MATEMATIKA 2

Lekcija 9- Jednačine totalnog diferencijala

Jednačina

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0 \tag{1}$$

naziva se jednačina totalnog diferencijala ako je leva strana totalni diferencijal neke funkcije $u(x,y)$ dveju nezavisno promenljivih x i y, tj.

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy.$$

тада (1) $\int du = \int 0$

$\boxed{u = C}$

о.р.

Ako je tako, onda je $u(x,y) = C$ opšte rešenje jednačine (1).

Teorema. Pretpostavimo da funkcije $M(x,y)$ i $N(x,y)$ imaju neprekidne parcijalne izvode po y i x, respektivno, u nekoj prostopovezanoj oblasti D xy-ravni. Potreban i dovoljan uslov da leva strana jednačine (1) bude totalni diferencijal neke funkcije $u(x,y)$ dveju nezavisno promenljivih x i y, jeste da važi jednakost

$$\boxed{\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}} \tag{2}$$

u svakoj tački oblasti D.

Napomena. Ako je za funkcije $M(x,y)$ i $N(x,y)$ ispunjeno (2), onda je

$$u(x,y) = C$$

opšte rešenje jednačine (1), gde je C proizvoljna konstanta, a funkcija $u(x,y)$ se nalazi po formuli

$$u(x,y) = \int M(x,y)\,dx + \int \left[N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)\,dx\right]dy. \tag{3}$$

– боље је избећи памћење формуле. Видети како се решавају примери које сам додао (написао руком).

Primer 1. Proverimo da li je jednačina

$$e^{-y}dx - \left(2y + xe^{-y}\right)dy = 0 \tag{4}$$

jednačina totalnog diferencijala, i nađimo njeno opšte rešenje.

Rešenje. Ovde je $M(x,y) = e^{-y}$ i $N(x,y) = -\left(2y + xe^{-y}\right)$, pa je

$$\frac{\partial M}{\partial y} = -e^{-y}, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = -e^{-y}, \quad \text{dakle} \quad \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x},$$

1А | Пр.1 | Наћи општа решења једначина

а) $(x^3+3xy^2)dx + (y^3+3x^2y)dy = 0$

б) $y x^{y-1} dx + x^y \ln x \, dy = 0.$

Решење:

а) $M = x^3+3xy^2$

$N = y^3+3x^2y$

$\frac{\partial M}{\partial y} = 6xy = \frac{\partial N}{\partial x}$ па једн. под (а) јесте једн. тоталног диференцијала, тј.

$$M\,dx + N\,dy = du(x,y) = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy$$

Изједначавамо изразе који стоје уз dx, тј. dy

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} &= M(x,y)\\ \frac{\partial u}{\partial y} &= N(x,y)\end{aligned}\right\}$$

Решавамо овај систем парцијалних диференцијалних једначина првог реда (линеарних)

$$\frac{\partial u}{\partial x} = x^3+3xy^2$$

$$\partial u = (x^3+3xy^2)\partial x$$

$$\int du = \int (x^3+3xy^2)\,dx$$

$$u = \int x^3 dx + 3y^2\int x\,dx + \varphi(y)$$

константа у облику функције која зависи само од y

$$u(x,y) = \frac{x^4}{4} + \frac{3}{2}x^2y^2 + \varphi(y)$$

убацимо

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x^4}{4}+\frac{3}{2}x^2y^2+\varphi(y)\right) = y^3+3x^2y$$

$$\cancel{3x^2y} + \varphi'(y) = y^3 + \cancel{3x^2y}$$

$$\frac{d\varphi}{dy} = y^3$$

$$\int d\varphi = \int y^3\,dy$$

убацимо

$$\varphi(y) = \frac{y^4}{4} + C_1$$

О.Р.

$$\frac{x^4}{4} + \frac{3}{2}x^2y^2 + \frac{y^4}{4} + C_1 = C_2$$

$$\frac{x^4}{4} + \frac{3}{2}x^2y^2 + \frac{y^4}{4} = C$$

(где $C = C_2 - C_1$)

б) Решење $x^y = C$ (сами)

$\boxed{\text{Пр. 2.}}$ Од свих интегралних кривих задатих диференцијалном једначином

$$(1+x\sqrt{x^2+y^2})dx + (-1+\sqrt{x^2+y^2})y\,dy = 0$$

издвојити ону која пролази кроз тачку (0,1).

