Универзитет у Београду

Машински факултет

Биомеханика ткива и органа

Тензорска алгебра - Четврти део

Београд, 2019.

Дефиниција тензора Тензор представља линеарно пресликавање између два вектора.

Шта су скалари и вектори према дефиницији тензора? Скалари су тензори нултог реда, а вектори су тензори првог реда.

Шта то значи?

$\vec{a} = \alpha\vec{b}$ $\Rightarrow$Скалар α пресликава вектор $\vec{b}$ у вектор $\vec{a}$

$\vec{a} = \vec{c} \times \vec{b}$ $\Rightarrow$Вектор $\vec{c}$ пресликава вектор $\vec{b}$ у вектор $\vec{a}$

$\vec{a} = \mathbf{T} \cdot \vec{b}$ $\Rightarrow$Тензор $\mathbf{T}$ пресликава вектор $\vec{b}$ у вектор $\vec{a}$

Тензори који се најчешће јављају у машинству су другог реда - у литератури се наводе као „тензори” (подразумева се да су другог реда)!

Вектори Вектор $\vec{a}$ може се представити преко својих компоненти у произвољном координатном систему:

$$\vec{a} = a_1\vec{e_1} + a_2\vec{e_2} + a_3\vec{e_3} + a_4\vec{e_4} + \cdots$$

где су вектори $\vec{e_i}$ базни вектори тог координатног система (вектори који одређују правац и смер координатних оса).

Специјално у Декартовом координатном систему постоје три ортогонална, јединична базна вектора, те се било који вектор може представити на следећи начин:

$$\vec{a} = a_1\vec{e_1} + a_2\vec{e_2} + a_3\vec{e_3}$$

Особине сабирања вектора су:

- комутативност $\Rightarrow \vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$
- асоцијативност $\Rightarrow \vec{a} + \left(\vec{b} + \vec{c}\right) = \left(\vec{a} + \vec{b}\right) + \vec{c}$
- постојање неутрала $\Rightarrow \vec{a} + 0 = \vec{a}$
- постојање инверза $\Rightarrow \vec{a} + (-\vec{a}) = 0$

Особине множења вектора и скалара:

- комутативност $\Rightarrow \alpha\vec{a} = \vec{a}\alpha$
- идентитет $\Rightarrow 1\vec{a} = \vec{a}$

- асоцијативност $\Rightarrow \alpha\left(\beta\vec{a}\right) = \left(\alpha\beta\right)\vec{a}$
- дистрибутивност $\Rightarrow \alpha\left(\vec{a}+\vec{b}\right) = \alpha\vec{a}+\alpha\vec{b}$
- дистрибутивност $\Rightarrow \vec{a}\left(\alpha+\beta\right) = \alpha\vec{a}+\beta\vec{a}$

Сви простори који садрже све наведене особине сабирања вектора и њиховог множења са скаларима су **афини простори**.

Особине скаларног производа вектора:

- комутативност $\Rightarrow \vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}$
- асоцијативност $\Rightarrow \alpha\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right) = \vec{a}\cdot\left(\alpha\vec{b}\right) = \left(\alpha\vec{a}\right)\cdot\vec{b}$
- дистрибутивност $\Rightarrow \vec{a}\cdot\left(\vec{b}+\vec{c}\right) = \vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$

Простори који садрже све претходно наведене особине (особине скаларног производа вектора и особине афиних простора) су Еуклидски простори.

Уколико у неком Еуклидском простору важи да је скаларни производ не-нула вектора са самим собом већи од нуле:

$$\vec{a}\cdot\vec{a} > 0$$

онда је такав простор „правилни" Еуклидски простор. Дакле, у правилном Еуклидском простору растојање између две тачке мора имати позитивну вредност.

$\boxed{\text{Наш опажајни простор је правилни Еуклидски простор!}}$

У теорији, као и у пракси, према потреби се дефинишу различити простори, који не морају бити ортогонални, могу бити вишедимензионални (могу имати више од 3 димензије), а њихова метрика (растојање између две тачке простора) не мора имати било какве сличности са метриком нашег опажајног простора!

