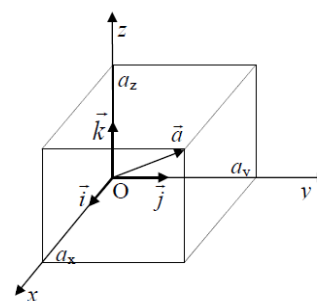




УВОД У ТЕНЗОРСКИ РАЧУН

Основни појмови

Овде ће бити изложени основни појмови тензорског рачуна. У физици односно механици разликујемо скаларне, векторске и тазв. *тензорске величине*. Наиме, осим скаларних и векторских функција, неке појаве се описују и сложенијим геоматријским објектима, тзв. тензорима. Скаларна функција координата при прелазу са једног на други координатни систем обично мења облик, али њене вредности у тачкама простора не зависе од координатног система у којима се приказује, на пример поље температуре при прелазу на други координатни систем промениће се облик функције али се неће променити вредност температуре у појединим тачкама поменутог поља. Зато се овакве функције зову скалари, скаларне величине или тензори нултог реда (ранга). Скаларне величине дефинисане су *једним бројем (скаларом)*, а такве величине су на пример: маса m , запремина V , густина ρ , специфична унутрашња енергија u , итд. Аналогно се проучавају физичка и геоматријска својства вектор кроз законе трансформација координата, *као тензора првог ранга*. Векторске величине су одређене смером, интензитетом и оријентацијом, односно помоћу *три компоненте* (нпр. три пројекције на оси координатног система), а такве величине су брзина \vec{v} , убрзање \vec{a} , сила \vec{F} , вектор провођења топлоте \vec{q} итд. Векторске величине се још у литератури означавају и болдираним словима (\mathbf{v} , \mathbf{a} , Φ , \mathbf{q}). Векторске функције у нашем опажајном простору можемо учинити очигледним. Други начин приказивања вектора је аналитички путем пројекција и он нам омогућује да одговарајућим алгебарским операцијама сабирамо, množимо векторе, одређујући одговарајуће пројекције, на основу којих можемо да судимо о добијеном збиру или производу. Овим је извршена замена очигледног геометријског приказивања аналитичким, путем координата. *О физичкој или геометријској природи вектора суди се на основу облика израза којим се преводe координате вектора из једног у други координатни систем.* За описивање сложенијих физичких појава геоматријским путем проширен је појам простора. Многе физичке величине описују се са више параметара, па је за њихово геометријско посматрање и описивање било неопходно увођење тзв. M -мерних простора. Геометријске представе о таквом простору немамо, нити је могуће очигледно приказивање одговарајућих величина. Исто тако постоје величине, одређене у нашем опажајном простору у односу на познате координатне системе, које не могу учинити очигледним. Оне су обично дате у односу на неки координатни систем и посматрају се аналитички, односно о њиховој природи се суди на основу понашања према математичким процесима. овим аналитичким описивањем геоматријских величина, методама алгебре и анализе, добијају се одређене законитости, помоћу којих се има сталан увид у



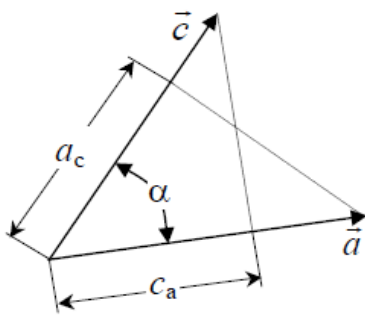
Слика 3.1

геометријску или физичку садржину величине, појаве или процеса, који описује. Као основа за разликовање природе појединих величина, описаних са више параметара (координата) или функција, узимамо њихово понашање при смени променљивих (трансформацији координата). Исти прилаз је и са сложенијим геометријским величинама, као тензорима вишег ранга.

Зато тензорски рачун представља математичку дисциплину, односно апарат аналитичке и диференцијалне геометрије за проучавање физичких и геоматријских величина на основу закона трансформације координата којима се приказују.

Тензорски рачун је уско повезан са прикладном симболиком, којом се постиже велика прегледност физичких или геометријских величина и рационалност рачунања. Тензорски рачун је увео Ричи почетком двадесетог века и нашао је примену у теорији релативности, и у свим областима механике (механике континуума, механици флуида, аналитичкој механици, теорији стабилности) и посебно у свим гранама математичке физике. Основни принцип на коме почива тензорски рачун - Принцип инваријантности - најбоље је исказао руски физичар Е. Вигнер: «Принцип инваријантности служи као пробни камен у провери истинитости закона природе и откривању нових закона природе».

Уобичајено је да се тензорима називају величине које су другог, трећег или вишег реда, а ако се ништа посебно не нагласи онда се тензори другог реда називају у литератури скраћено само тензори. Тензори другог реда дефинисани су са 9 компоненти, тензори трећег реда са 27 компоненти, односно уопштено, број тензора n -тог реда је 3^n . Тако се и скалари могу сматрати тензорима нултог реда, а вектори су тензори првог реда. Типични тензори другог реда у механици флуида су: тензор инерције J , тензор напрезања T , тензор брзине деформације D , тензор вртложности B итд. Компоненте тензора се мењају се при ротацији координатног система по закону трансформације тензора.



Слика 3.2

Ред Тензора	Назив	Потребан Број података		Примери Примене
		У равни	У простору	
Нулти	Скалар	$2^0 = 1$	$3^0 = 1$	Маса, дужина, време, температура
Први	Вектор	$2^1 = 2$	$3^1 = 3$	Сила, брзина, убрзање
Други	Тензор	$2^2 = 4$	$3^2 = 9$	Напрезање, деформација
Трећи	Тензор 3 реда	$2^3 = 8$	$3^3 = 27$	Сложена напрезања, деформације
Четврти	Тензор 4 реда	$2^4 = 16$	$3^4 = 81$	Тензор еластичности, тензор крутости

Гиббс-ов или симболички запис вектора

Горе наведени пример означавања векторских и тензорских величина се назива симболички или Гиббс-ов, а такав запис не зависи од избора координата. Тако би други Њутнов закон примењен на тело масе m , на који делује резултантна сила \vec{F} , гласио: $m\vec{a} = \vec{F}$.

Из наведеног записа се може закључити да су вектор \vec{a} убрзања тела и вектор силе \vec{F} колинеарни вектори и да је вектор силе сразмеран производу масе и убрзања. Такође, може се закључити да ако на исто тело делује два пута већа сила да ће и убрзање бити два пута веће. У механици, међутим, овакви релативни односи међу величинама нису задовољавајући, већ је потребно да се свака величина бројчано дефинише. Бројчано изражавање векторске физичке величине подразумева избор координатног система, као и приказ вектора помоћу компоненти које представљају пројекције тог вектора на оси изабраног координатног система. Тада је свака компонента једна скаларна величина чији се садржај исказује мерним бројем и мерном јединицом. Слика 3.1 приказује Декартов координатни систем $Oxyz$ у ком су \vec{i} , \vec{j} и \vec{k} јединични вектори у смеру оса x , y и z . Скуп 3 јединичних вектора у смеровима координатних оса представља базу векторског простора, а сви вектори у простору се могу приказати као линеарна комбинација тих базних вектора. Коефицијенти те линеарне комбинације су компоненте вектора, односно пројекције вектора на смер три осе. Пројекције вектора \vec{a} на смер појединих оси добијају се његовим скаларним множењем са јединичним векторима \vec{i} , \vec{j} и \vec{k} . Тако се вектор \vec{a} може приказати у следећем облику: $\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$. Сила \vec{F} такође може да се прикаже помоћу компоненти: $\vec{F} = F_x \vec{i} + F_y \vec{j} + F_z \vec{k}$.