Решење:

Тражимо прво О.Р. (фамилију кривих која зависи од произвољне константе С.)

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = 1 + x\sqrt{x^2+y^2} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = (-1+\sqrt{x^2+y^2})y \end{cases}$$

$$\int du = \int (1+x\sqrt{x^2+y^2})dx$$

$$u = x + \int x\sqrt{x^2+y^2}\,dx + \varphi(y)$$

$$x^2+y^2 = t$$

$$\cancel{2}x\,dx = dt$$

$$x\,dx = \frac{dt}{2} \quad (y - const)$$

$$u = x + \frac{1}{2}\int t^{1/2}dt + \varphi(y)$$

$$u = x + \frac{1}{\cancel{2}}\,\frac{t^{3/2}}{\frac{3}{\cancel{2}}} + \varphi(y)$$

убацимо

$$u = x + \frac{1}{3}(x^2+y^2)^{3/2} + \varphi(y)$$

$$\cancel{\frac{1}{\cancel{2}}(x^2+y^2)^{1/2}\cdot \cancel{2}y} + \varphi'(y) = -y + \cancel{y\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\varphi'(y) = -y$$

$$\frac{d\varphi}{dy} = -y$$

$$\int d\varphi = -\int y\,dy$$

$$\varphi(y) = -\frac{y^2}{2} + C_1$$

кад се врати

О.Р.

$$x + \frac{1}{3}\sqrt{(x^2+y^2)^3} - \frac{y^2}{2} = C$$

$$(C = C_2 - C_1)$$

Од ових кривих издвајамо ону која пролази кроз тачку (0,1), тј. ставимо у О.Р. $x=0$, $y=1$ и одредимо С. Имамо

$$0 + \frac{1}{3}\sqrt{(0^2+1^2)^3} - \frac{1^2}{2} = C$$

$$C = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{6}$$

Добили смо ПАРТИКУЛАРНО решење

$$x + \frac{1}{3}\sqrt{(x^2+y^2)^3} - \frac{y^2}{2} = -\frac{1}{6}$$

tj., (4) je jednačina totalnog diferencijala. Prema formuli (3), nalazimo

$$\begin{aligned} u(x,y) &= \int e^{-y} dx + \int \left[-\left(2y + xe^{-y}\right) - \frac{\partial}{\partial y} \int e^{-y} dx \right] dy \\ &= e^{-y}x + \int \left[-\left(2y + xe^{-y}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(xe^{-y}\right) \right] dy \\ &= e^{-y}x + \int \left(-2y - xe^{-y} + xe^{-y}\right) dy \\ &= e^{-y}x - y^2. \end{aligned}$$

Znači, $e^{-y}x - y^2 = C$ je opšte rešenje jednačine (4).

Primer 2. Dokažimo da je jednačina sa razdvojenim promenljivima jednačina totalnog diferencijala.

Rešenje. Neka je $P(x)\,dx = Q(y)\,dy$ jednačina sa razdvojenim promenljivima. Ona je ekvivalentna jednačini

$$P(x)\,dx + [-Q(y)]\,dy = 0, \tag{5}$$

a to je jedna jednačina oblika (1). ($M(x,y) = P(x)$, $N(x,y) = -Q(y)$.) Kako je

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial P}{\partial y} = 0 \quad \text{i} \quad \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial(-Q)}{\partial x} = 0,$$

to je $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$, odakle, prema Teoremi, sledi da je leva strana jednačine (5) totalni diferencijal funkcije u dveju nezavisno promenlljivih x i y.

