Машински факултет
УНИВЕРЗИТЕТА У БЕОГРАДУ

УВОД У ТЕНЗОРСКИ РАЧУН

Др Михаило Лазаревић , ред. проф.
Машински факултет, Београд, Универзитет у Београду,Србија

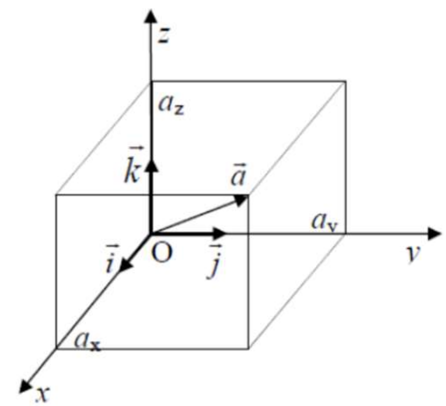
Основни појмови

Тензорски рачун, тензорска анализа, или Ричијев рачун је математичко проширење векторског рачуна на тензорска поља. Открио га је Грегорио Ричи-Курбастро, а развио његов ученик Тулио Леви-Цивита и други. Употребио га је Алберт Ајнштајн у успостављању своје опште теорије релативности.

Осим скаларних и векторских функција, неке појаве се описују и сложенијим геометријским објектима, тзв. **тензорима.**

Скаларне величине или тензори нултог реда (ранга). дефинисане су *једним бројем (скаларом)*, а такве величине су на пример: маса m , запремина V , густина ρ, специфична унутрашња енергија u , итд. Аналогно се проучавају физичка и геометријска својства вектора кроз законе трансформација координата, *као тензора првог ранга.*

Векторске величине су одређене правцем,смером, и интезитетом, односно помоћу *три компоненте* (нпр. три пројекције на оси координатног система), а такве величине су брзина $\vec{v}$, убрзање $\vec{a}$, сила $\vec{F}$. Векторске величине се још у литератури означавају и болдираним словима (***в***, ***а***, ***Ф***, ***q***). Векторске функције у нашем опажајном простору можемо учинити очигледним.



Други начин приказивања вектора је аналитички путем пројекција.

О физичкој или геометријској природи вектора суди се на основу облика израза којим се преводе координате вектора из једног у други координатни систем.

За описивање сложенијих физичких појава геоматријским путем проширен је појам простора. Многе физичке величине описују се са више параметара, па је за њихово геометријско посматрање и описивање било неопходно увођење тзв. *М-мерних простора*. Геометријске представе о таквом простору немамо, нити је могуће очигледно приказивање одговарајућих величина.

Исто тако постоје величине, одређене у нашем опажајном простору у односу на познате координатне системе, које не могу учинити очигледним.

Као основа за разликовање природе појединих величина, описаних са више параметара (координата) или функција, узимамо њихово понашање при смени променљивих (трансформацији координата).

Зато тензорски рачун представља математичку дисциплину, односно апарат аналитичке и диференцијалне геометрије за проучавање физичких и геоматријских величина на основу закона трансформације координта којима се приказују.

Тензорски рачун је увео Ричи почетком двадесетог века и нашао је примену у теорији релативности, и у свим областима механике(механике континуума, механици флуида, аналитичкој механици, теорији стабилности) и посебно у свим гранама математичке физике.

Основни принцип на коме почива тензорски рачун –Принцип инваријантности- најбоље је исказао руски физичар Е. Вигнер:
«Принцип инваријантности служи као пробни камен у провери истинитости закона природе и откривању нових закона природе».

Уобичајено је да се тензорима називају величине које су *другог,трећег или вишег реда, а ако се ништа посебно не нагласи онда се тензори другог реда називају у литератури скраћено само тензори.*

Тензори другог реда дефинисани су са 9 компоненти, тензори трећег реда са 27 компоненти, односно уопштено, број тензора *n* -тог реда је 3*н*. Тако се и скалари могу сматрати тензорима нултог реда, а вектори су тензори првог реда. Типични тензори другог реда у механици флуида су: тензор инерције *J* ,тензор напрезања **T**,итд.

Ред Тензора	Назив	Потребан Број података		Примери Примене
		У равни	У простору	
Нулти	Скалар	$2^0 = 1$	$3^0 = 1$	Маса,дужина,време,температура
Први	Вектор	$2^1 = 2$	$3^1 = 3$	Сила,брзина,убрзање
Други	Тензор	$2^2 = 4$	$3^2 = 9$	Напрезање,деформација
Трећи	Тензор 3 реда	$2^3 = 8$	$3^3 = 27$	Сложена напрезања,деформације
Четврти	Тензор 4 реда	$2^4 = 16$	$3^4 = 81$	Тензор еластичности, тензор крутости

Уводна разматрања тензорског рачуна,сумирање

Разматра се сума $S = a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + \ldots + a_n x_n$,