односно после замене у други Њутнов закон и пројекције на дати координатни систем добијају се 3 скаларне једначине:

$$ma_x = F_x, \quad ma_y = F_y, \quad ma_z = F_z$$

Операције са векторима

Сабирање вектора

Збир два вектора је вектор. Ако је збир вектора \vec{a} и \vec{b} једнак вектору \vec{c} , преведено у Гиббс-ов запис гласило би:

$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$; векторска једначина може се приказати преко три скаларне једначине: $c_x = a_x + b_x$, $c_y = a_y + b_y$, $c_z = a_z + b_z$

Израз представља познато правило за аналитичко сабирање вектора, по коме се вектори сабирају тако да им се сабирају компоненте које им припадају.

Множење вектора скаларом Производ скалара и вектора је вектор.

Ако је вектор \vec{c} једнак производу скалара λ са вектором \vec{a} , може се писати:

$$\vec{c} = \lambda \vec{a}$$

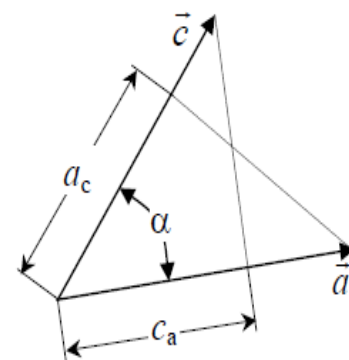
Једначина се може разложити на три скаларне једначине:

$$c_x = \lambda a_x, \quad c_y = \lambda a_y, \quad c_z = \lambda a_z$$

Скаларни производ два вектора Скаларни или унутрашњи производ два вектора је скалар који је по величини једнак производу интензитета оба вектора и косинуса угла између њих. Скаларни производ се означава $(\vec{a}) \cdot (\vec{c})$

Слика 3.3 приказује векторе \vec{a} и \vec{c} , који међусобно праве угао α . Ако се са λ означи њихов скаларни производ, може се писати:

$$\lambda = \vec{a} \cdot \vec{c} = ac \cos \alpha = a c_a = a_c c$$



Слика 3.3

представљају интензитете вектора \vec{a} и \vec{c} , а c_a и a_c пројекцију вектора \vec{c} на вектор \vec{a} , односно пројекцију вектора \vec{a} на вектор \vec{c} . Скаларни производ вектора самог са собом даје квадрат његовог интензитета. Скаларни производ изражен преко компоненти вектора дефинисан је изразом:

$$\lambda = a_x c_x + a_y c_y + a_z c_z .$$

Векторски производ два вектора

Векторски или спољашњи производ два вектора је вектор, који је нормалан на оба вектора која чине производ, а по величини је једнак производу интензитета тих вектора и синуса угла између вектора. Оријентација вектора који је резултат векторског производа два вектора одређује се правилом десне руке. Интензитет вектора \vec{v} је према овом правилу: $v = ac \sin \alpha$.

Геометријски гледано интензитет векторског производа представља површину паралелограма чије су стране вектори \vec{a} и \vec{c} . Ако се вектори у векторском производу $\vec{v} = \vec{a} \times \vec{c}$ прикажу помоћу компоненти, следи:

$$\vec{v} = \vec{a} \times \vec{c} = (a_y c_z - a_z c_y) \vec{i} + (a_z c_x - a_x c_z) \vec{j} + (a_x c_y - a_y c_x) \vec{k} .$$

Сложени производ вектора-

Векторски производ два вектора је вектор ког можемо такође скаларно или векторски помножити са другим векторима тако да се добијају векторско-векторски и векторско-скаларни производи вектора. Скаларно-векторски производ (мешовити производ) вектора \vec{a} , \vec{b} и \vec{c} је скалар $\lambda = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$. Геометријски гледано мешовити производ је запремина паралелопипеда коме су стране вектори \vec{a} , \vec{b} и \vec{c} . Векторски производ вектора \vec{b} и \vec{c} , по интензитету одговара површини базе паралелопипеда, а скаларни производ одговара пројекцији трећег на нормалу на ту базу, односно производу висине паралелопипеда и те површине базе. Овај производ може се приказати преко детерминанте трећег реда у којој су врсте компоненте вектора који чине производ и то по редоследу у коме се појављују у производу:

$$\lambda = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = a_x b_y c_z + a_y b_z c_x + a_z b_x c_y - a_y b_x c_z - a_x b_z c_y - a_z b_y c_x$$

$$\text{има вредност: } \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a})$$

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = -\vec{a} \cdot (\vec{c} \times \vec{b}) .$$

Уводна разматрања тензорског рачуна, сумирање

Разматра се сума

$$S = a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + \dots + a_n x_n , \quad (\text{т1.1})$$

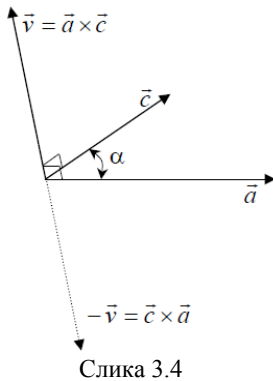
или

$$S = \sum_{i=1}^n a_i x_i , \quad (\text{т1.2})$$

или

$$S = \sum_{j=1}^n a_j x_j = \sum_{k=1}^n a_k x_k . \quad (\text{т1.3})$$

Индекси i , j и k у једначинама (т1.2) и (т1.3) се називају *неми индекси*. Према томе, ако се индекс понавља унутар једног члана,



Слика 3.4

онда представља *неми индекс* који указује на суму. По конвенцији, сваки овакав индекс има вредност 1, 2, 3. На пример,

$$S = \sum_{i=1}^3 a_i x_i \quad (\text{сума 3 параметра})$$

и

$$(т1.4)$$

$$S = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 a_{ij} x_i x_j \quad (\text{сума } 3^2 \text{ параметара}).$$

Ради лакшег сабирања користи се тзв. **Ајништајнова конвенција о сабирању**.

$$y_i = a_{im} x_m$$

$$S = a_i x_i$$

и

$$(т1.5)$$

$$S = a_{ij} x_i x_j .$$

Слободни индекси – Вишеструке једначине

Разматра се

$$\begin{aligned} y_1 &= a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 \\ y_2 &= a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + a_{23} x_3 \\ y_3 &= a_{31} x_1 + a_{32} x_2 + a_{33} x_3 . \end{aligned}$$

$$(т1.6)$$

Користећи неми индексе, једначине (т1.6) могу бити редуковане на

$$\begin{aligned} y_i &= a_{in} x_n \\ y_2 &= a_{2n} x_n \\ y_3 &= a_{3n} x_n . \end{aligned}$$

$$(т1.7)$$

Једначине (т1.7) су истог облика, а разликују се само у индексима 1, 2, 3. Према томе, уводећи **концепт слободног индекса**, (т1.7) се може написати као

$$y_i = a_{in} x_n , \quad (т1.8)$$

где је i слободан индекс, а n је неми индекс. Слободни индекси се појављују само једном у сваком члану једначине, указујући на вишеструке једначине. Обично су им вредности 1, 2, 3.

