

Ovaj dokument sadrži zadatke iz predmeta Elektrotehnika na Mašinskom fakultetu u Beogradu. Zadaci su koncipirani tako da prate tematske celine sa predavanja i omogućavaju vežbanje ključnih pojmova i metoda. Zadaci su numerisani i raspoređeni prema oblastima koje se obrađuju na predavanjima. Preporučuje se da pokušate samostalno da rešite svaki zadatak, a zatim uporedite svoj postupak sa ponuđenim rešenjima. Posebnu pažnju obratite na analizu vektorskih veličina, jedinica i fizičkih pretpostavki. U nekim zadacima data su i potpitanja koja podstiču razumevanje i diskusiju. Kroz zadatke ćete uočiti sledeće oznake:



Za važne komentare i mesta gde studenti često greše.



Za dodatna pitanja vezano za zadatak.



Za one koji žele da rade više - ne dolazi na ispitu!



Za ideju, komentar na izvođenje.



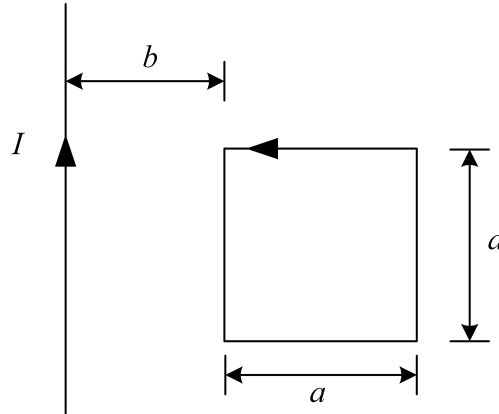
Za preporuku uz zadatak.

Konsultacije: Za dodatna pojašnjenja i pitanja u vezi sa predmetom možete me kontaktirati putem:

- Email: vbecejac@mas.bg.ac.rs
- Uživo: tokom termina konsultacija **sredom u 10 časova** u Laboratoriji za elektrotehniku i elektroniku (soba 2, pored Studentske službe).

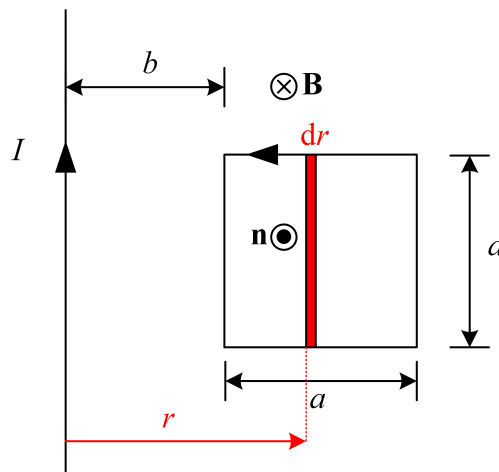
1 Elektromagnetizam

1. Veoma dugačak provodnik sa stalnom strujom jačine I i kvadratna kontura dužine stranice a se nalaze u istoj ravni, kao na slici. Najbliža stranica kvadrata paralelna provodniku je na udaljenosti b od njega. Odrediti izraz za magnetski fluks kroz kvadratnu konturu.

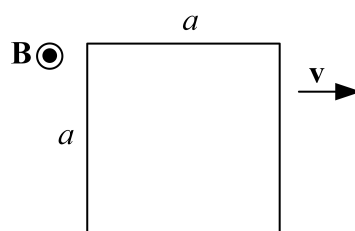


REŠENJE: Magnetska indukcija veoma dugačkog provodnika sa strujom nije homogena. Algebarski intenzitet je $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$, prema referentnom smeru u papir. Ukoliko se na proizvoljan način usmeri kvadratna kontura, primenom desne zavojnice, normala na ravnu površ oslonjenu na nju je iz papira. Ukupan fluks se mora odrediti primenom integrala (magnetska indukcija nije homogena)

$$\Phi = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \int_b^{b+a} \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \cdot a \cdot dr \cdot \cos \pi = -\frac{\mu_0 I a}{2\pi} \ln \frac{b+a}{b}.$$



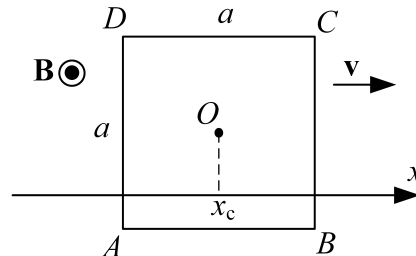
2. Kvadratna kontura stranice a nalazi se u homogenom magnetskom polju indukcije B , koje je upravno na površ kvadrata. Kvadrat se kreće konstantnom brzinom v , kao na slici. Odrediti indukovanu ems u kvadratnoj konturi.