или $S = \sum^{n} a_i x_i$,

$$S = \sum_{j=1}^{n} a_j x_j = \sum_{k=1}^{n} a_k x_k$$

Индекси *i* , *j* и *к* у претходним изразима се називају *неми индекси*.
Ако се индекс понавља унутар једног члана, онда представља *неми индекс* који указује на суму. По конвенцији, сваки овакав индекс има вредност 1, 2, 3 .

$$S = \sum_{i=1}^{3} a_i x_i \quad \text{(сума 3 параметра)}$$

$$S = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} a_{ij} x_i x_j \quad \text{(сума } 3^2 \text{ параметара).}$$

Ради лакшег сабирања користи се тзв. ***Ајнштајнова конвенција о сабирању***

$$S = \sum_{i=1}^{3} a_i x_i \Rightarrow S = a_i x_i$$

$$S = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} a_{ij} x_i x_j \Rightarrow S = a_{ij} x_i x_j \ .$$

Слободни индекси – Вишеструке једначине

Разматра се

$$y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3$$
$$y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3$$
$$y_3 = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \, .$$

Користећи неме индексе, претходне једначине могу бити редуковане на

$$y_1 = a_{1n}x_n$$
$$y_2 = a_{2n}x_n$$
$$y_3 = a_{3n}x_n \, .$$

Ове једначине су истог облика, а разликују се само у индексима 1, 2, 3. Према томе, уводећи ***концепт слободног индекса***, једначине се могу написати као

$$y_i = a_{in}x_n \, ,$$

где је *i* слободан индекс, а *n* је неми индекс. Слободни индекси се појављују само једном у сваком члану једначине, указујући на вишеструке једначине. Обично су им вредности 1, 2, 3.

Слободан индекс који се појављује у сваком члану мора бити исти. Ако у једначини има два слободна индекса, онда тај израз представља девет једначина. На пример,

$$T_{ij} = A_{im} A_{jm}$$

представља 9 једначина, свака са три члана на десној страни. Узимајући да су слободни индекси $i = 1$ и $j = 2$, добија се

$$T_{12} = A_{11} A_{21} + A_{12} A_{22} + A_{13} A_{23} .$$

Осталих 8 једначина добијају се комбинујући i и j.

Кронекеров симбол

Кронекеров симбол је дефинисан као
$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} .$$

Матрица
$$\begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23} \\ \delta_{31} & \delta_{32} & \delta_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
$$\delta_{im} a_m = a_i$$
је јединична матрица

Скаларни производ вектора. Дата су два вектора $\vec{a} = a_i \vec{e}_i$ $\vec{b} = b_i \vec{e}_i$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (a_i \vec{e}_i) \cdot (b_j \vec{e}_j) = a_i b_j (\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j) .$$

$$\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij}$$

$$\boxed{\vec{a} \cdot \vec{b} = a_i b_j \delta_{ij} = a_i b_i .}$$

ТЕНЗОРИ 2 реда

Тензор представља линеарну трансформацију, означену са **T**. Трансформише било који вектор у други вектор. Тензор другог реда представља 9 скаларних величина тако да

$$\mathbf{T}\vec{a} = \vec{b}\,,$$

Да би функција T била хомогена мора да поседује особину:

$$T\left(\alpha\vec{a}\right) = \alpha T\vec{a} = \alpha\vec{b}$$

Функција T је линеарна ако испуњава следећи услов:

$$\mathbf{T}(\vec{a}+\vec{b}) = \mathbf{T}\vec{a} + \mathbf{T}\vec{b}\,,$$

Компоненте тензора

у матричном формату је $\vec{b} = \mathbf{T}\vec{a}$

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \Rightarrow \boxed{b_i = T_{ij} a_j\,.}$$

i,j=1,2,3

Суме и производи тензора

Нека су **T** и ***S*** два тензора. Онда је

$$(\mathbf{T}+\mathbf{S})\vec{a} = \mathbf{T}\vec{a} + \mathbf{S}\vec{a}\,.$$

Испитујући компоненте збира види се

$$(\mathbf{T}+\mathbf{S})_{ij} = \mathbf{T}_{ij} + \mathbf{S}_{ij}\,.$$

Или, означавајући матрично

$$[\mathbf{T}+\mathbf{S}] = [\mathbf{T}] + [\mathbf{S}],$$

Производ два тензора

$$(\mathbf{TS})\vec{a} = \mathbf{T}(\mathbf{S}\vec{a})$$

$$(\mathbf{TS})_{ij} = \mathbf{T}_{im}\mathbf{S}_{mj}\,,$$

$$[\mathbf{TS}] = [\mathbf{T}][\mathbf{S}]\,.$$

Напомена: Уопштено, $\mathbf{TS} \neq \mathbf{ST}$.