интеграциони фактор

Integracioni množilac. Ako jednačina (1) nije jednačina totalnog diferencijala, tada je mogućno potražiti funkciju $\lambda(x,y)$ tako da jednačina

$$\lambda(x,y)\,M(x,y)\,dx + \lambda(x,y)\,N(x,y)\,dy = 0$$

bude jednačina totalnog diferencijala. Takva funkcija se zove integracioni faktor ili integracioni množilac. Prema Teoremi, uslov za to je

$$\frac{\partial(\lambda M)}{\partial y} = \frac{\partial(\lambda N)}{\partial x}$$

ili, u razvijenom obliku,

$$M\frac{\partial \lambda}{\partial y} - N\frac{\partial \lambda}{\partial x} + \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)\lambda = 0. \tag{6}$$

Znači, akoje funkcija λ integracioni množilac diferencijalne jednačine (1) tada ta funkcija zadovoljava parcijalnu diferencijalnu jednačinu (6). Lako je videti da važi i obrnuto. Time se problem rešavanja jednačine (1) svodi na rešavanje parcijalne diferencijalne jednačine (6). Međutim, u opštem slučaju teže je rešiti jednačinu (6) nego jednačinu (1). Zato se najčešće postupa tako što se pokušava odrediti funkcija λ u nekom specijalnom obliku, na primer, $\lambda = \lambda(x)$, $\lambda = \lambda(y)$ ili $\lambda = \lambda(xy)$.

Potražimo integracioni množilac u obliku $\lambda = \lambda(\mu)$, gde je $\boxed{\mu = \mu(x,y)}$ poznata funkcija. Jednačina (6) tako postaje

$$\left(M\frac{\partial \mu}{\partial y} - N\frac{\partial \mu}{\partial x}\right)\lambda'(\mu) + \left[\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)\lambda(\mu)\right] = 0$$

ili

$$\boxed{\frac{1}{\lambda}\frac{d\lambda}{d\mu} = \frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M\frac{\partial \mu}{\partial y} - N\frac{\partial \mu}{\partial x}}.} \tag{7}$$

Ako se funkcija na desnoj strani jednačine (7) može prikazati kao funkcija promenljive μ, tj., ako je

$$\frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M\frac{\partial \mu}{\partial y} - N\frac{\partial \mu}{\partial x}} = G(\mu),$$

onda jednačina (7) predstavlja običnu diferencijalnu jednačinu prvog reda u odnosu na nepoznatu funkciju $\lambda = \lambda(\mu)$, koja razdvaja promenljive i čiji je oblik

$$\frac{d\lambda}{\lambda} = G(\mu)\,d\mu.$$

Jedno rešenje te jednačine je funkcija $\boxed{\lambda(\mu) = e^{\int G(\mu)d\mu}.}$

Specijalno, diferencijalna jednačina (1) ima integracioni faktor koji zavisi samo od promenljive x $(\mu(x,y) = x)$, odnosno samo od promenljive y $(\mu(x,y) = y)$, ako postoji funkcija G jedne nezavisno promenljive, takva da važi jednakost

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} = G(x),$$ ✓ $\lambda = \lambda(x)$ (samo od x)

(i tada je $\lambda(x) = e^{\int G(x)dx}$), odnosno takva da važi jednakost

$$\frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M} = G(y),$$ ✓ ($\lambda = \lambda(y)$) samo od y

(i tada je $\lambda(y) = e^{\int G(y)dy}$).

Ortogonalne i izogonalne trajektorije. U nekim primenama često se javlja sledeći problem: ako je data familija krivih $\Phi(x,y,C) = 0$ u xy-ravni, 3А | Пр. | Наћи О.Р. (решити) ДЈ

$$\underbrace{y(2x-y+2)}_{M}dx+\underbrace{2(x-y)}_{N}dy=0.$$

Решење.