REŠENJE: I način: Ukoliko je $x_c = vt$ koordinata centra zavojka, tada je koordinata leve stranice $vt - \frac{a}{2}$, a desne $vt + \frac{a}{2}$. Fluks se dobija iz

$$\Phi = \int_{vt - \frac{a}{2}}^{vt + \frac{a}{2}} B \cdot a \, dx = Ba \left(vt + \frac{a}{2} - vt + \frac{a}{2} \right) = Ba^2.$$

Kako je magnetski fluks konstanta u odnosu na vreme, idukovana ems jednaka je nuli.



II način: Usled kretanja u homogenom magnetskom polju pojavljuje se dinamička indukcija pa je

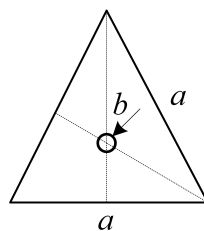
$$e_{\text{ind,din}} = \oint_C \left(\underbrace{\mathbf{v} \times \mathbf{B}}_{\mathbf{E}_{\text{ind,din}}} \right) \cdot d\mathbf{l}.$$

Primetimo da je na stranice AB i CD $e_{\text{ind,din}} = 0$ jer je ugao između $\mathbf{E}_{\text{ind,din}}$ i $d\mathbf{l}$ jednak $\frac{\pi}{2}$, a $\cos \frac{\pi}{2} = 0$, preostaju stranice BC i DA :

$$\begin{aligned} e_{\text{ind,din}BC} &= vba \\ e_{\text{ind,din}DA} &= -vba, \end{aligned}$$

a u zbiru je sve jednako nuli.

3. Žičana kontura, oblika jednakostraničnog trougla, stranice a i kružna kontura poluprečnika b ($a \gg b$) postavljeni su u istoj ravni, kao na slici. Centar kružne konture i težište trougla se poklapaju. Odrediti približno izraz za međusobnu induktivnost.

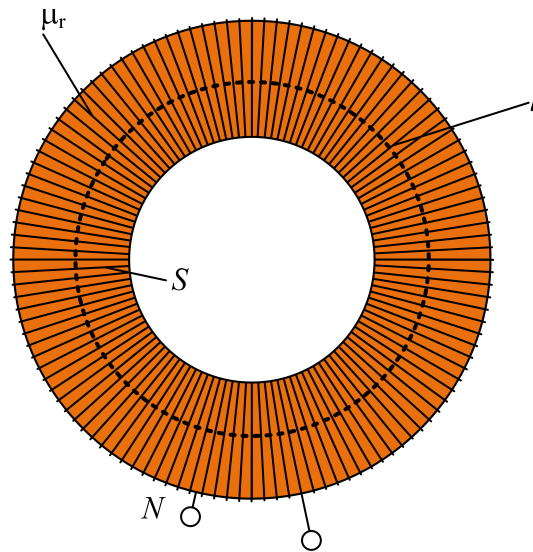


REŠENJE: Odaberimo da orijentacije trougla i kružnice budu u pozitivnom matematičkom smeru. Vektor magnetske indukcije u težištu trougla je određen na prvim vežbama iz magnetizma. Dobijeno je $B = \frac{9\mu_0 I}{2\pi a}$, u ovom slučaju prema referentnom smeru ka posmatraču. Kako je $a \gg b$, kružnu konturu možemo smatrati jako malom pa se može smatrati da se svaka tačka površine oslonjene na konturu prkatično poklapa sa težištem trougla. Dakle,

$$\Phi \approx BS \cos 0 \approx \frac{9\mu_0 I}{2\pi a} \cdot b^2 \pi.$$

Sada je $L \approx \frac{9\mu_0}{2a} b^2$.

4. Na tanak torus, dužine srednje linije $l = 600$ mm i površine poprečnog preseka $S = 10$ cm², ravnomerno i gusto je namotano $N = 1200$ zavojaka tanke žice. Jezgro torusa je načinjeno od feromagnetskog materijala čija je relativna permeabilnost $\mu_r = 1000$. Izračunati induktivnost namotaja.



REŠENJE: Prema Amperovom zakonu i konstitutivnoj relaciji $B = \mu H$ dobija se

$$Hl = NI \implies H = \frac{NI}{l} \implies B = \mu_0 \mu_r \frac{NI}{l}.$$

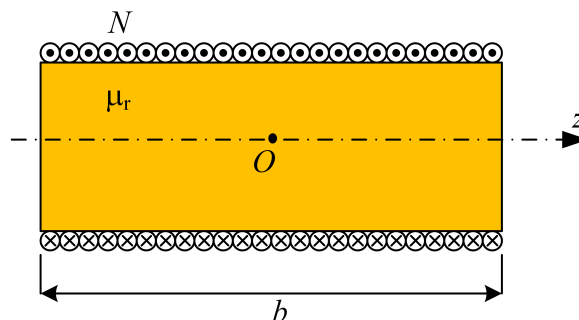
Fluks namotaja je

$$\Phi = NBS = \mu_0 \mu_r \frac{N^2 I}{l}$$

pa je njegova induktivnost

$$L = \mu_0 \mu_r \frac{N^2 S}{l} = 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 1000 \cdot \frac{1200^2 \cdot 10 \cdot 10^{-4}}{0,6} = 3,016 \text{ H.}$$

5. Dugačak solenoid od linearnog feromagnetskog materijala permeabilnosti $\mu_r = 2000$ ima ravnomerno i gusto namotanu žicu sa $N = 500$ zavojaka. Dužina solenoida je $b = 0,1$ m, a površina poprečnog preseka je $S = 1$ cm². Izračunati induktivnost namotaja.