На пример, $y_i = a_{im} x_m$ представља 3 једначине, сваку са три члана на десној страни. Слободан индекс који се појављује у сваком члану мора бити исти. Ако у једначини има два слободна индекса, онда тај израз представља девет једначина. На пример,

$$T_{ij} = A_{im} A_{jm} \quad (т1.9)$$

представља 9 једначина, свака са три члана на десној страни. Узимајући да су слободни индекси $i = 1$ и $j = 2$, добија се

$$T_{12} = A_{11} A_{21} + A_{12} A_{22} + A_{13} A_{23} . \quad (т1.10)$$

Осталих 8 једначина добијају се комбинујући i и j .

Кронекеров симбол

Кронекеров симбол је дефинисан као

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \quad (т1.11)$$

На пример, $\delta_{11} = \delta_{22} = \delta_{33} = 1$ и $\delta_{12} = \delta_{13} = \delta_{21} = \dots = 0$. Матрица

$$\begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23} \\ \delta_{31} & \delta_{32} & \delta_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \delta_{im} a_m = a_i \quad (т1.12)$$

представља идентичну матрицу. Као примери могу се навести:

$$1. \quad \delta_{ii} = \delta_{11} + \delta_{22} + \delta_{33} = 3, \quad (\text{т1.13})$$

$$2. \quad \delta_{1m} a_m = \delta_{11} a_1 + \delta_{12} a_2 + \delta_{13} a_3 = a_1$$

$$\delta_{2m} a_m = a_2 \quad (\text{т1.14})$$

$$\delta_{3m} a_m = a_3,$$

или

$$\delta_{im} a_m = a_i. \quad (\text{т1.15})$$

3. Уопштено

$$\delta_{im} T_{im} = T_{ij}. \quad (\text{т1.16})$$

Треба запамтити да (т1.16) представља 9 једначина. Такође, треба запазити да су у (т1.15) a_i компоненте вектора (нпр. померање, вектор напона), а у (т1.16) T_{ij} су компоненте тензора (нпр. напон, мера деформације).

4. Кронекеров симбол δ_{ij} може се користити

$$\delta_{im} \delta_{mj} = \delta_{ij}$$

$$\delta_{im} \delta_{mj} \delta_{jn} = \delta_{in}. \quad (\text{т1.17})$$

5. Ако су $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ узајамно управни јединичини вектори $\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij}$ (т1.18)

$$\text{или, } \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1 = \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_2 = \vec{e}_3 \cdot \vec{e}_3 = 1$$

$$\text{и } \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_3 = \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 = \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1 = \dots = 0.$$

Операције

1. *Супституција.* Дата су два израза

$$a_i = U_{im} b_m \quad (\text{т1.19})$$

и

$$b_i = V_{im} c_m. \quad (\text{т1.20})$$

Да би се (т1.20) заменила у (т1.19), треба заменити индекс i у једначини (т1.20) са m

$$b_m = V_{mn} c_n. \quad (\text{т1.21})$$

Заменом (т1.21) у (т1.19) добија се

$$a_i = U_{im} V_{mn} c_n. \quad (\text{т1.22})$$

Израз (1.22) представља 3 једначине (један слободан индекс) са девет чланова на свакој десној страни (два нема индекса).

2. *Множење.* Ако је $p = a_m b_m$ и $q = c_m d_m$, онда променом немог индекса m у n у изразу за q је

$$pq = a_m b_m c_n d_n \quad (\text{т1.23})$$

3. *Скаларни производ вектора.* Дата су два вектора $\vec{a} = a_i \vec{e}_i$ и

$$\vec{b} = b_j \vec{e}_j, \text{ следи } \vec{a} \cdot \vec{b} = (a_i \vec{e}_i) \cdot (b_j \vec{e}_j) = a_i b_j (\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j).$$

Тада је из (т1.18) $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_i b_j \delta_{ij} = a_i b_i$. Тако је

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_i b_i. \quad (\text{т1.24})$$

Користећи скаларни производ такође се може дефинисати интензитет вектора

$$|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}} = \sqrt{a_i a_i}. \quad (\text{т1.25})$$

Скаларни производ \vec{a} и \vec{b} такође је дат као $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta$, где је θ угао између та два вектора. За скаларни производ важе закони комулације и дистрибуције, тако да је $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ и $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$, респективно.

4. *Факторисање.* Ако је

$$T_{ij} n_j - \lambda n_i = 0, \quad (\text{т1.26})$$

онда коришћењем (т1.15), $n_i = \delta_{ij} n_j$. Тако (т1.26) постаје

$$T_{ij} n_j - \lambda \delta_{ij} n_j = (T_{ij} - \lambda \delta_{ij}) n_j = 0. \quad (\text{т1.27})$$

ТЕНЗОРИ 2 реда

*Дефиниција тензора**

Тензор представља линеарну трансформацију, означену са \mathbf{T} . Трансформише било који вектор у други вектор. Тензор другог реда представља 9 скаларних величина тако да

$$\mathbf{T}\vec{a} = \vec{b}, \quad (\text{т2.1})$$

\mathbf{T} има следеће особине

$$\begin{aligned} \mathbf{T}(\vec{a} + \vec{b}) &= \mathbf{T}\vec{a} + \mathbf{T}\vec{b}, \\ \mathbf{T}(\alpha\vec{a}) &= \alpha\mathbf{T}\vec{a} \end{aligned} \quad (\text{т2.2})$$

где је α скалар.

Компоненте тензора

Нека су \vec{e}_1 , \vec{e}_2 и \vec{e}_3 јединични вектори у правоуглом Декартовом координатном систему. Декартове координате вектора \vec{a} дате су са $a_1 = \vec{a} \cdot \vec{e}_1$, $a_2 = \vec{a} \cdot \vec{e}_2$ и $a_3 = \vec{a} \cdot \vec{e}_3$, или

$$a_i = \vec{a} \cdot \vec{e}_i. \quad (\text{т2.3})$$

Еквивалентно томе

$$\vec{a} = a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2 + a_3 \vec{e}_3 = a_i \vec{e}_i. \quad (\text{т2.4})$$

Сада се разматра тензор \mathbf{T} . За било који вектор \vec{a} , $\vec{b} = \mathbf{T}\vec{a}$ је вектор дат са

$$\vec{b} = \mathbf{T}\vec{a} = \mathbf{T}(a_i \vec{e}_i) = a_i \mathbf{T}\vec{e}_i, \quad (\text{т2.5})$$

На пример, $\vec{b} = a_1 \mathbf{T}\vec{e}_1 + a_2 \mathbf{T}\vec{e}_2 + a_3 \mathbf{T}\vec{e}_3$. Треба приметити да $\mathbf{T}\vec{e}_i$ нису међусобно управни јединични вектори. Користећи (т2.1) и

(т2.3), компоненте \vec{b} су

$$b_1 = \vec{e}_1 \cdot \vec{b} = \vec{e}_1 \cdot (a_i \mathbf{T}\vec{e}_i) = a_i \vec{e}_1 \cdot \mathbf{T}\vec{e}_i = a_1 \vec{e}_1 \cdot \mathbf{T}\vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_1 \cdot \mathbf{T}\vec{e}_2 + a_3 \vec{e}_1 \cdot \mathbf{T}\vec{e}_3$$

на сличан начин је и

$$b_2 = a_i \vec{e}_2 \cdot \mathbf{T}\vec{e}_i$$

$$b_3 = a_i \vec{e}_3 \cdot \mathbf{T}\vec{e}_i,$$

или

$$\boxed{b_i = a_j \vec{e}_i \cdot \mathbf{T}\vec{e}_j}. \quad (\text{т2.6})$$

$\vec{b} = \mathbf{T}\vec{a}$ у матричном формату је

* овде се даје мање ригорозна дефиниција тензора

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \quad (\text{т2.6a})$$

одакле се види

$$b_i = T_{ij} a_j. \quad (\text{т2.7})$$

Поредећи једначине (т2.6) и (т2.7), види се да су компоненте \mathbf{T}

$$T_{ij} = \vec{e}_i \cdot \mathbf{T} \vec{e}_j. \quad (\text{т2.8})$$

Пример 1. Шта је вектор $\mathbf{T} \vec{e}_j$?