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}(2xy-y^2+2y)=2x-2y+2$$

$$\frac{\partial N}{\partial x}=2\neq\frac{\partial M}{\partial y}$$ у општем случају

Тражимо интеграциони фактор у облику $\lambda=\lambda(x)$ или $\lambda=\lambda(y)$ (увек то прво пробамо)

Да ли је $\lambda=\lambda(x)$? Да ли је

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N}=G(x)$$ (функција од x)

$$\frac{2x-2y+\cancel{2}-\cancel{2}}{2(x-y)}=\frac{2(x-y)}{2(x-y)}=1$$

значи $G(x)=1$, јесте функција од x

$$\int\frac{d\lambda}{\lambda}=\int dx$$

$$\ln\lambda=x+\cancel{\tilde{c}}\quad =0$$ (бирамо најједноставнији случај)

$$\boxed{\lambda=e^x}$$ помножимо почетну једначину са e^x, добијамо

$$\underbrace{e^x\cdot y(2x-y+2)}_{M_1}dx+\underbrace{2e^x(x-y)}_{N_1}dy=0$$

Ово мора бити једначина тоталног диференцијала, тј. $\frac{\partial M_1}{\partial y}=\frac{\partial N_1}{\partial x}$ (можете проверити)

О.Р. $$\boxed{ye^x(2x-y)=C}$$ (сами)

35. Показати да једначина

(*) $(x+2y)dx + y\,dy = 0$

има интеграциони фактор облика $\lambda = \lambda(x+y)$ и наћи њен општи интеграл.

Решење.

$\mu = x+y\,,\quad \lambda = \lambda(\mu) = \lambda(x+y)$

$\left.\begin{matrix} M = x+2y \\ N = y \end{matrix}\right\}\quad \frac{\partial M}{\partial y} = 2 \neq 0 = \frac{\partial N}{\partial x}$ па једначина (*) није једначина тоталног диференцијала

$$6(\mu) = \frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M\frac{\partial \mu}{\partial y} - N\frac{\partial \mu}{\partial x}} = \frac{-2}{x+2y-y} = -\frac{2}{x+y} = -\frac{2}{\mu}$$

$$(7) \rightarrow \frac{d\lambda}{\lambda} = -\frac{2}{\mu}\,d\mu$$

$$\ln\lambda = -2\ln\mu$$

$$\lambda = \frac{1}{\mu^2} = \frac{1}{(x+y)^2} \quad \text{инт. факт.}$$

Помножимо са њим једн (*), добијамо

$$\frac{x+2y}{(x+y)^2}dx + \frac{y}{(x+y)^2}dy = 0$$

Ово јесте једн. тоталног диференцијала

$$\left\{\begin{matrix} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{x+2y}{(x+y)^2} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{y}{(x+y)^2} \end{matrix}\right. \longrightarrow \int du = \int\frac{y\,dy}{(x+y)^2},\quad u = \int\frac{(y+x)-x}{(x+y)^2}dy$$

убацимо $\quad u = \ln(x+y) + \frac{x}{x+y} + \varphi(x)$

$$\cancel{\frac{1}{x+y}} + \frac{\cancel{x+y-x}}{(x+y)^2} + \varphi'(x) = \cancel{\frac{x+2y}{(x+y)^2}}$$

$$\varphi'(x) = 0$$

$$\varphi(x) = C_1$$

о.р. $\boxed{\ln(x+y) + \frac{x}{x+y} = C}$

naći drugu familiju krivih $\Psi(x, y, C) = 0$, tako da svaka kriva te familije seče krive familije $\Phi(x, y, C) = 0$ pod pravim uglom. Tada se familija krivih $\Psi(x, y, C) = 0$ zove familija ortogonalnih trajektorija familije $\Phi(x, y, C) = 0$.

Analitički, to znači sledeće. Ako je $F(x, y, y') = 0$ diferencijalna jednačina familije krivih $\Phi(x, y, C) = 0$, onda diferencijalna jednačina ortogonalnih trajektorija te familije ima oblik

$$F\left(x, y, -\frac{1}{y'}\right) = 0,$$

jer uslov normalnosti tangenti sa koeficijentima pravca k_1 i k_2 glasi: $k_1 \cdot k_2 = -1$.