REŠENJE: Vektor magnetske indukcije dugačkog solenoida je

$$B = \frac{\mu_0 \mu_r NI}{b},$$

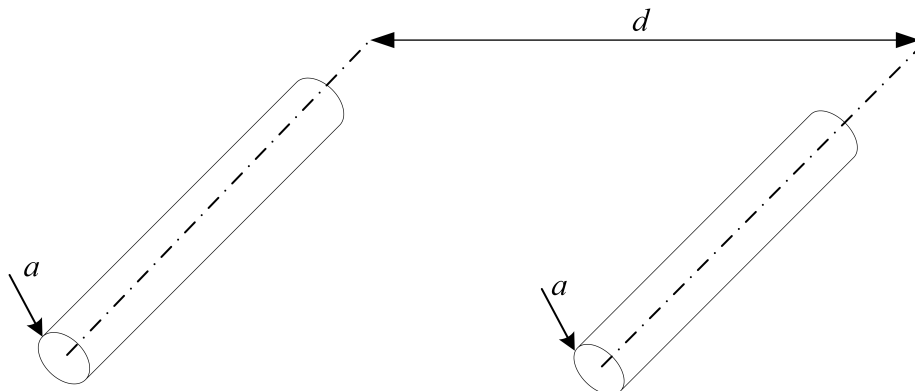
a fluks namotaja je

$$\Phi = NBS = \frac{\mu_0 \mu_r N^2 I}{b} S,$$

pa je induktivnost namotaja data izrazom

$$L = \frac{\mu_0 \mu_r N^2 S}{b} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 2000 \cdot 500^2 \cdot 10^{-4}}{0,1} = 0,628 \text{ H.}$$

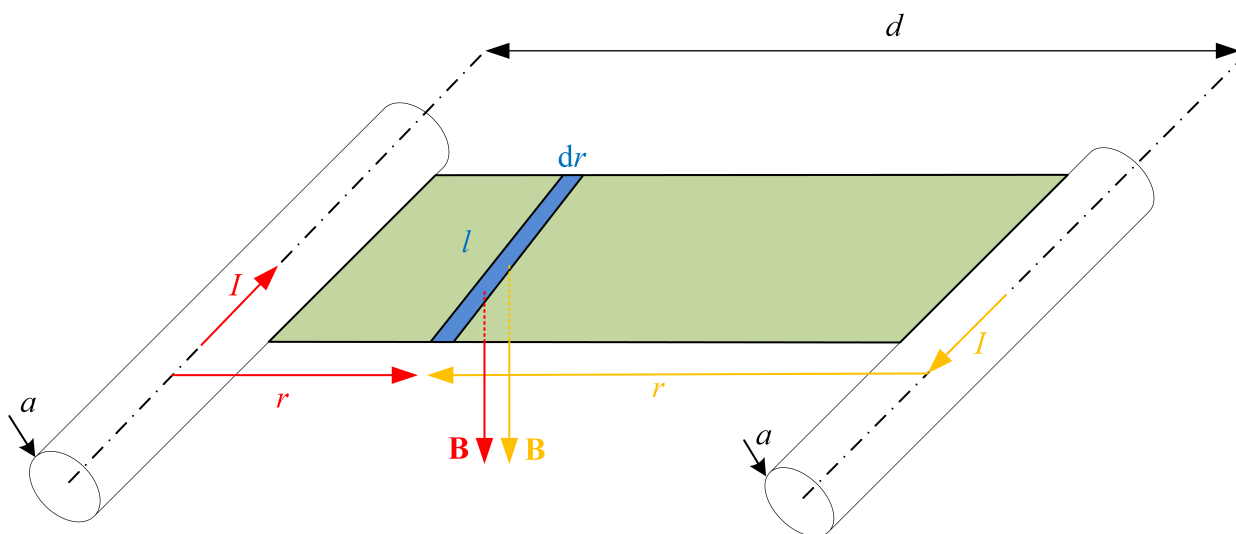
6. Odrediti izraz za spoljašnju podužnu induktivnost tankog simetričnog dvožičnog voda, poluprečnika provodnika a i odstojanja između osa provodnika d . Smatrati da je $d \gg a$.