Ајнштајнова конвенција С обзиром на то да, у општем случају, постоји могућност великог броја компоненти неке физичке величине у вишедимензионалном простору, такође долази до појаве великих сума, као и више узастопних сумирања. Као последица тога јављају се гротескни изрази који се, на пример, приликом извођења неког доказа морају преписивати неколико пута. Према такозваној Ајнштајновој конвенцији, овакве суме се могу свести на врло елегантне изразе уз помоћ индексне нотације и следећег правила:

$\boxed{\text{Сумирање се врши по индексу који се понавља 2 пута.}}$

Пример При скаларном множењу два вектора добија се сума:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = \sum_{i=1}^{3} a_ib_i$$

С обзиром на то да се у сваком члану суме индекс понавља два пута, скаларни производ се једноставно може написати на следећи начин:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = a_ib_i$$

Можемо закључити да се сам вектор може написати на следећи начин:

$$\vec{a} = a_1\vec{e_1} + a_2\vec{e_2} + a_3\vec{e_3} = \sum_{i=1}^{3} a_i\vec{e_i} = a_i\vec{e_i}$$

Много већа корист оваквог начина записивања тензорских величина, биће очигледна приликом коришћења тензора другог реда!

Неми и слободни индекси Немим индексима се називају они по којима се врши сумирање, а слободни индекси су они који се јављају једном, тј. они по којима се не врши сумирање. На пример, вектор може имати компоненте које се састоје из више сабирака. Једна компонента таквог вектора може се приказати на следећи начин:

$$x_i = a_iSjj, \quad i,j = 1,2,3$$

Што је еквивалентно следећем:

$$x_i = a_i\left(S_{11} + S_{22} + S_{33}\right), \quad i = 1,2,3$$

Дакле, постоје три компоненте тог вектора:

$$x_1 = a_1\left(S_{11} + S_{22} + S_{33}\right)$$

$$x_2 = a_2\left(S_{11} + S_{22} + S_{33}\right)$$

$$x_3 = a_3\left(S_{11} + S_{22} + S_{33}\right)$$

У овом примеру, индекс j је неми индекс, док је индекс i слободни индекс.

Кронекеров симбол У Декартовом координатном систему, ортогоналност базних вектора условљава два могућа резултата њиховог међусобног скаларног производа - уколико се базни вектор множи сам са собом резултат је јединица, а иначе је нула. Ова особина дефинисана је Кронекеровим „делта” симболом:

$$\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & , \quad i = j \\ 0 & , \quad i \neq j \end{cases}$$

Дакле, уколико Кронекеров симбол стоји уз неки израз, тај израз неће бити једнак нули само ако су вредности индекса једнаке. Услед тога се скаларно множење два вектора се може записати на следећи начин:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_i \vec{e}_i \cdot b_j \vec{e}_j = a_i b_j \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = a_i b_j \delta_{ij} = a_i b_i$$

С обзиром на то да производ $a_i b_j$ постоји само када је $i = j$, индекс j се може заменити са индексом i, тј. b_j постаје b_i, а Кронекеров симбол нестаје јер је његово значење искоришћено.

Тензор другог реда Ред тензора у директној је вези са бројем инекса који је потребан да се означе све његове компоненте. Тако је скалар, тензор нултог реда, величина за коју није потребан ни један индекс:

$$\alpha = const.$$

Вектор је тензор првог реда за који је потребан један индекс:

$$\vec{a} = a_i \vec{e}_i$$

Дакле, тензор другог реда је величина за коју су потребна два индекса:

$$\mathbf{T} = T_{ij} \vec{e}_i \vec{e}_j$$

Уколико је тензор дефинисан у Декартовом координатном систему, оба индекса ће узимати вредности $i, j = 1, 2, 3$. С обзиром на то да је могуће направити 9 комбинација ових индекса, тензор другог реда се може написати на следећи начин:

$$\begin{aligned} \mathbf{T} = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} T_{ij} \vec{e}_i \vec{e}_j = & \sum_{j=1}^{3} T_{1j} \vec{e}_1 \vec{e}_j + T_{2j} \vec{e}_2 \vec{e}_j + T_{3j} \vec{e}_3 \vec{e}_j = \\ = & T_{11} \vec{e}_1 \vec{e}_1 + T_{12} \vec{e}_1 \vec{e}_2 + T_{13} \vec{e}_1 \vec{e}_3 + \\ & T_{21} \vec{e}_2 \vec{e}_1 + T_{22} \vec{e}_2 \vec{e}_2 + T_{23} \vec{e}_2 \vec{e}_3 + \\ & T_{31} \vec{e}_3 \vec{e}_1 + T_{32} \vec{e}_3 \vec{e}_2 + T_{33} \vec{e}_3 \vec{e}_3 \end{aligned}$$

Или у матричном запису:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{bmatrix}$$

Јасна је супериорност записа у складу са Ајнштајновом конвенцијом, у односу на претходне гломазне изразе.
Потребно је посебно обратити пажњу на карактеристичан производ базних вектора који се јавља у изразу за тензор, тј. на чињеницу да су они једноставно прислоњени један уз други. Оваква форма базних вектора чини **дијаду**:

$$\vec{e}_i\vec{e}_j$$

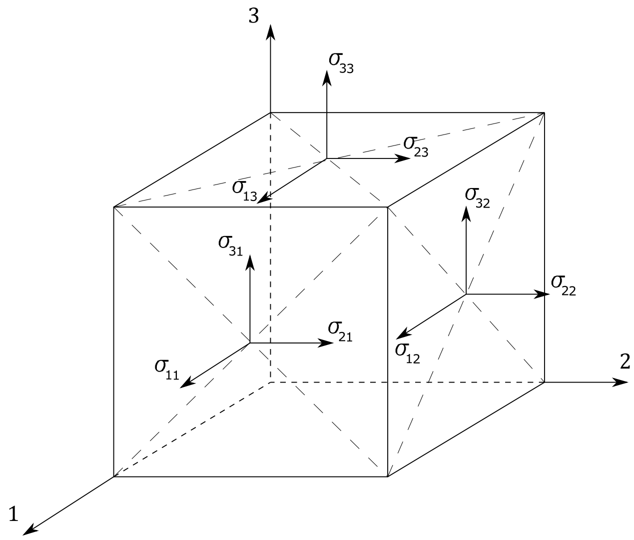
У литератури се често јавља еквивалетна ознака, која представља дијадни производ:

$$\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j$$

У даљем тексту ће дијада бити представљена са два базна вектора прислоњена један уз други, ради избегавања гломазних израза.
Сложеност објеката који су представљени скаларима, векторима и тензорима другог реда управо се огледа у карактеристикама базних вектора и дијада:

α	$\Rightarrow$Скалар има само интензитет.
$\vec{a} = a_i\vec{e}_i$	$\Rightarrow$Вектор има интентитет, као и правац и смер који су одређени базним векторима.
$\mathbf{T} = T_{ij}\vec{e}_i\vec{e}_j$	$\Rightarrow$Тензор има интензитет, а дијада одређује раван у којој лежи компонента тензора, као и њен правац и смер.

Један пример је Кошијев тензор напона, који је симетричан тензор и важи $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$, међутим када се ове компоненте представе у простору, очигледно је да су само њихови интензитет исти, а да се разликују по равнима у којима леже, као и по њиховом правцу и смеру, као што је приказано на Сл. 1:



Слика 1

У пракси се често јављају два различита производа дијада, које је потребно истаћи:

Производ дијада Под овим се подразумева следећи производ:

$$(\vec{e}_i\vec{e}_j)\cdot(\vec{e}_k\vec{e}_h) = \vec{e}_i\vec{e}_j\cdot\vec{e}_k\vec{e}_h = \vec{e}_i\delta_{jk}\vec{e}_h = \delta_{jk}\vec{e}_i\vec{e}_h$$

Дакле, као што је скалар резултат скаларног производа, тако је и дијада резултат производа дијада.