Јединични тензор

Тензор идентичности (јеиднични) *I* представља линеарну трансформацију која трансформише било који вектор у њега самог. Према томе је,

$$\mathbf{I}\vec{a} = \vec{a}$$

одакле се види да се *I* може представити као

$$\mathbf{I} = \delta_{ij}\,.$$

Транспоновни тензор

Транспоновани тензор **T** је дефинисан као тензор T$^{\mathbf{T}}$ који задовољава

$$\vec{a}\cdot(\mathbf{T}\vec{b})=\vec{b}\cdot(\mathbf{T}^{T}\vec{a}) . \quad \longrightarrow \quad T_{ij}=(T^{T})_{ij} .$$

Напомена: Транспоновани производ два тензора је производ два транспонована тензора у обрнутом редоследу.

$$(\mathbf{TS})^{T}=\mathbf{S}^{T}\mathbf{T}^{T}$$

Ортогонални тензори

Ортогонални тензор **Q** представља *линеарну трансформацију код које трансформисани вектори чувају своје дужине и углове.*

$$\left|\mathbf{Q}\vec{a}\right|=\left|\vec{a}\right| \qquad \mathbf{Q}\mathbf{Q}^{T}=\mathbf{Q}^{T}\mathbf{Q}=\mathbf{I} .$$

Напомена: Детерминанта ортогоналног тензора је ± 1 где је

$$\det(\mathbf{Q})=\begin{cases} +1 & \text{govori o rotaciji} \\ -1 & \text{govori o refleksiji} \end{cases}$$

Симетрични вс. асиметрични тензори

Тензор $\mathbf{T}^{symm}$ је дефинисан као симетричан ако и само ако је $\mathbf{T}^{symm} = (\mathbf{T}^{symm})^T$. Ово је другачије од ортогоналних тензора. Симетрична тензор не очувава обавезно дужине и углове. Компоненте симетричног тензора задовољавају

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}^{symm} + \mathbf{T}^{asymm}$$

$$\mathbf{T}^{asymm} = \frac{\mathbf{T} - \mathbf{T}^T}{2} \qquad T_{ij} = T_{ji}.$$

Такође, дијагонални елементи тезора $\mathbf{T}symm$ и ($\mathbf{T}symm$)T морају бити једнаки.

Тензор $\mathbf{T}asymm$ је антисиметричан ако и само ако је $\mathbf{T}^{asymm} = -(\mathbf{T}^{asymm})^T$

Компоненте антисиметричног тензора задовољавају $T_{ij} = -T_{ji}$

Антисиметрични тензори су такође познати као асиметрични тензори. Било који тензор **T** увек може бити растављен на збир симетричних и антисиметричних тензора.

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}^{symm} + \mathbf{T}^{asymm},$$

где је

$$\mathbf{T}^{symm} = \frac{\mathbf{T} + \mathbf{T}^T}{2},$$

$$\mathbf{T}^{asymm} = \frac{\mathbf{T} - \mathbf{T}^T}{2}.$$

Тензорски производ два вектора-дијада

Тензорски производ два вектора је тензор другог реда. Ако међу векторима нема ознаке ни за скаларни ни за векторски производ, подразумева се да је у питању тензорски производ. Ако је тензор **T** резултат множења вектора ***a*** и ***c*** , може се писати:

$$\mathbf{T} = \vec{a}\vec{c} = \left(a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}\right)\left(c_x\vec{i} + c_y\vec{j} + c_z\vec{k}\right)$$

Тензори се као и вектори приказују помоћу компоненти.

Приказом вектора у горњем изразу уз помоћ компоненти следи:

$$T_{ij} = a_i c_j = \begin{pmatrix} a_x c_x & a_x c_y & a_x c_z \\ a_y c_x & a_y c_y & a_y c_z \\ a_z c_x & a_z c_y & a_z c_z \end{pmatrix}.$$

База тензорског простора

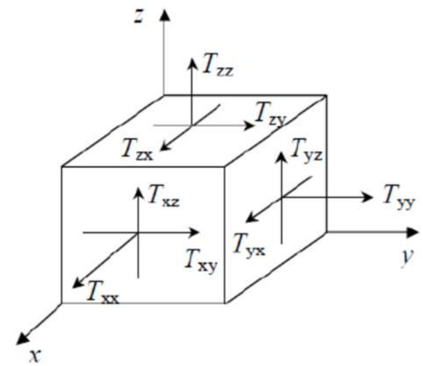
$$\begin{bmatrix} \vec{i}\vec{i} & \vec{i}\vec{j} & \vec{i}\vec{k} \\ \vec{j}\vec{i} & \vec{j}\vec{j} & \vec{j}\vec{k} \\ \vec{k}\vec{i} & \vec{k}\vec{j} & \vec{k}\vec{k} \end{bmatrix}$$