REŠENJE: Magnetska indukcija dugačkog provodnika izvan njega je data izrazom

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}.$$

Površina za određivanje fluksa se oslanja u spoljašnjosti, od provodnika do provodnika, kao na slici.



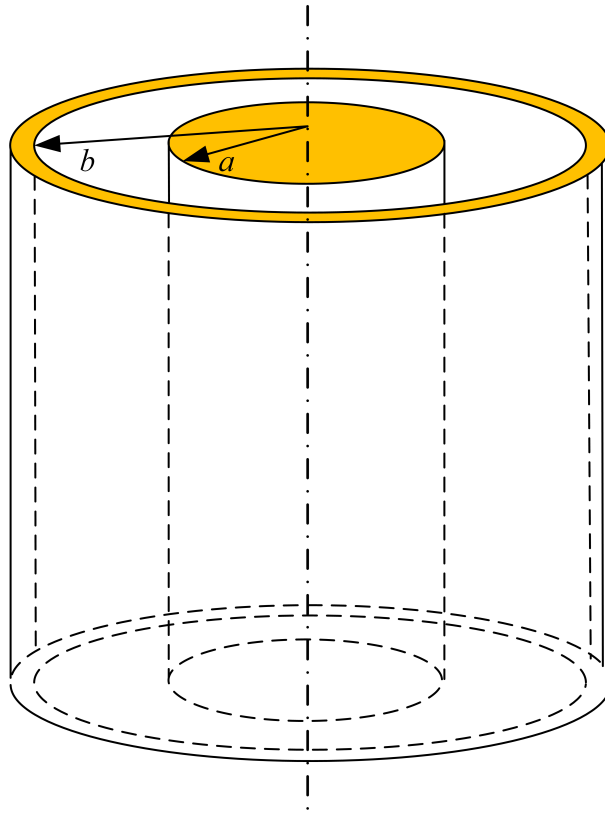
Fluks vektora magnetske indukcije je potrebno naći integracijom s obzirom da polje B nije homogeno. Dakle magnetski fluks od jednog provodnika je

$$\Phi_1 = \int_a^{d-a} \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \cdot l \, dr = \frac{\mu_0 I}{2\pi} l \cdot \ln \frac{d-a}{a} \approx \frac{\mu_0 I l}{2\pi} \ln \frac{d}{a}.$$

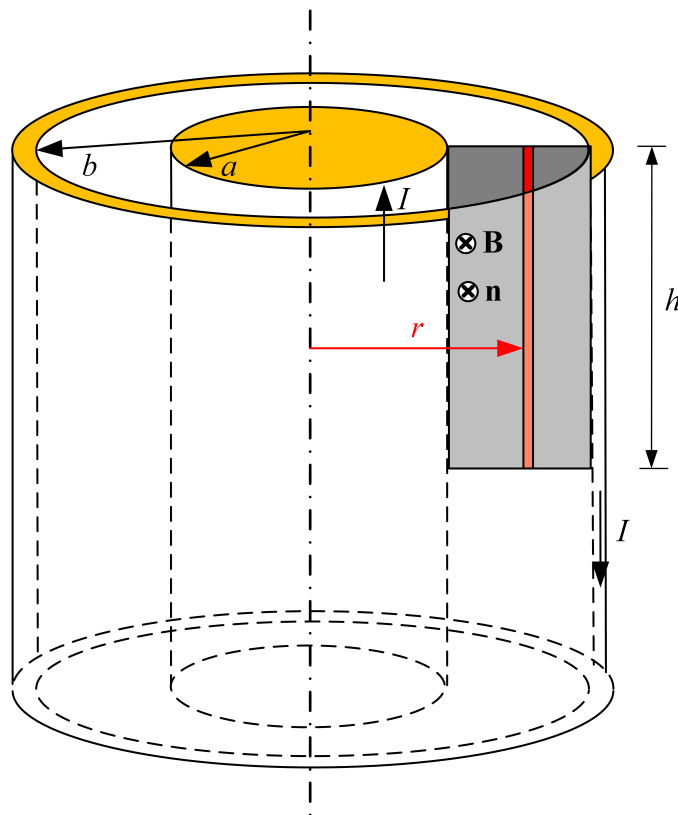
Kako postoje dva istovetna provodnika, ukupan fluks je $\Phi = 2\Phi_1$. Spoljašnju podužnu induktivnost dobijamo iz

$$L' = \frac{\Phi}{Il} = \frac{\mu_0}{\pi} \ln \frac{d}{a}.$$

7. Odrediti izraz za podužnu spoljašnju induktivnost koaksijalnog voda poluprečnika unutrašnjeg provodnika a i unutrašnjeg poluprečnika spoljašnjeg provodnika b . Sredina je svuda neferomagnetska.



REŠENJE: Površina kroz koju se određuje spoljašnji magneti fluks je pravougaonik prikazan na slici.