Скаларни производ дијада (двоструки скаларни производ) Овај производ обележава се са двотачком (:), а његов резултат је скалар, као што његов назив и сугерише. Овај производ подразумева скаларне производе „спољашњих” и „унутрашњих” чланова дијада:

$$(\vec{e}_i\vec{e}_j):(\vec{e}_k\vec{e}_h) = (\vec{e}_i\cdot\vec{e}_h)\,(\vec{e}_j\cdot\vec{e}_k) = \delta_{ih}\delta_{jk}$$

Сопствене вредности и сопствени вектори тензора Над векторима се често врше линеарне трансформације, чији резултат је неки нови вектор. Међутим, врло су интересантни они вектори којима се након линеарне трансформације мења само интензитет, а правац и смер остају исти. Такви вектори се називају сопствени вектори, а њихов интензитет након трансформације се добија када се првобитни интензитет помножи са сопственом вредношћу λ. Конкретан пример је множење тензора и вектора, чиме се као резултат добија вектор:

$$\mathbf{T}\vec{n} = \lambda\vec{n}$$

Што се може написати и на следећи начин:

$$\mathbf{T}\vec{n} = \lambda\mathbf{I}\vec{n}$$

Одакле следи:

$$\mathbf{T}\vec{n} - \lambda\mathbf{I}\vec{n} = 0$$

$$(\mathbf{T} - \lambda\mathbf{I})\,\vec{n} = 0$$

$$\begin{bmatrix} T_{11} - \lambda & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} - \lambda & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} - \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\alpha \\ \cos\beta \\ \cos\gamma \end{bmatrix} = 0 \tag{1}$$

Чиме је добијен матрични систем линеарних једначина. Да би овај хомогени систем имао нетривијално решење $\vec{n} \neq 0$, детерминанта матрице мора бити једнака нули:

$$\det(\mathbf{T} - \lambda\mathbf{I}) = \begin{vmatrix} T_{11} - \lambda & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} - \lambda & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

Развојем ове детерминанте долази се до карактеристичне једначине чији коренови представљају сопствене вредности λ. У овом случају то је кубна једначина:

$$\lambda^3 - a\lambda^2 + b\lambda - c = 0 \tag{2}$$

Уобичајено је да се сопствене вредности записују у опадајућем поретку:

$$\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3$$

Матрична једначина (1) може се развити у класични систем линеарних једначина:

$$(T_{11} - \lambda)\cos\alpha + T_{12}\cos\beta + T_{13}\cos\gamma = 0$$
$$T_{21}\cos\alpha + (T_{22} - \lambda)\cos\beta + T_{23}\cos\gamma = 0$$
$$T_{31}\cos\alpha + T_{32}\cos\beta + (T_{33} - \lambda)\cos\gamma = 0$$

Решавањем система за сваку од сопствених вредности, долази се до углова којима су одређени правац и смер јединичних нормалних вектора

$(\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2}, \overrightarrow{n_3})$ којима су одређене равни у којима леже сопствени вектори. Коначно, сопствени вектори су:

$$\overrightarrow{T_1} = \lambda_1 \overrightarrow{n_1}, \quad \overrightarrow{T_2} = \lambda_2 \overrightarrow{n_2}, \quad \overrightarrow{T_3} = \lambda_3 \overrightarrow{n_3}$$

На пример, ако је у питању тензор напона, можемо претпоставити да у тродимензионалном простору постоје 3 међусобно управне равни у којима постоје само нормалне компоненте напона. Дакле, пошто нема смичућих компоненти, целокупно напрезање представљено је само нормалним напонима - они у тим равнима имају екстремне вредности. Самим тим, можемо пронаћи јединичне векторе нормала на те равни $\vec{n} = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$, који множењем са тензором напона $\mathbf{T}$ као резултат дају векторе другачијег интензитета - векторе нормалних напона у тим равнима, тј. главне напоне $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$.