Da zaključimo: ako želimo da nađemo ortogonalne trajektorije familije $\Phi(x, y, C) = 0$, najpre nađemo njenu diferencijalnu jednačinu $F(x, y, y') = 0$ i u njoj y' zamenimo sa $-\frac{1}{y'}$. Integraljenjem tako dobijene diferencijalne jednačine

$$F\left(x, y, -\frac{1}{y'}\right) = 0,$$

dobijamo familiju ortogonalnih trajektorija familije $\Phi(x, y, C) = 0$.

Primer 3. Nađimo ortogonalne trajektorije familije krugova sa centrom u koordinatnom početku:

$$x^2 + y^2 = C. \tag{8}$$

Rešenje. Najpre nađimo diferencijalnu jednačinu familije krugova. Diferenciranjem jednačine (8) dobijamo

$$2x + 2yy' = 0, \quad \text{tj.} \quad y' = -\frac{x}{y}.$$

To je diferencijalna jednačina familije krugova. Ako u toj jednačini y' zamenimo sa $-\frac{1}{y'}$, dobijemo

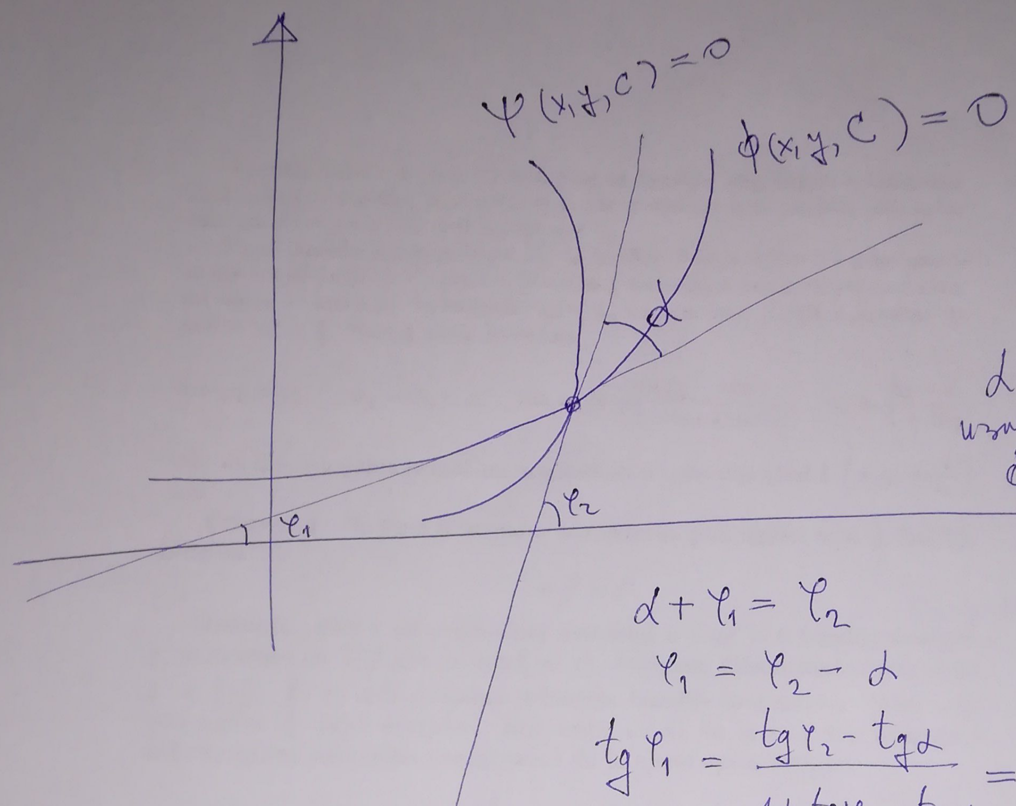
$$-\frac{1}{y'} = -\frac{x}{y}, \quad \text{odnosno} \quad y' = \frac{y}{x},$$

što je diferencijalna jednačina tražene familije ortogonalnih trajektorija. Njenim rešavanjem, nalazimo

$$y = Cx \quad (x \neq 0).$$

Ovo je familija ortogonalnih trajektorija familije (8).