Решење. $\mathbf{T} \vec{e}_j = T_{kj} \vec{e}_k. \quad (\text{т2.9})$

Да би се ово разумело, разматра се $\mathbf{T} \vec{e}_2$ као пример.

$$\mathbf{T} \vec{e}_2 = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{12} \\ T_{22} \\ T_{32} \end{bmatrix}. \quad (\text{т2.10})$$

Према томе, j у $\mathbf{T} \vec{e}_j$ означава колону, на исти начин на који j означава колону у изразу T_{ij} . По дефиницији

$$\begin{bmatrix} T_{12} \\ T_{22} \\ T_{32} \end{bmatrix} = T_{12} \vec{e}_1 + T_{22} \vec{e}_2 + T_{32} \vec{e}_3 = T_{k2} \vec{e}_k. \quad (\text{т2.11})$$

Поредећи (т2.10) и (т2.11), види се $\mathbf{T} \vec{e}_2 = T_{k2} \vec{e}_k$. Према (т2.6) са $i = 3$ и $j = 2$, из (т2.8) и дефиниције скаларног производа

$$T_{32} = \vec{e}_3 \cdot \mathbf{T} \vec{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot [T_{12} \quad T_{22} \quad T_{32}] = (0)(T_{12}) + (0)(T_{22}) + (1)(T_{32}) = T_{32} \quad (\text{т2.12})$$

Према томе, i у \vec{e}_i у (т2.6) означава врсту, на исти начин на који i означава врсту у изразу за T_{ij} .

Суме и производи тензора

Нека су \mathbf{T} и \mathbf{S} два тензора. Онда је

$$(\mathbf{T} + \mathbf{S}) \vec{a} = \mathbf{T} \vec{a} + \mathbf{S} \vec{a}. \quad (\text{т2.13})$$

Испитујући компоненте збира види се

$$(\mathbf{T} + \mathbf{S})_{ij} = T_{ij} + S_{ij}, \quad (\text{т2.14})$$

Или, означавајући матрично

$$[\mathbf{T} + \mathbf{S}] = [\mathbf{T}] + [\mathbf{S}], \quad (\text{т2.15})$$

где је $[\mathbf{T}]$ матрични приказ тензора \mathbf{T} . Производ два тензора

$$(\mathbf{TS}) \vec{a} = \mathbf{T}(\mathbf{S} \vec{a}), \quad (\text{т2.16})$$

$$(\mathbf{TS})_{ij} = T_{im} S_{mj}, \quad (\text{т2.17})$$

$$[\mathbf{TS}] = [\mathbf{T}][\mathbf{S}]. \quad \text{матрична нотација} \quad (\text{т2.18})$$

$$\text{Напомена: Уопштено, } \mathbf{TS} \neq \mathbf{ST}. \quad (\text{т2.19})$$

Јединични тензор

Тензор идентичности (јединични) I представља линеарну трансформацију која трансформише било који вектор у њега самог. Према томе је,

$$\mathbf{I}\vec{a} = \vec{a}, \quad (\text{т2.20})$$

одакле се види да се I може представити као

$$\mathbf{I} = \delta_{ij}. \quad (\text{т2.21})$$

Транспоновни тензор

Транспоновани тензор \mathbf{T} је дефинисан као тензор \mathbf{T}^T који задовољава

$$\vec{a} \cdot (\mathbf{T}\vec{b}) = \vec{b} \cdot (\mathbf{T}^T\vec{a}). \quad (\text{т2.22})$$

Узимајући у обзир јединичне векторе, за које (т2.22) мора такође да буде $\vec{e}_i \cdot (\mathbf{T}\vec{e}_j) = \vec{e}_j \cdot (\mathbf{T}^T\vec{e}_i)$, тако да следи

$$T_{ij} = (T^T)_{ji}. \quad (\text{т2.23})$$

Напомена: Транспоновани производ два тензора је производ два транспонована тензора у обрнутом редоследу.

$$(\mathbf{TS})^T = \mathbf{S}^T\mathbf{T}^T. \quad (\text{т2.24})$$

Ортогонални тензори

Ортогонални тензор \mathbf{Q} представља линеарну трансформацију код које трансформисани вектори чувају своје дужине и углове.

$$|\mathbf{Q}\vec{a}| = |\vec{a}|. \quad (\text{т2.25})$$

Напомена: Уопште $\mathbf{Q}\vec{a} \neq \vec{a}$. Само су њихове дужине једнаке.

Даље је

$$\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \cos(\mathbf{Q}\vec{a}, \mathbf{Q}\vec{b}), \quad (\text{т2.26})$$

одакле следи

$$(\mathbf{Q}\vec{a}) \cdot (\mathbf{Q}\vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{b} \quad \mathbf{S}\vec{e}_2 = \vec{e}_3. \quad (\text{т2.27})$$

Напомена: Уопште, $\mathbf{T}\mathbf{T}^T \neq \mathbf{T}^T\mathbf{T} \neq \mathbf{I}$, али $\mathbf{Q}\mathbf{Q}^T = \mathbf{Q}^T\mathbf{Q} = \mathbf{I}$.

Објашњење следи из (т2.22)

$$(\mathbf{Q}\vec{a}) \cdot (\mathbf{Q}\vec{b}) = \vec{b} \cdot (\mathbf{Q}^T(\mathbf{Q}\vec{a})). \quad (\text{т2.28})$$

Заменом (т2.27) у (т2.28) се добија

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} &= \vec{b} \cdot (\mathbf{Q}^T(\mathbf{Q}\vec{a})) \\ \vec{b} \cdot \vec{a} - \vec{b} \cdot \mathbf{Q}^T(\mathbf{Q}\vec{a}) &= 0 \end{aligned} \quad (\text{т2.28a})$$

$$\vec{b} \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{Q}^T\mathbf{Q})\vec{a} = 0.$$

Одатле, за произвољне векторе \vec{a} и \vec{b}

$$\mathbf{I} = \mathbf{Q}^T\mathbf{Q} = \mathbf{Q}\mathbf{Q}^T. \quad (\text{т2.29})$$

Отуда, за ортогонални тензор \mathbf{Q} , такође је тачно

$$\mathbf{Q} = \mathbf{Q}^{-1}. \quad (\text{т2.30})$$

$$\mathbf{Q}_{im}\mathbf{Q}_{jm} = \mathbf{Q}_{mi}\mathbf{Q}_{mj} = \delta_{ij}. \quad (\text{т2.31})$$

Напомена: Детерминанта ортогоналног тензора је ± 1 , где је

$$\det(\mathbf{Q}) = \begin{cases} +1 & \text{govori o rotaciji} \\ -1 & \text{govori o refleksiji} \end{cases} \quad (\text{т2.32})$$