Транспоновани тензор Сваки тензор се може транспоновати, на следећи начин:

$$(\mathbf{T})^T = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{21} & T_{31} \\ T_{12} & T_{22} & T_{32} \\ T_{13} & T_{21} & T_{33} \end{bmatrix}$$

Транспоновани производ тензора Уколико се производ тензора транспонује, резултат је:

$$(\mathbf{T} \cdot \mathbf{S})^T = \mathbf{S}^T \cdot \mathbf{T}^T$$

Симетрични тензор Симетрични тензори су они код којих је транспоновани тензор једнак основном тензору:

$$(\mathbf{T})^T = \mathbf{T}$$

Антисиметрични тензор Антисиметрични тензор је онај код кога је транспоновани тензор једнак негативној вредности основног тензора:

$$(\mathbf{T})^T = -\mathbf{T}$$

Разлагање тнезора на симетрични и антисиметрични део Сваки тензор може се разложити на његов симетрични и антисиметрични део:

$$T_{ij} = \frac{1}{2}T_{ij} + \frac{1}{2}T_{ij} = \frac{1}{2}T_{ij} + \frac{1}{2}T_{ij} + \frac{1}{2}T_{ji} - \frac{1}{2}T_{ji} = \frac{1}{2}\left(T_{ij} + T_{ji}\right) + \frac{1}{2}\left(T_{ij} - T_{ji}\right)$$

Инверзни тензор Ако тензор $\mathbf{T}$ представља линеарно пресликавање између вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$, уколико постоји његов инверзни тензор $\mathbf{T}^{-1}$, он представља линеарно пресликавање између вектора $\vec{b}$ и $\vec{b}$:

$$\vec{a} = \mathbf{T} \cdot \vec{b} \Leftrightarrow \vec{b} = \mathbf{T}^{-1} \cdot \vec{a}$$

Уколико постоји инверзни тензор неког тензора, он се може израчунати на следећи начин:

$$\mathbf{T}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{T}} \mathrm{Adj}\ \mathbf{T}$$

где је Adj $\mathbf{T}$ адјунгована матрица матрице $\mathbf{T}$.
С обзиром на то да није могуће дељење нулом, очигледно је да инвезан тезор постоји само у случају када његова детерминанта није једнака нули.

Ортогонални тензор Ортогонални тензор је такав да је његов транспоновони тензор једнак његовом инверзном тензору:

$$\mathbf{T}^{-1} = \mathbf{T}^{T}$$

Тако да за ортогонални тензор важи и:

$$\mathbf{T}^{T}\mathbf{T} = \mathbf{I}$$

Инваријанте тензора Инваријанте величине су оне које не зависе од одабира координатног система. Инваријанте тензора су:

- $I_1 = \mathrm{tr}\ \mathbf{T} \Rightarrow$ траг тензора, тј. збир чланова на дијагонали његове матрице,
- $I_2 = \frac{1}{2}\left[(\mathrm{tr}\,\mathbf{T})^2 - \mathrm{tr}\left(\mathbf{T}^2\right)\right] \Rightarrow$ половина разлике квадрата трага тензора и трага квадрата тензора,
- $I_3 = \det \mathbf{T} \Rightarrow$ детерминанта тензора

Пример 1 Показати да је тензор ротације око y осе ортогоналан.

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & 0 & -\sin\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

<u>Први начин:</u>

$$\mathbf{T}^{T}\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & 0 & \sin\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\alpha & 0 & -\sin\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{I}$$

Други начин: Потребно је наћи инверзни тензор, те ћемо прво показати да детерминанта матрице није једнака нули:

$$\det[\mathbf{T}] = 1 \neq 0$$

Затим је потребно одредити матрицу главних минора:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} +\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & \cos\alpha\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}0 & 0\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}0 & 1\\ \sin\alpha & 0\end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix}0 & -\sin\alpha\\ 0 & \cos\alpha\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}\cos\alpha & 0\\ \sin\alpha & 0\end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix}0 & -\sin\alpha\\ 1 & 0\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}3 & -\sin\alpha\\ 0 & 0\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}\cos\alpha & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix}\cos\alpha & 0 & -\sin\alpha\\ 0 & 1 & 0\\ \sin\alpha & 0 & \cos\alpha\end{bmatrix}$$

А затим је транспоновати да би се добила адјунгована матрица:

$$\text{Adj } \mathbf{T} = \mathbf{M}^T = \begin{bmatrix}\cos\alpha & 0 & \sin\alpha\\ 0 & 1 & 0\\ -\sin\alpha & 0 & \cos\alpha\end{bmatrix}$$