4A



α - угао између кривих ϕ и ψ

$k = tg\,\alpha$

$$\alpha + \varphi_1 = \varphi_2$$

$$\varphi_1 = \varphi_2 - \alpha$$

$$tg\,\varphi_1 = \frac{tg\,\varphi_2 - tg\,\alpha}{1 + tg\,\varphi_2 \cdot tg\,\alpha} =$$

$$k_1 = \frac{k_2 - k}{1 + k\,k_2}$$

Familija krivih $\Psi(x,y,C)=0$ zove se familija izogonalnih trajektorija pod uglom α familije $\Phi(x,y,C)=0$, ako svaka kriva te familije seče krive familije $\Phi(x,y,C)=0$ pod uglom $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$.

Ugao između ma koje krive L_C iz familije $\Phi(x,y,C)=0$ i neke izogonalne trajektorije L u njihovoj presečnoj tački M smatra se orijentisanim od tangente krive L_C ka tangenti krive L, a merni broj α ugla α je takav da je $0<|\alpha|<\frac{\pi}{2}$. Na taj način se dobija

$$\alpha+\varphi_1=\varphi_2, \quad \varphi_1=\varphi_2-\alpha, \quad \tan\varphi_1=\frac{\tan\varphi_2-\tan\alpha}{1+\tan\varphi_2\tan\alpha}, \quad k_1=\frac{k_2-k}{1+kk_2},$$

tako da diferencijalna jednačina izogonalnih trajektorija glasi $F\left(x,y,\frac{y'-k}{1+ky'}\right)=0$.

Primer 4. Nađimo izogonalne trajektorije pod uglom $\alpha=\frac{\pi}{4}$ familije krugova

$$x^2+y^2=C.$$

Rešenje. Ako u diferencijalnoj jednačini $x+yy'=0$ familije ~~krugova,~~ кружница y' zamenimo sa $\frac{y'-1}{1+y'}$ (jer je $\tan\frac{\pi}{4}=1$), dobijemo diferencijalnu jednačinu $y'=\frac{y-x}{y+x}$. To je diferencijalna jednačina familije izogonalnih trajektorija pod uglom $\frac{\pi}{4}$ datih krugova. Nije teško videti da je to jedna homogena diiferencijalna jednačina prvog reda i da je njeno opšte rešenje:

$$\ln\frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}+\arctan\frac{y}{x}=C.$$

?

Решење примера 4.

$$k=\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}=1$$

$$y'=-\frac{x}{y}$$

$$\frac{y'-1}{1+y'}=-\frac{x}{y}$$

$$y'y-y=-x-xy'$$

$$y'(y+x)=y-x$$

$$y'=\frac{y-x}{y+x}$$ хомогена

$$y'=\frac{\frac{y}{x}-1}{\frac{y}{x}+1}$$

$$u=\frac{y}{x}, \quad u=u(x)$$

$$y=xu$$

$$y'=u+xu'$$

$$u+xu'=\frac{u-1}{u+1}$$

$$xu'=\frac{u-1}{u+1}-u$$

$$xu'=\frac{\cancel{u}-1-u^2-\cancel{u}}{u+1}$$

$$x\cdot\frac{du}{dx}=-\frac{u^2+1}{u+1}$$

$$\frac{u+1}{u^2+1}\,du=-\frac{dx}{x}$$

$$\frac{1}{2}\int\frac{2u}{u^2+1}\,du+\int\frac{du}{u^2+1}=-\int\frac{dx}{x}$$

$$\frac{1}{2}\ln(u^2+1)+\operatorname{arctg}u=-\ln x+C$$

$$\ln x+\ln\sqrt{\frac{y^2}{x^2}+1}+\operatorname{arctg}\frac{y}{x}=C$$

$$\boxed{\ln\sqrt{x^2+y^2}+\operatorname{arctg}\frac{y}{x}=C}$$

О.Р.