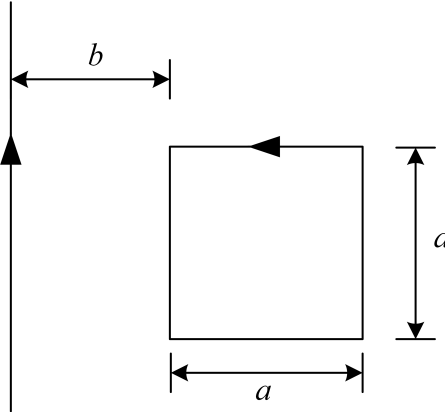
Magnetska indukcija u tačkama oslonjena na površ pravougaonika je $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$ i nehomogena je. Zbog toga fluks tražimo pomoću integrala

$$\Phi = \int_a^b \frac{\mu_0 I}{2\pi r} h \, dr = \frac{\mu_0 I h}{2\pi} \ln \frac{b}{a},$$

pa je podužna induktivnost

$$L' = \frac{\Phi}{Ih} = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{b}{a}.$$

8. Veoma dugačak provodnik i kvadratna kontura dužine stranice a se nalaze u istoj ravni, kao na slici. Najbliža stranica kvadrata paralelna provodniku je na udaljenosti b od njega. Prema usmerenjima sa slike, odrediti izraz za međusobnu induktivnost provodnika i kvadrata.

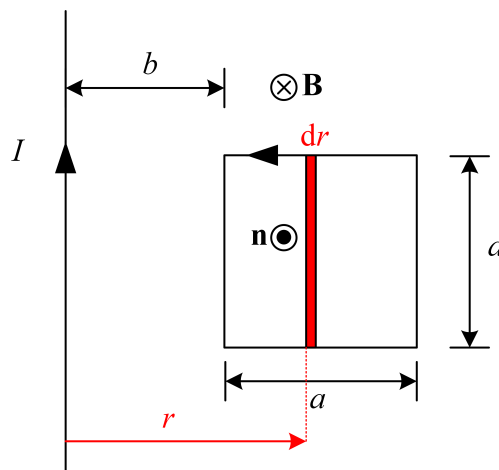


REŠENJE: Fluks kroz površinu oslonjenu na konturu, koji potiče od indukcije zbog struje u provodniku je

$$\Phi_{21} = - \int_b^{a+b} \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \cdot a \, dr = - \frac{\mu_0 I a}{2\pi} \ln \frac{a+b}{b},$$

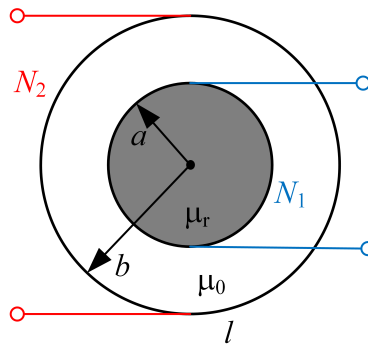
pa je međusobna induktivnost

$$L_{21} = - \frac{\mu_0 a}{2\pi} \ln \frac{a+b}{b}.$$



Znak minus potiče od suprotnih smerova vektora magnetske indukcije i normale na površinu provodnika.

9. Na slici je prikazan poprečni presek dva dugačka solenoida postavljena koaksijalno. Oba solenoida imaju kružne poprečne preseke, poluprečnika a i b . Dužina oba solenoida je l , a brojevi zavojaka na njima namotani su N_1 i N_2 . Ukoliko je unutrašnjost prvog solenoida ispunjena linearnim feromagnetikom relativne permeabilnosti μ_r , a u ostatku prostora je vazduh, odrediti sopstvenu induktivnost prvog namotaja, sopstvenu induktivnost drugog namotaja, međusobnu induktivnost i koeficijent sprege ovih namotaja.



REŠENJE: Sopstvenu induktivnost prvog namotaja dobijamo tako što u njemu uspostavljamo struju, čime dobijamo indukciju

$$B_1 = \frac{\mu_0 \mu_r N_1 I_1}{l}$$

i oslanjamo površine na zavojke prvog namotaja, čime dobijamo fluks

$$\Phi_1 = N_1 B S_1 = \frac{\mu_0 \mu_r N_1^2 I_1}{l} a^2 \pi,$$

pa je

$$L_1 = \frac{\Phi_1}{I_1} = \frac{\mu_0 \mu_r N_1^2}{l} a^2 \pi.$$

Sopstvenu induktivnost drugog namotaja dobijamo tako što u njemu uspostavljamo struju, a kako se u unutrašnjosti drugog solenoida nalazi i feromagnetik i vazduh, dobijamo

$$B_{\text{vaz}} = \frac{\mu_0 N_2 I_2}{l}, \quad B_{\text{fer}} = \frac{\mu_0 \mu_r N_2 I_2}{l},$$

pa je fluks

$$\begin{aligned} \Phi_2 &= N_2 B_{\text{vaz}} S_{\text{vaz}} + N_2 B_{\text{fer}} S_{\text{fer}} \\ &= N_2 \frac{\mu_0 N_2 I_2}{l} (b^2 - a^2) \pi + N_2 \frac{\mu_0 \mu_r N_2 I_2}{l} a^2 \pi \\ &= \frac{\mu_0 N_2^2 I_2}{l} \pi (b^2 + (\mu_r - 1) a^2), \end{aligned}$$

a induktivnost je

$$L_2 = \frac{\Phi_2}{I_2} = \frac{\mu_0 N_2^2}{l} \pi (b^2 + (\mu_r - 1) a^2).$$