Дакле:

$$\mathbf{T}^{-1} = \frac{1}{\det[\mathbf{T}]}\text{Adj } \mathbf{T} = \frac{1}{1}\begin{bmatrix}\cos\alpha & 0 & \sin\alpha\\ 0 & 1 & 0\\ -\sin\alpha & 0 & \cos\alpha\end{bmatrix} = \mathbf{T}^T$$

Пример 2 Дати тензор разложити на његов симетрични и антисиметрични део:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix}6 & 0 & 4\\ 8 & 1 & 7\\ 2 & -5 & 3\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{T} = \frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix}6 & 0 & 4\\ 8 & 1 & 7\\ 2 & -5 & 3\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}6 & 8 & 2\\ 0 & 1 & -5\\ 4 & 7 & 3\end{bmatrix}\right) + \frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix}6 & 0 & 4\\ 8 & 1 & 7\\ 2 & -5 & 3\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}6 & 8 & 2\\ 0 & 1 & -5\\ 4 & 7 & 3\end{bmatrix}\right)$$

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}_1 + \mathbf{T}_2 = \begin{bmatrix}6 & 4 & 3\\ 4 & 1 & 1\\ 3 & 1 & 3\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0 & -4 & 1\\ 4 & 0 & 6\\ -1 & -6 & 0\end{bmatrix}$$

Очигледно је да је $\mathbf{T}_1^T = \mathbf{T}_1$, као и да важи $\mathbf{T}_2^T = -\mathbf{T}_2$.

Пример 3 Уколико су задате следеће величине:

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \mathbf{S} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 5 \\ 3 & 7 & 4 \\ 9 & 8 & 6 \end{bmatrix} \quad \mathbf{T} = \begin{bmatrix} 8 & -1 & 6 \\ 5 & 4 & 9 \\ -7 & 8 & -2 \end{bmatrix}$$

Израчунати:

1. $\operatorname{tr}(\mathbf{S}) = -1 + 7 + 6 = \boxed{12}$

2. $\mathbf{S} : \mathbf{S} = S_{ij}\vec{e}_i\vec{e}_j : S_{kh}\vec{e}_k\vec{e}_h = S_{ij}S_{kh}\left(\vec{e}_i \cdot \vec{e}_h\right)\left(\vec{e}_j \cdot \vec{e}_k\right) = S_{ij}S_{kh}\delta_{ih}\delta_{jk} = S_{hk}S_{kh}$

$$\begin{aligned} S_{hk}S_{kh} =& S_{1k}S_{k1} + S_{2k}S_{k2} + S_{3k}S_{k3} \\ =& S_{11}S_{11} + S_{12}S_{21} + S_{13}S_{31} + \\ & S_{21}S_{12} + S_{22}S_{22} + S_{23}S_{32} + \\ & S_{31}S_{13} + S_{32}S_{23} + S_{33}S_{33} \\ =& \boxed{240} \end{aligned}$$

3. $\vec{A} \cdot \mathbf{S} = a_i\vec{e}_i \cdot S_{jk}\vec{e}_j\vec{e}_k = a_iS_{jk}\delta_{ij}\vec{e}_k = a_jS_{jk}\vec{e}_k$

$$\begin{aligned} a_jS_{jk}\vec{e}_k =& a_jS_{j1}\vec{e}_1 + a_jS_{j2}\vec{e}_2 + a_jS_{j3}\vec{e}_3 \\ =& \left(a_1S_{11} + a_2S_{21} + a_3S_{31}\right)\vec{e}_1 + \\ & \left(a_1S_{12} + a_2S_{22} + a_3S_{32}\right)\vec{e}_2 + \\ & \left(a_1S_{13} + a_2S_{23} + a_jS_{33}\right)\vec{e}_3 \\ =& \boxed{31\vec{e}_1 + 25\vec{e}_2 + 30\vec{e}_3} \end{aligned}$$