Симетричан тензор, главне вредности и главни правци

Симетрични vs. асиметрични тензори

Тензор \mathbf{T}^{symm} је дефинисан као симетричан ако и само ако је $\mathbf{T}^{symm} = (\mathbf{T}^{symm})^T$. Ово је другачије од ортогоналних тензора. Симетричан тензор не очувава обавезно дужине и углове. Компоненте симетричног тензора задовољавају

$$\begin{aligned} \mathbf{T} &= \mathbf{T}^{symm} + \mathbf{T}^{asymm} \\ T_{23} &= -T_{32} \\ \mathbf{T}^{asymm} &= \frac{\mathbf{T} - \mathbf{T}^T}{2} \\ T_{ij} &= T_{ji}. \end{aligned} \quad (т3.1)$$

То значи да је $T_{12} = T_{21}$, $T_{31} = T_{13}$ и $T_{23} = T_{32}$. Такође, дијагонални елементи тезора \mathbf{T}^{symm} и $(\mathbf{T}^{symm})^T$ морају бити једнаки. Тензор \mathbf{T}^{asymm} је антисиметричан ако и само ако је $\mathbf{T}^{asymm} = -(\mathbf{T}^{asymm})^T$. Компоненте антисиметричног тензора задовољавају

$$T_{ij} = -T_{ji}. \quad (т3.2)$$

То значи да је $T_{12} = -T_{21}$, $T_{31} = -T_{13}$ и $T_{23} = -T_{32}$. Такође, дијагонални елементи \mathbf{T}^{asymm} морају бити једнаки нули. Антисиметрични тензори су такође познати као асиметрични тензори. Било који тензор \mathbf{T} увек може бити растављен на збир симетричних и антисиметричних тензора.

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}^{symm} + \mathbf{T}^{asymm}, \quad (т3.3)$$

где је

$$\begin{aligned} \mathbf{T}^{symm} &= \frac{\mathbf{T} + \mathbf{T}^T}{2}, \\ \mathbf{T}^{asymm} &= \frac{\mathbf{T} - \mathbf{T}^T}{2}. \end{aligned} \quad (т3.4)$$

Тензорски производ два вектора-дијада

Тензорски производ два вектора је тензор другог реда. Ако међу векторима нема ознаке ни за скаларни ни за векторски производ, подразумева се да је у питању тензорски производ. Ако је тензор \mathbf{T} резултат множења вектора \vec{a} и \vec{c} , може се писати:

$$\mathbf{T} = \vec{a}\vec{c} = (a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k})(c_x\vec{i} + c_y\vec{j} + c_z\vec{k}).$$

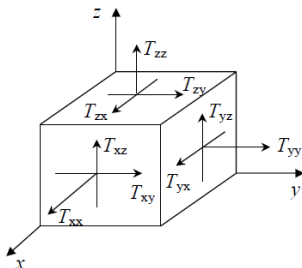
Тензори се као и вектори приказују помоћу компоненти. Приказом вектора у горњем изразу уз помоћ компоненти следи:

$$T_{ij} = a_i c_j = \begin{pmatrix} a_x c_x & a_x c_y & a_x c_z \\ a_y c_x & a_y c_y & a_y c_z \\ a_z c_x & a_z c_y & a_z c_z \end{pmatrix}.$$


Тензор другог реда има два слободна индекса и $3^2 = 9$ компоненти. Дијагонала која се протеже од левог горњег до десног доњег члана у горњој шеми назива се главном дијагоналом тензора.

База тензорског простора

$$\begin{bmatrix} \vec{i}\vec{i} & \vec{i}\vec{j} & \vec{i}\vec{k} \\ \vec{j}\vec{i} & \vec{j}\vec{j} & \vec{j}\vec{k} \\ \vec{k}\vec{i} & \vec{k}\vec{j} & \vec{k}\vec{k} \end{bmatrix}$$



Слика 3.5

Означавање тензора 
површина смер

$$\begin{aligned} \mathbf{T} = & T_{xx}\bar{i}\bar{i} + T_{xy}\bar{i}\bar{j} + T_{xz}\bar{i}\bar{k} \\ & + T_{yx}\bar{j}\bar{i} + T_{yy}\bar{j}\bar{j} + T_{yz}\bar{j}\bar{k} \\ & + T_{zx}\bar{k}\bar{i} + T_{zy}\bar{k}\bar{j} + T_{zz}\bar{k}\bar{k} \end{aligned}$$

или

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} T_{xx} & T_{xy} & T_{xz} \\ T_{yx} & T_{yy} & T_{yz} \\ T_{zx} & T_{zy} & T_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{i}_x \\ \bar{i}_y \\ \bar{i}_z \end{bmatrix}$$

Множење тензора скаларом:

$$\begin{aligned} B_{xx} &= \lambda A_{xx} \\ B_{xy} &= \lambda A_{xy} \\ &\vdots \\ \mathbf{B} &= \lambda \mathbf{A} \quad \text{или} \quad B_{zz} = \lambda A_{zz} \end{aligned}$$

Сабирање тензора

$$\begin{aligned} C_{xx} &= A_{xx} + B_{xx} \\ C_{xy} &= A_{xy} + B_{xy} \\ &\vdots \\ \mathbf{C} &= \mathbf{A} + \mathbf{B} \quad \text{или} \quad C_{zz} = A_{zz} + B_{zz} \end{aligned}$$

Унутрашњи производ вектора и тензора

Као што је речено вектори, као и тензори првог реда, могу се множити скаларно, векторски или тензорски, а резултат множења је скалар, вектор или тензор. Такође је показано да се од тензорског производа вектора долази до њиховог скаларног производа једноставним изједначавањем индекса у тензорском производу. Код тензора вишег реда дефинишу се *само унутрашњи производи и тензорски производ*. При унутрашњем производу ред тензора производа се смањује, а при тензорском производу се повећава. Тако је унутрашњи производ вектора и тензора другог реда вектор, производ се означава тачкицом па може симболички да се запише у облику $\vec{a} = \vec{b} \cdot \mathbf{T}$. Приказом садржаја вектора и тензора преко компоненти следи:

$$\begin{aligned} \vec{a} &= \vec{n} \cdot \mathbf{T} \\ &= (n_x T_{xx} + n_y T_{yx} + n_z T_{zx})\bar{i} + (n_x T_{xy} + n_y T_{yy} + n_z T_{zy})\bar{j} + (n_x T_{xz} + n_y T_{yz} + n_z T_{zz})\bar{k} \\ &= (n_x, n_y, n_z) \begin{bmatrix} T_{xx} & T_{xy} & T_{xz} \\ T_{yx} & T_{yy} & T_{yz} \\ T_{zx} & T_{zy} & T_{zz} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

(према правилима множења матрица). Напомена:

$$\vec{n} \cdot \mathbf{T} \neq \mathbf{T} \cdot \vec{n} !$$

Типичан пример примене скаларног производа у механици континуума је одређивање вектора напона на елементарној

површини оријентисаној јединичним вектором нормале \vec{n} . Као што је пре споменуто тензор напона дефинише стање напона у тачки простора, а свака врста тог тензора садржи три компоненте вектора напона на површинама оријентисаним векторима нормале у смеру оса x , y и z , као што је приказано на слици 3.5. Вектор напона на површини оријентисаној јединичним вектором нормале \vec{n} (означен са $\vec{\sigma}$, односно у индексном запису са σ_i) дефинисан је изразом:

$$\vec{\sigma} = \vec{n} \otimes \mathbf{T}.$$

Транспоновани тензор T^T , -замена врсти колонама

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} T_{xx} & T_{xy} & T_{xz} \\ T_{yx} & T_{yy} & T_{yz} \\ T_{zx} & T_{zy} & T_{zz} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{T}^T = \begin{bmatrix} T_{xx} & T_{yx} & T_{zx} \\ T_{xy} & T_{yy} & T_{zy} \\ T_{xz} & T_{yz} & T_{zz} \end{bmatrix}$$

Траг тензора представља збир чланова на главној дијагонали (I инваријанта тензора)

Симетрични тензор $S = S^T$ тј.

$$S_{xy} = S_{yx} \quad \mathbf{S} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 6 \\ -4 & 6 & 5 \end{bmatrix}$$

$S_{xz} = S_{zx}$
 $S_{yz} = S_{zy}$ пр.