Međusobnu induktivnost dobijamo tako što, recimo, u prvi namotaj uspostavimo struju, čime dobijamo

$$B_1 = \frac{\mu_0 \mu_r N_1 I_1}{l},$$

a površine oslanjamo na navojke drugog namotaja,

$$\Phi_{21} = N_2 B_1 S_1 = \frac{\mu_0 \mu_r N_1 N_2 I_1}{l} \cdot a^2 \pi,$$

pa je međusobna induktivnost

$$L_{21} = \frac{\Phi_{21}}{I_1} = \frac{\mu_0 \mu_r N_1 N_2}{l} \cdot a^2 \pi.$$

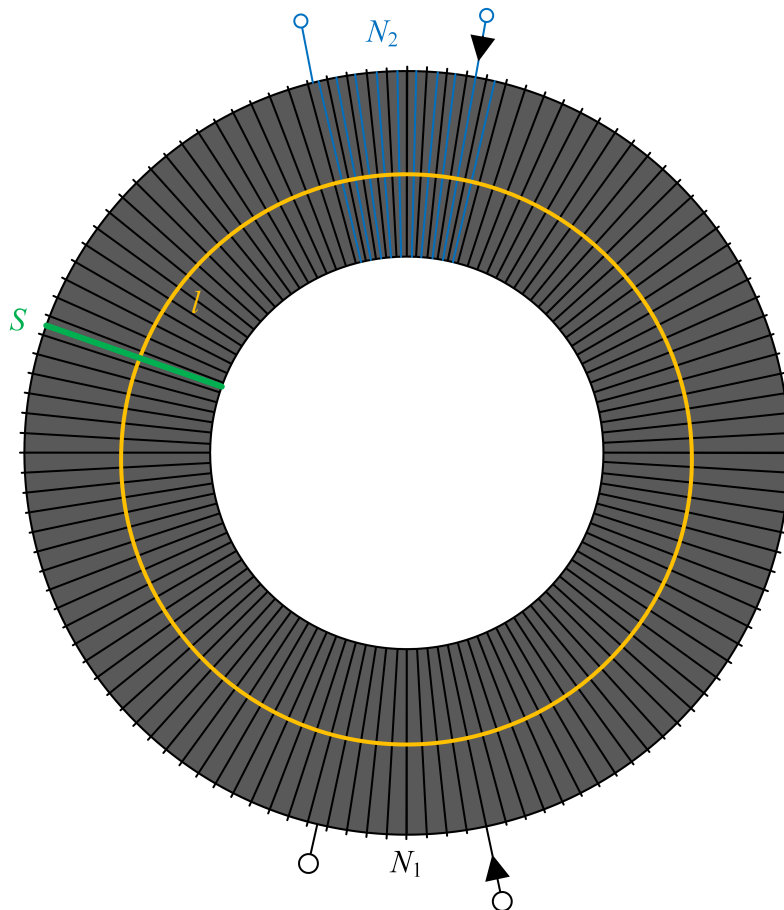
Koeficijent sprege se dobija iz izraza

$$k = \frac{|L_{21}|}{\sqrt{L_1 L_2}} = \frac{\frac{\mu_0 \mu_r N_1 N_2}{l} \cdot a^2 \pi}{\sqrt{\frac{\mu_0 \mu_r N_1^2}{l} a^2 \pi \cdot \frac{\mu_0 N_2^2}{l} \pi (b^2 + (\mu_r - 1) a^2)}} = \sqrt{\frac{\mu_r}{\mu_r - 1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2}}$$



U zadatku određen izraz za L_{12} . Da li bi se dobio isti izraz da je traženo L_{12} ? Da li sopstvena induktivnost mora uvek biti pozitivna? A međusobna induktivnost?

10. Na tanko torusno jezgro od neferomagnetskog materijala ($\mu \approx \mu_0$), dužine srednje linije l i površine poprečnog preseka S , gusto i ravnomerno su namotana dva namotaja tanke žice sa N_1 i N_2 zavoja. Odrediti sopstvenu induktivnost prvog namotaja, sopstvenu induktivnost drugog namotaja, međusobnu induktivnost i koeficijent sprege ovih namotaja. Zanimariti rasipanje.