4. $\mathbf{S} \cdot \vec{A} = S_{ij}\vec{e}_i\vec{e}_j \cdot a_k\vec{e}_k = S_{ij}a_k\vec{e}_i\delta_{jk} = S_{ij}a_j\vec{e}_i$

$$\begin{aligned} S_{ij}a_j\vec{e}_i =& S_{1j}a_j\vec{e}_1 + S_{2j}a_j\vec{e}_2 + S_{3j}a_j\vec{e}_3 \\ =& \left(S_{11}a_1 + S_{12}a_2 + S_{13}a_3\right)\vec{e}_1 + \\ & \left(S_{21}a_1 + S_{22}a_2 + S_{23}a_3\right)\vec{e}_2 + \\ & \left(S_{31}a_1 + S_{32}a_2 + S_{33}a_3\right)\vec{e}_3 \\ =& \boxed{18\vec{e}_1 + 15\vec{e}_2 + 34\vec{e}_3} \end{aligned}$$

5. $\mathbf{S}\cdot\mathbf{T}\cdot\vec{A} = S_{ij}\vec{e}_i\vec{e}_j\cdot T_{kh}\vec{e}_k\vec{e}_h\cdot a_p\vec{e}_p = S_{ij}T_{kh}a_p\vec{e}_i\delta_{jk}\delta_{hp} = S_{ij}T_{jh}a_h\vec{e}_i$

$$\begin{aligned}
S_{ij}T_{jh}a_h\vec{e}_i =& S_{1j}T_{jh}a_h\vec{e}_1 + S_{2j}T_{jh}a_h\vec{e}_2 + S_{3j}T_{jh}a_h\vec{e}_3\\
=& \left(S_{11}T_{1h}a_h + S_{12}T_{2h}a_h + S_{13}T_{3h}a_h\right)\vec{e}_1+\\
& \left(S_{21}T_{1h}a_h + S_{22}T_{2h}a_h + S_{23}T_{3h}a_h\right)\vec{e}_2+\\
& \left(S_{31}T_{1h}a_h + S_{32}T_{2h}a_h + S_{33}T_{3h}a_h\right)\vec{e}_3\\
=& (S_{11}T_{11}a_1 + S_{11}T_{12}a_2 + S_{11}T_{13}a_3\\
& + S_{12}T_{21}a_1 + S_{12}T_{22}a_2 + S_{12}T_{23}a_3\\
& + S_{13}T_{31}a_1 + S_{13}T_{32}a_2 + S_{13}T_{33}a_3)\vec{e}_1\\
& + (\cdots)\,\vec{e}_2 + (\cdots)\,\vec{e}_3\\
=& \boxed{-191\vec{e}_1 + (\cdots)\vec{e}_2 + (\cdots)\vec{e}_3}
\end{aligned}$$

Пример 4 Показати да важе следеће једнакости сачињене од произвољних вектора и тензора другог реда:

1. $\left(\vec{A}\cdot\mathbf{S}\right)\cdot\vec{B} = \vec{A}\cdot\left(\mathbf{S}\cdot\vec{B}\right)$

$$\begin{aligned}
\left(\vec{A}\cdot\mathbf{S}\right)\cdot\vec{B} &= (a_i\vec{e}_i\cdot S_{jk}\vec{e}_j\vec{e}_k)\cdot b_h\vec{e}_h = (a_iS_{jk}\vec{e}_i\cdot\vec{e}_j\vec{e}_k)\cdot b_h\vec{e}_h = a_iS_{jk}\delta_{ij}\vec{e}_k\cdot b_h\vec{e}_h =\\
&= a_iS_{jk}b_h\delta_{ij}\vec{e}_k\cdot\vec{e}_h = a_iS_{jk}b_h\delta_{ij}\delta_{kh} = \boxed{a_iS_{ik}b_k}
\end{aligned}$$

$$\vec{A}\cdot\left(\mathbf{S}\cdot\vec{B}\right) = a_i\vec{e}_i\cdot(S_{jk}\vec{e}_j\vec{e}_k\cdot b_h\vec{e}_h) = a_i\vec{e}_i\cdot S_{jk}b_h\vec{e}_j\delta_{kh} = a_iS_{jk}b_h\delta_{ij}\delta_{kh} = \boxed{a_iS_{ik}b_k}$$

С обзиром на једнакост десних страна, идентитет је доказан.