Потребно је посебно обратити пажњу на карактеристичан производ базних вектора који се јавља у изразу за тензор, тј. на чињеницу да су они једноставно прислоњени један уз други. Оваква форма базних вектора чини **дијаду**:

$$\vec{e}_i\vec{e}_j$$

У литератури се често јавља еквивалетна ознака, која представља дијадни производ:

$$\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j$$



Означавање тензора $\mathbf{T}_{..}$ површина смер

$$\mathbf{T} = T_{xx}\vec{i}\vec{i} + T_{xy}\vec{i}\vec{j} + T_{xz}\vec{i}\vec{k} + T_{yx}\vec{j}\vec{i} + T_{yy}\vec{j}\vec{j} + T_{yz}\vec{j}\vec{k} + T_{zx}\vec{k}\vec{i} + T_{zy}\vec{k}\vec{j} + T_{zz}\vec{k}\vec{k}$$

или

$$\mathbf{T} = \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} T_{xx} & T_{xy} & T_{xz} \\ T_{yx} & T_{yy} & T_{yz} \\ T_{zx} & T_{zy} & T_{zz} \end{bmatrix} & \begin{array}{c} \vec{t}_x \\ \vec{t}_y \\ \vec{t}_z \end{array} \end{array}$$

Унутрашњи производ вектора и тензора

При унутрашњем производу ред тензора производа се смањује, а при тензорском производу се повећава. Тако је унутрашњи производ вектора и тензора другог реда вектор, може симболички да се запише у облику

$$\vec{a} = \vec{b} \otimes \mathbf{T}. \quad \Rightarrow \quad \vec{a} = \vec{n} \otimes \mathbf{T}$$

$$= (n_x T_{xx} + n_y T_{yx} + n_z T_{zx})\vec{i} + (n_x T_{xy} + n_y T_{yy} + n_z T_{zy})\vec{j} + (n_x T_{xz} + n_y T_{yz} + n_z T_{zz})\vec{k}$$

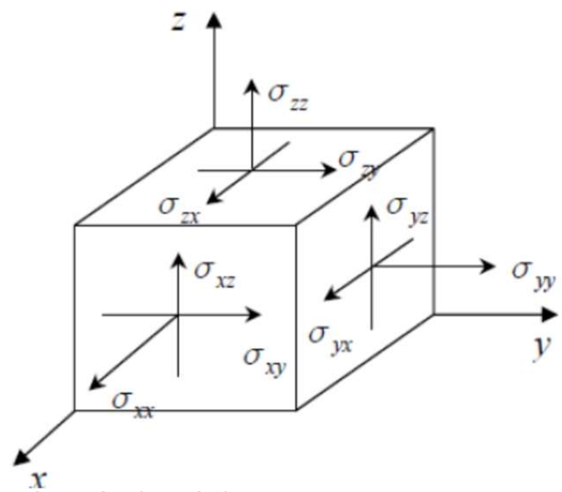
$$= \left(n_x, n_y, n_z\right) \begin{bmatrix} T_{xx} & T_{xy} & T_{xz} \\ T_{yx} & T_{yy} & T_{yz} \\ T_{zx} & T_{zy} & T_{zz} \end{bmatrix}$$

Тензор напона

Типични тензор другог реда који се појављује у механици континуума је тензор напона. Код тензора напона компоненте на главној дијагонали означавају нормалне напоне, а компоненте изван главне дијагонале тангенцијалне напоне. Слика 3.5 илуструје садршај компоненти тензора напона на примеру елементарног паралелопипеда димензија *дх*, *ду* и *д z* . На том паралелопипеду су присутне три карактеристичне површине, чији вектори спољашње нормале (вектори нормални на површину и гледају од паралелопипеда) су у позитивним смеровима оса. На свакој тој површини делује вектор напона који се може разложити на три компоненте, једну нормалну на површину и две тангенцијалне. Стање напона у тачки простора дефинисано је *тензором напона.* Компоненте тензора напона дефинисане су компонентама три вектора напона који делују на површинама орјентисаним нормалама у смеру оса коорд-инатног система, као на слици. Сваки вектор напона има једну нормалну компоненту (нормалну на површину) и две тангенцијалне компоненте.

Таблични запис компоненти тензора напона

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix}.$$



Веза између вектора и тензора напона

(вектор напона је пројекција тензора напона на смер нормале)

$$\vec{\sigma}(\vec{n}) = \vec{n} \otimes \mathbf{T} = (n_x\sigma_{xx} + n_y\sigma_{yx} + n_z\sigma_{zx})\vec{i} +$$

$$(n_x\sigma_{xy} + n_y\sigma_{yy} + n_z\sigma_{zy})\vec{j} + (n_x\sigma_{xz} + n_y\sigma_{yz} + n_z\sigma_{zz})\vec{k}$$