REŠENJE: Ukoliko se uspostavi struja u prvom namotaju, magnetska indukcija u torusu je

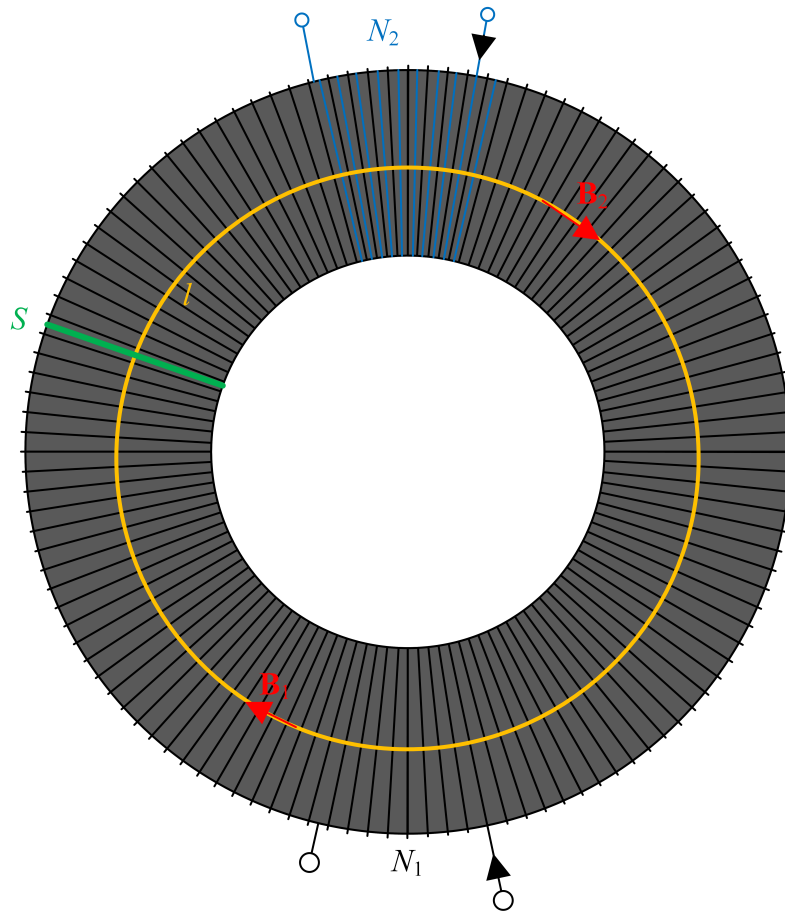
$$B_1 = \frac{\mu_0 N_1 I_1}{l},$$

a fluks je

$$\Phi_1 = N_1 B_1 S = \frac{\mu_0 N_1^2 I_1}{l} S,$$

pa je induktivnost prvog namotaja

$$L_1 = \frac{\mu_0 N_1^2 S}{l}.$$



Ukoliko se uspostavi struja samo u drugom namotaju, magnetska indukcija u torusu je

$$B_2 = \frac{\mu_0 N_2 I_2}{l},$$

a fluks je

$$\Phi_2 = N_2 B_2 S = \frac{\mu_0 N_2^2 I_2}{l} S,$$

pa je induktivnost drugog namotaja

$$L_2 = \frac{\mu_0 N_2^2 S}{l}.$$

Prema orijentacijama zavojsa sa slike, međusobni fluks je pozitivan, pa će i međusobna induktivnost biti pozitivna. Ukoliko je struja uspostavljena u prvom namotaju, tada je

$$B_1 = \frac{\mu_0 N_1 I_1}{l},$$

a fluks kroz drugi namotaj je

$$\Phi_{21} = +N_2 B_1 S = \frac{\mu_0 N_1 N_2 I_1}{l} S$$

pa je

$$L_{21} = \frac{\mu_0 N_1 N_2 S}{l}.$$

Koeficijent sprege je

$$k = \frac{|L_{21}|}{\sqrt{L_1 L_2}} = \frac{\frac{\mu_0 N_1 N_2 S}{l}}{\sqrt{\frac{\mu_0 N_1^2 S}{l} \frac{\mu_0 N_1 N_2 S}{l}}} = 1.$$