Антисиметрични тензор $A = -A^T$ или $A_{xx} = A_{yy} = A_{zz} = 0$

$$A_{xy} = -A_{yx} \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 4 & -1 \\ -4 & 0 & -5 \\ 1 & 5 & 0 \end{bmatrix}$$

$A_{xz} = -A_{zx}$
 $A_{yz} = -A_{zy}$ пр.

$$\lambda = \mathbf{A} : \mathbf{B}$$

двоструки скаларни производ тензора

$$\lambda = \mathbf{A} : \mathbf{B} = \begin{bmatrix} A_{xx} & A_{xy} & A_{xz} \\ A_{yx} & A_{yy} & A_{yz} \\ A_{zx} & A_{zy} & A_{zz} \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} B_{xx} & B_{xy} & B_{xz} \\ B_{yx} & B_{yy} & B_{yz} \\ B_{zx} & B_{zy} & B_{zz} \end{bmatrix}$$

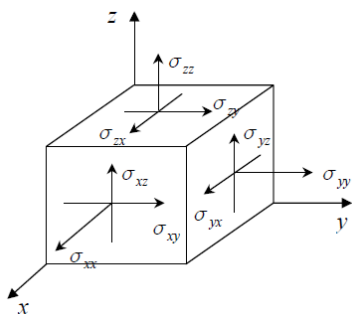
$$\lambda = A_{xx}B_{xx} + A_{xy}B_{xy} + A_{xz}B_{xz} + A_{yx}B_{yx} + A_{yy}B_{yy} + A_{yz}B_{yz} + A_{zx}B_{zx} + A_{zy}B_{zy} + A_{zz}B_{zz}$$

Тензор напона

Типични тензор другог реда који се појављује у механици континуума је тензор напона. Код тензора напона компоненте на главној дијагонали означавају нормалне напоне, а компоненте изван главне дијагонале тангенцијалне напоне. Слика 3.5 илуструје садржај компоненти тензора напона на примеру елементарног паралелоипеда димензија dx , dy и dz . На том паралелопипеду су присутне три карактеристичне површине, чији вектори спољашње нормале (вектори нормални на површину и гледају од паралелоипеда) су у позитивним смеровима оса. На свакој тој површини делује вектор напона који се може разложити на три компоненте, једну нормалну на површину и две тангенцијалне. Стање напона у тачки простора дефинисано је тензором напона. Компоненте тензора напона дефинисане су

компонентама три вектора напона који делују на површинама орјентисаним нормалама у смеру оса координатног система, као на слици. Сваки вектор напона има једну нормалну компоненту (нормалну на површину) и две тангенцијалне компоненте. Таблични запис компоненти тензора напона

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix}.$$



Слика 3.6

Први индекс означава врсту, а други колону. Тензор напона је симетричан $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ (осим ако постоје масени и површински моменти).

Веза између вектора и тензора напона (вектор напона је пројекција тензора напона на смер нормале)

$$\vec{\sigma}(\vec{n}) = \vec{n} \otimes \mathbf{T} = (n_x \sigma_{xx} + n_y \sigma_{yx} + n_z \sigma_{zx}) \vec{i} + (n_x \sigma_{xy} + n_y \sigma_{yy} + n_z \sigma_{zy}) \vec{j} + (n_x \sigma_{xz} + n_y \sigma_{yz} + n_z \sigma_{zz}) \vec{k}$$

Договори о предзнацима напона

Позитивни напони на површинама орјентисаним нормалама у позитивном смеру координатних оса су у позитивним смеровима тих оси и обрнуто, позитивни напони на површинама орјентисаним нормалама које су у негативном смеру координатних оса, су у негативним смеровима тих оси.

Еуклидски тродимезионални координатни системи, контраваријанте и коваријантне координате тачке

Проучавањем елементарне геометрије представе о простору стекле су се преко Декартовог координатног система $Oxyz$ (слика 3.9), са осама Ox , Oy и Oz које су међусобно ортогоналне. За осе се каже да чине *ортогонални триједар* или *ортогонални систем референције*. У њему се вектор положаја тачке приказује збиром

$$\vec{r} = \vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}, \quad (e1)$$

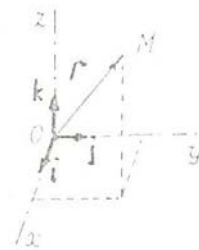
где су $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ јединични вектори оса. У косоуглом координатном систему (слика 3.10) јединичним векторима оса e_u , $\vec{e}_u = e_u$ ($u = 1, 2, 3$), вектор положаја тачке показује се збиром

$$\vec{r} = \mathbf{r} = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3 \quad (e2)$$

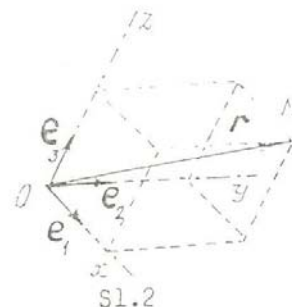
где су x, y, z три скалара, који се узимају за косоугле координате. У општем случају Еуклидског тродимензионалног простора E_3 , када се положај тачке одређује праволинијским координатама, могу се узети три некомплементарна вектора e_u ($u = 1, 2, 3$) са заједничким почетком O . Они образују *триједар вектора* или *основни базис координатног система* и зову се *координатни вектори тог триједра*. У том случају вектор положаја (e2) може се написати у облику

$$\mathbf{r} = x^1 \mathbf{e}_1 + x^2 \mathbf{e}_2 + x^3 \mathbf{e}_3, \quad (e3)$$

којим се разлаже на правце координатних оса. При томе се уведе три скалара x^u ($u = 1, 2, 3$), који се зову *контраваријанте координате тачке M* у односу на дати триједар. Када су базни вектори e_u јединични, *контраваријанте координате* x^u су алгебарске вредности компонента вектора \vec{r} растављеног на



S1.1



S1.2

Слика 3.9,горња,3.10,доња

правце *оса*. Ако је дат вектор \vec{r} у облику (е3), скаларним множењем редом са $(e_2 \times e_3)$, $(e_3 \times e_1)$ и $(e_1 \times e_2)$ одређујемо контраваријантне координате у облику

$$x^1 = \frac{1}{\Delta} r \cdot (e_2 \times e_3), \quad x^2 = \frac{1}{\Delta} r \cdot (e_3 \times e_1), \quad x^3 = \frac{1}{\Delta} r \cdot (e_1 \times e_2) \quad (e4)$$

$$\text{где је } \Delta = e_1 \cdot (e_2 \times e_3). \quad (e5)$$

Овде симбол „ \cdot “ означава скаларни, а симбол „ \times “ векторски производ. Претпостављајући да су у тродимензионалном Еуклидском простору дата три линеарно независна вектора e_u (основни базис), уводи се нови базис, нови триједар вектора e^u ($u = 1, 2, 3$) релацијама

$$e^1 = \frac{1}{\Delta} (e_2 \times e_3), \quad e^2 = \frac{1}{\Delta} (e_3 \times e_1), \quad e^3 = \frac{1}{\Delta} (e_1 \times e_2). \quad (e6)$$