2. $(\mathbf{S}\cdot\mathbf{T})\cdot\vec{A} = \mathbf{S}\cdot\left(\mathbf{T}\cdot\vec{A}\right)$

$$(\mathbf{S}\cdot\mathbf{T})\cdot\vec{A} = (S_{ij}\vec{e}_i\vec{e}_j\cdot T_{kh}\vec{e}_k\vec{e}_h)\cdot a_p\vec{e}_p = S_{ij}T_{kh}a_p\delta_{jk}\delta_{hp}\vec{e}_i = \boxed{S_{ij}T_{jh}a_h\vec{e}_i}$$

$$\mathbf{S}\cdot\left(\mathbf{T}\cdot\vec{A}\right) = S_{ij}\vec{e}_i\vec{e}_j\cdot(T_{kh}\vec{e}_k\vec{e}_h\cdot a_p\vec{e}_p) = S_{ij}T_{kh}a_p\delta_{jk}\delta_{hp}\vec{e}_i = \boxed{S_{ij}T_{jh}a_h\vec{e}_i}$$

3. $\vec{A}\cdot(\mathbf{S}\cdot\mathbf{T}) = \left(\vec{A}\cdot\mathbf{S}\right)\cdot\mathbf{T}$

$$\vec{A}\cdot(\mathbf{S}\cdot\mathbf{T}) = a_i\vec{e}_i\cdot(S_{jk}\vec{e}_j\vec{e}_k\cdot T_{hp}\vec{e}_h\vec{e}_p) = a_iS_{jk}T_{hp}\delta_{ij}\delta_{kh}\vec{e}_p = \boxed{a_iS_{ik}T_{kp}\vec{e}_p}$$

$$\left(\vec{A}\cdot\mathbf{S}\right)\cdot\mathbf{T} = (a_i\vec{e}_i\cdot S_{jk}\vec{e}_j\vec{e}_k)\cdot T_{hp}\vec{e}_h\vec{e}_p = a_iS_{jk}T_{hp}\delta_{ij}\delta_{kh}\vec{e}_p = \boxed{a_iS_{ik}T_{kp}\vec{e}_p}$$

У оба случаја је добијен исти вектор. С обзиром на то да је уобичајено да се јединични вектор обележава са $\vec{e}_i$, као и на то да сви индекси узимају исте вредности $i,k,p = 1,2,3$, индекси се могу заменити тако да се добије следеће решење:

$$\vec{A}\cdot(\mathbf{S}\cdot\mathbf{T}) = \left(\vec{A}\cdot\mathbf{S}\right)\cdot\mathbf{T} = a_iS_{ik}T_{kp}\vec{e}_p = a_jS_{jk}T_{ki}\vec{e}_i,\quad i,j,k = 1,2,3$$

4. $\operatorname{tr}\left(\mathbf{R}^T \cdot \mathbf{S}\right) = \mathbf{R} : \mathbf{S}$

$$\mathbf{R}^T \cdot \mathbf{S} = R_{ij}\vec{e}_i\vec{e}_j \cdot S_{kh}\vec{e}_k\vec{e}_h = R_{ij}S_{kh}\delta_{jk}\vec{e}_i\vec{e}_h = R_{ij}S_{jh}\vec{e}_i\vec{e}_h$$

Пошто је траг тензора збир елемената на његовој дијагонали, у индексном запису он ће бити представљен када се узме да је $i = h$ (што важи за позиције елемената на дијагонали). Дакле:

$$\operatorname{tr}\left(\mathbf{R}^T \cdot \mathbf{S}\right) = \boxed{R_{ij}S_{ji}}$$

Када је у питању друга страна задате једнакости:

$$\mathbf{R} : \mathbf{S} = R_{ij}\vec{e}_i\vec{e}_j : S_{kh}\vec{e}_k\vec{e}_h = R_{ij}S_{kh}\left(\vec{e}_i \cdot \vec{e}_h\right)\left(\vec{e}_j \cdot \vec{e}_k\right) = R_{ij}S_{kh}\delta_{ih}\delta_{jk} = \boxed{R_{ij}S_{ji}}$$