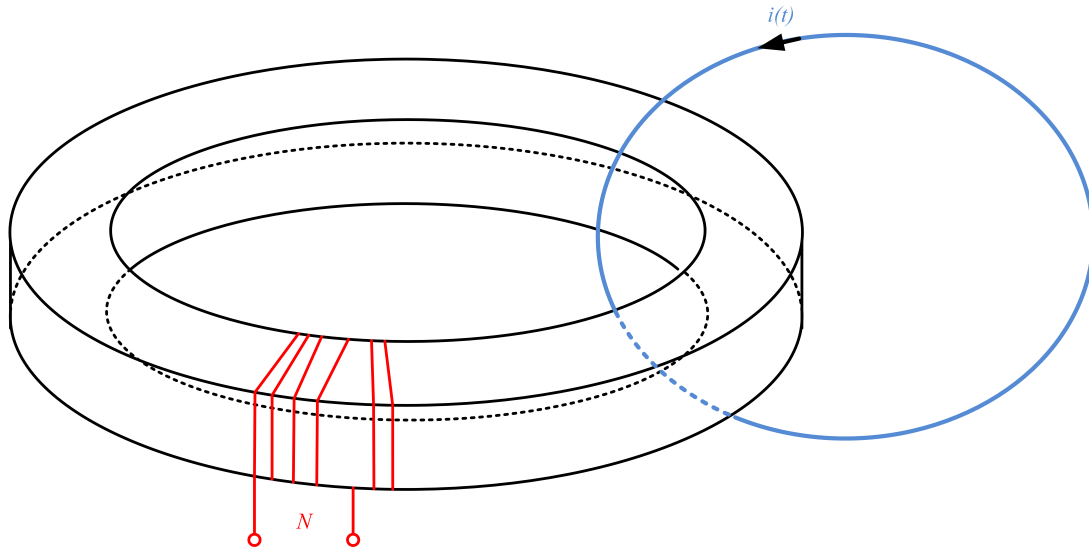


Primititi da je induktivnost srazmerna kvadratu broja zavojsa.



Kako tumačite da je dobijeni koeficijent sprege jednak jednici tj. da je ostvarena savršena sprege? Da li je ona u praksi ostvariva?

11. Na tanko torusno jezgro od neferomagnetskog materijala ($\mu \approx \mu_0$), površine poprečnog preseka S i dužine srednje linije l , gusto i ravnomerno je namotano N zavojsa tanke žice. Torus je obuhvaćen provodnom konturom, površine S_1 , u kojoj je uspostavljena prostoperiodična struja $i(t) = I_{\max} \cos \omega t$. Odrediti indukovanu ems u torusnom namotaju.



REŠENJE: Kako je prostoperiodična struja uspostavljena u provodnoj konturi, pojaviće se vremenski promenljivo magnetsko polje i samim tim vremenski promenljiv magnetski fluks. Zbog toga će se u torusnom namotaju indukovati ems

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt} (L_{12}i(t)) = -L_{12} \frac{di}{dt}. \quad (1)$$

Očigledno je da je jednostavnije uspostaviti struju u torusni namotaj i odrediti fluks kroz konturu¹. Dobija se

$$\Phi_{21} = B \cdot S \cos 0 = \frac{\mu_0 N I}{l} S,$$

pa je

$$L_{21} = \frac{\mu_0 N S}{l} = L_{12}.$$

Dakle, zamenom u (1) je

$$e = -\frac{\mu_0 N S}{l} I_{\max} (-\omega) \sin \omega t = \frac{\mu_0 N S}{l} I_{\max} \omega \sin \omega t.$$



Primititi da nam za rešavanje zadatka nije bila potrebna površina zavojsa S_1 jer presek te površine i površine gde ima magnetske indukcije (unutar torusa) je samo površina poprečnog preseka torusa, S .

¹Zadatak se analitički ne bi mogao rešiti onako kako je postavljen, tj. da se traži magnetska indukcija od provodnika sa strujom $i(t)$. Ideja zadatka je da se iskoristi da je $L_{12} = L_{21}$.

12. Izvesti jedinicu za magnetsku indukciju preko osnovnih SI jedinica.

REŠENJE: Magnetska sila na naelektrisanu česticu je

$$\mathbf{F} = Q\mathbf{v} \times \mathbf{B},$$

odakle zaključujemo da je

$$T = \frac{N}{C \cdot \frac{m}{s}} = \frac{kg \frac{m}{s^2}}{A \cdot s \cdot \frac{m}{s}} = \frac{kg \frac{m}{s^2}}{A \cdot m} = \frac{kg}{As^2}.$$

13. Pokazati da su jedinice za indukovanu elektromotornu silu e_{ind} i brzinu promene fluksa u vremenu $d\Phi/dt$ iste u SI sistemu jedinica.

REŠENJE: Kako je fluks

$$Wb = T \cdot m^2 = \frac{kg}{As^2} \cdot m^2,$$

izvod fluksa u vremenu je

$$\frac{Wb}{s} = \frac{kg}{As^3} \cdot m^2.$$

Sa druge strane, indukovana elektromotorna sila je u voltima, koji se može predstaviti kao količnik električne snage i struje, a zatim je snaga proizvod sile i brzine. Ovom se dobija

$$V = \frac{W}{A} = \frac{N \cdot \frac{m}{s}}{A} = \frac{kg \cdot \frac{m}{s^2} \cdot \frac{m}{s}}{A} = \frac{kgm^2}{As^3},$$

što je trebalo i pokazati.