Вектори e^u ($u = 1, 2, 3$) су коњуговани (спрегнути) са векторима e_u ($u = 1, 2, 3$) основног базиса. Управо вектори e^u формирају коњуговани координатни систем. Према релацијама (е6) очигледно је да између вектора основног базиса e_u и вектора коњугованог базиса e^u постоје везе

$$e_i \cdot e^j = \delta_i^j = \begin{cases} 1 & \text{за } i = j \\ 0 & \text{за } i \neq j \end{cases}, \quad (e7)$$

где је δ_i^j Кронекеров симбол. Одавде је могуће добити линеарну независност ових вектора, па је самим тим оправдан назив „базис“. Имениоц Δ је различит од нуле, јер међу векторима основног базиса нема компланарних или нула вектора. Отуда следи јединственост одређивања коњугованих вектора. Овај појам задовољава својство *узајамности*, тј. базис коњугован коњугованом постаје полазни. Према (е6) помоћу вектора e^u ($u = 1, 2, 3$) контраваријантне координате x^u ($u = 1, 2, 3$) тачке M могу се приказати у облику

$$x^i = r \cdot e^i \quad (u = 1, 2, 3), \quad (e8)$$

који указује да се контраваријантне координате изражавају скаларним производима вектора положаја тачке и координатних вектора коњугованог триједра. Са друге стране, ако узмемо векторе e^u и вектор положаја представимо векторским збиром

$$r = x_1 e^1 + x_2 e^2 + x_3 e^3, \quad (e9)$$

уводимо величине x_i ($u = 1, 2, 3$) које се зову **коваријантне координате тачке** M у односу на полазни (основни) триједар, одређен векторима e_i скаларним множењем

$$x_i = r \cdot e_i \quad (u = 1, 2, 3). \quad (e10)$$

Ако су вектори e_i ортогонални, коњуговани вектори e^u су такође ортогонални. Зато у овом случају коваријантне координате имају вредности одговарајућих контраваријантних координата. У ствари, нема разлике међу њима, па се могу приказивати или горњим или доњим индексима. Називи *ко-* и *контра-* *варијантне координате* су у вези са законима трансформације координата, тј. са законима прелаза на одређивање положаја тачке у односу на други координатни систем. Претпоставимо да је дата веза између координатних вектора новог базиса e_i и координатних вектора старог базиса e_i у облику

$$\begin{aligned}
e_{1'} &= A_{1'}^1 e_1 + A_{1'}^2 e_2 + A_{1'}^3 e_3, \\
e_{2'} &= A_{2'}^1 e_1 + A_{2'}^2 e_2 + A_{2'}^3 e_3, \\
e_{3'} &= A_{3'}^1 e_1 + A_{3'}^2 e_2 + A_{3'}^3 e_3,
\end{aligned} \tag{e11}$$

или

$$e_{i'} = A_{i'}^j e_j \quad (i', j = 1, 2, 3). \tag{e11a}$$

Овде је искоришћена тзв. *Ајнштајнова конвенција о сабирању по поновљеним индексима*. У овом случају је $j = 1, 2, 3$ и претходни израз може се написати развијено за произвољно i :

$$A_{i'}^j e_j = A_{i'}^1 e_1 + A_{i'}^2 e_2 + A_{i'}^3 e_3.$$

Ако смо присиљени да у неком изразу напишемо исти горњи и доњи индекс, а по њима се не сабира, заменићемо мала слова латинице великим словима.

Такође, нека су коваријантне координате вектора r у старом базису x_u и у новом $x_{u'}$. Према (e10) за њих су нам познати обрасци

$$x_i = r \cdot e_i, \quad x_{i'} = r \cdot e_{i'}, \quad x_{i'} = A_{i'}^i x_i \quad (i, i' = 1, 2, 3). \tag{e12}$$

Заменом израза (e11) у (e12), на пример за координату $x_{1'}$, налазимо

$$\begin{aligned}
x_{1'} &= r \cdot e_{1'} = A_{1'}^1 r \cdot e_1 + A_{1'}^2 r \cdot e_2 + A_{1'}^3 r \cdot e_3 \\
&= A_{1'}^1 x_1 + A_{1'}^2 x_2 + A_{1'}^3 x_3.
\end{aligned} \tag{e12a}$$

Аналогно одређујемо и друге координате, па је

$$\begin{aligned}
x_{1'} &= A_{1'}^1 x_1 + A_{1'}^2 x_2 + A_{1'}^3 x_3, \\
x_{2'} &= A_{2'}^1 x_1 + A_{2'}^2 x_2 + A_{2'}^3 x_3, \\
x_{3'} &= A_{3'}^1 x_1 + A_{3'}^2 x_2 + A_{3'}^3 x_3,
\end{aligned} \tag{e13}$$

или

$$x_{i'} = A_{i'}^i x_i. \tag{e13a}$$

Упоредивањем једнакости (e11) и (e13) увиђају се исти закони трансформација базних вектора и трансформација координата. Обе се врше истом шемом коефицијената $A_{i'}^i$. Управо ова сагласност примене исте шеме на латинском језику се изражава префиксом „*ко*“. За одређивање нових коваријантних координата $x^{i'}$ искористиће се једнакост

$$r = x^1 e_1 + x^2 e_2 + x^3 e_3 = x^{1'} e_{1'} + x^{2'} e_{2'} + x^{3'} e_{3'}$$

Заменом израза (e11) у десну страну ове једнакости и упоређивањем коефицијената уз исте базне векторе $e_{i'}$, долази се до једнакости

$$\begin{aligned}
x^1 &= A_{1'}^1 x^{1'} + A_{2'}^1 x^{2'} + A_{3'}^1 x^{3'}, \\
x^2 &= A_{1'}^2 x^{1'} + A_{2'}^2 x^{2'} + A_{3'}^2 x^{3'}, \\
x^3 &= A_{1'}^3 x^{1'} + A_{2'}^3 x^{2'} + A_{3'}^3 x^{3'},
\end{aligned} \tag{e14}$$

или

$$x^{i'} = A_{i'}^i x^i.$$

Упоредивањем израза (e13) и (e14) одмах је уочљива разлика. Прво, у изразу (14) су изражене старе координате преко нових, а у изразима (13) је обрнуто. Друго, сам распоред коефицијената $A_{i'}^i$ је овде измењен, замењене су колоне врстама. Зато се ово својство супротности изражава латинским префиксом „*контра*“.

Афини простор

Уводна разматрања посвећена су еуклидском тродимензионалном простору, са задржавањем на праволинијским и у општем случају косоуглим координатним системима. У посебном случају, када су осе међусобно ортогоналне имамо Декартов координатни систем.

Међутим, и *Еуклидски простор је посебан случај тзв. афиног векторског простора*. Овде се ради о неопходној генерализацији простора. Овакве генерализације се посебно користе при проучавању физичких система, описаних аналитичким изразима, када се описивање врши геометријским путем. Та се проширења или генерализације појма простора врше на такав начин да посматрани простор од три димензије, са свим својим својствима, буде специјалан случај генералисаног простора. Различити физички процеси се описују различитим бројем параметара, па и генералисани простори треба да имају више координата, односно координатних оса. Сами параметри стања или физичког процеса могу бити различите физичке величине. То значи да свака оса система приказује другу физичку величину. Самим тим и јединице мера појединих оса приказују се различитим дужинама. На пример, из термодинамике је познат дијаграм стања, који се описује притиском, температуром и запремином у тродимензионалном простору. При томе је свака од наведених величина приказана једном координатном осом. У таквом координатном систему нема смисла одређивање растојања између две тачке. Мерење дужине је могуће из било које тачке простора, али само у одређеном правцу. У другом правцу који приказује другу физичку величину и њему паралелним правцима, мери се другом јединицом мере. Ово значи да простор није изотропан. Али, *могућност постављања координатног почетка у било коју тачку простора значи да је простор хомоген*. Генерализација обичног тродимензионалног Еуклидског простора доводи до тзв. *линеарног и афиног простора*. Елементи линеарног простора су вектори као објекти линеарних операција. Упоредо са појмом линеарног простора уводи се појам афиног простора, чији су елементи тачке. Тачке афиног простора су на одређени начин повезане са векторима линеарног простора (аналогно геометрији обичног простора). Као што смо видели у поменутом примеру афиног тродимензионалног простора притиска, температуре и запремине, за разлику од наше представе о простору, стечене изучавањем елементарне геометрије, у афином простору нису дефинисани метрички појмови: *растојање између тачака и дужина линија, површине и запремине фигура, углови и ортогоналност*. При испитивању фигуре у афином простору изучавају се само она геометријска својства, која не зависе од метричких појмова. Тиме испитивање није изгубило свој значај и дозвољава решавање многих задатака. Предпоставимо да је стање неког физичког процеса у сваком тренутку могуће описати системом вредности a^1, a^2, \dots, a^n реалних променљивих x^1, x^2, \dots, x^n . Дати систем вредности a^i ($i = 1, 2, \dots, N$) зове се тачка, а скуп свих тачака за све могуће вредности променљивих x^i ($i = 1, 2, \dots, N$) зове се афини векторски простор од N димензија. Под вектором простора од N димензија подразумевају се две уређене тачке $A(a^1, a^2, \dots, a^n)$ и $B(b^1, b^2, \dots, b^n)$, с тим да се зна која је прва (почетак вектора) и која је друга (крај вектора). Ако је тачка $A(a^i)$ прва тачка, а

$B(b^i)$ друга, тада је одређен вектор \overline{AB} и зове се вектор померања тачке А до тачке Б. Може да се уведе и ознака $C = \overline{AB}$, па се тако бројеви

$$c^i = b^i - a^i \quad (u = 1, 2, \dots, N) \quad (e15)$$

зову координате вектора $C = \overline{AB}$ у простору од N димензија. У многим случајевима вектор се одређује само координатама (e15), подразумевајући да почетак може бити у било којој тачки простора, па се такав вектор сматра слободним. Положај тачке B је познат, ако су познате координате тачке А и координате вектора (e15). Аналогно, из тачке А као почетка променом координата (e15) може се добити положај било које тачке простора. Ови вектори се зову вектори положаја тачака у односу на дати пол (тачку А). Овако уопштење појма вектора дозвољава дефинисање операција над њима, аналогно познатом векторском израчунавању. Ако су $a(a^i)$ и $b(b^i)$ два вектора, или две тачке, тада је

- збир вектора: $c = a + b = \{a^i + b^i\} \quad (u = 1, 2, \dots, N)$,
- разлика вектора: $c = a + (-b) = \{a^i - b^i\}, \quad (u = 1, 2, \dots, N)$,
- производ вектора са скаларом:
 $ka = \{ka^i\} = \{ka^1, ka^2, \dots, ka^N\}$,
- координатни почетак и нула вектор: $0 = \{0, 0, \dots, 0\}$.

На овај начин тачке простора одређене векторима a и b , одређују и тачку $a + b$ истог простора. Исто тако, када је у простору тачка одређена вектором положаја a и све тачке у њему биће одређене векторима ka за разне вредности параметра k . Овим се истиче да је афини простор линеаран. Вектор, чије су координате

$$e_1 = \{1, 0, \dots, 0\},$$

$$e_2 = \{0, 1, \dots, 0\},$$

.....

$$e_N = \{0, 0, \dots, 1\}$$

зову се основни координатни вектори N -мерног афиног простора. Индекси уз јединице упозоравају да правци e_i имају различите јединице мера. За вектор померања r , одређеног са N координата x^i , кажемо да је N -тог реда. Сваки овакав вектор се може приказати као линеарна комбинација основних вектора e_i , тј.

$$r = x^1 e_1 + x^2 e_2 + \dots + x^N e_N = x^i e_i.$$

Ако је могуће наћи M бројева $\alpha^i \quad (u = 1, 2, \dots, M)$, који нису сви једанки нули, таквих да је линеарна комбинација вектора

$$\alpha^i a_i = 0 \quad \alpha^i \quad (u = 1, 2, \dots, M), \quad (e16)$$

(имамо у виду конвенцију о сабирању) једнака нули, каже се да су вектори a_i линеарно зависни. У противном, ако је једнакост (e16) задовољена само када су сви бројеви $\alpha^i \quad (u = 1, 2, \dots, M)$ једнаки нули, вектори a_i су међусобно линеарно зависни. Овакав простор, у коме су основни појмови тачка и вектор, и у коме су дефинисане само операције сабирања и множења вектора скаларом зове се афини простор или афини векторски простор. Посебан случај суженог афиног простора, код кога се у правцима

свих оса може мерити истом јединицом мере из сваке његове тачке, као у обичном простору, јесте N -мерни Еуклидов простор. Еуклидски простор је метрички простор, јер се њему, поред свих операција у афиним простору, може дефинисати и растојање између две тачке применом Питагорине или косинусне теореме. Другим речима, могуће је одредити дужину коначног вектора померања, па је могуће дефинисати и скаларни производ вектора. Ако су r_1 и r_2 вектори доведени на заједнички почетак и између њих је угао θ , тада је њихов скаларни производ

$$r_1 \cdot r_2 = |r_1| |r_2| \cos \theta. \quad (e17)$$

Пошто је већ разматран еуклидски тродимензионални простор (E_3), треба поновити све обрасце водећи рачуна да сада простор има N димензија. Као што је познато у Еуклидском метричком простору се може говорити о Декартовом правоуглом систему референције. У њему вектори e_i ($i = 1, 2, \dots, N$) формирају систем јединичних међусобно управних вектора (једнаких јединица мера). За такав базис се каже да га формира *ортономирани систем вектора*. Услов ортогоналности и нормираности приказује се скаларним производом

$$e_i \cdot e_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{za } i = j \\ 0 & \text{za } i \neq j \end{cases}, \quad (i, j = 1, 2, \dots, N) \quad (e18)$$

Ако су вектори $r_1(x^i)$ и $r_2(y^i)$ одређени пројекцијама x^i , y^i ($i, j = 1, 2, \dots, N$) у односу на Декартов правоугли систем, тада је њихов скаларни проивод

$$r_1 \cdot r_2 = x^1 y^1 + x^2 y^2 + \dots + x^N y^N = \sum_{i=1}^N x^i y^i. \quad (e19)$$