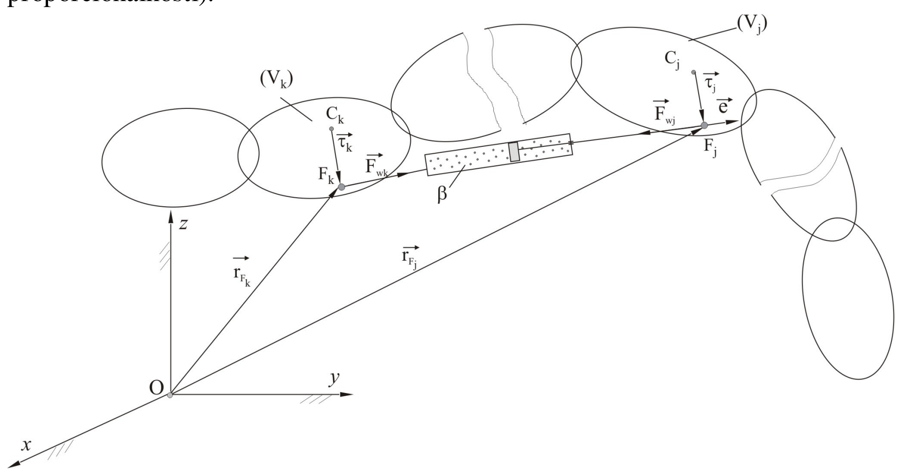
8.2.2 Generalisane sile od sila viskoznog trenja

Za tačke $F_k \in (V_i)$ i $F_j \in (V_j)$ RS u obliku otvorenog kinematičkog lanca bez grananja sa segmentima $(V_1),(V_2),...,(V_n)$ (vidi sl. 8.3) vezani su krajevi amortizera (vid sl. 8.4) napunjenog tečnošču. U toku kretanja klipa u odnosu na cilindar amortizera javlja se sila viskoznog trenja čiji je intezitet proporcionalan prvom stepenu brzine klipa u odnosu na cilindar (β - konstanta proporcionalnosti).



Slika 8.4

Uzimajući u obzir da važi

$$\vec{F}_{wj} = -\vec{F}_{wk} = -\beta \vec{v}_{rk}, \tag{8.59}$$

gde je $\vec{F}_{wj}$ sila viskoznog trenja koja deluje na klip, $\vec{F}_{wk}$ sila viskoznog trenja koja deluje na cilindar amortizera, $\vec{v}_{rk}$ relativna brzina klipa u odnosu na amortizer, izraz za virtualni rad sila viskoznog trenja glasi

$$\delta A^w = \vec{F}_{wk} \cdot \delta \vec{r}_{F_k} + \vec{F}_{wj} \cdot \delta \vec{r}_{F_j} = \vec{F}_{wj} \cdot \delta\left(\overrightarrow{F_k F_j}\right). \tag{8.60}$$

Očigledno je (vidi sl. 8.4)

$$\overrightarrow{F_k F_j} = \overline{F_k F_j}\,\vec{e}, \ |\vec{e}| = 1, \tag{8.61}$$

tako da se dobija relacija

$$\delta\left(\overrightarrow{F_k F_j}\right) = \vec{e}\,\delta\left(\overline{F_k F_j}\right) + \overline{F_k F_j}\,\delta \vec{e}, \tag{8.62}$$

koja sa izrazom

$$\vec{v}_{rk} = \vec{e}\,\frac{d}{dt}\left(\overline{F_k F_j}\right), \tag{8.63}$$

i izrazima (8.59) i (8.60) dovodi do relacije

$$\delta A^{w} = -\beta \frac{d}{dt}\left(\overline{F_k F_j}\right)\delta\left(\overline{F_k F_j}\right), \tag{8.64}$$

pri čemu je uzeto u obzir da važi

$$\vec{e}\cdot\delta\,\vec{e} = 0. \tag{8.65}$$

Pošto je

$$\frac{d}{dt}\left(\overline{F_k F_j}\right) = \sum_{\beta=1}^{n}\frac{\partial\left(\overline{F_k F_j}\right)}{\partial q^{\beta}}\dot{q}^{\beta}\ , \tag{8.66}$$

ili (vidi (8.51))

$$\frac{d}{dt}\left(\overline{F_k F_j}\right) = \sum_{\beta=1}^{n}\frac{\overrightarrow{F_k F_j}}{\overline{F_k F_j}}\cdot\frac{\partial\left(\overrightarrow{F_k F_j}\right)}{\partial q^{\beta}}\dot{q}^{\beta}\ , \tag{8.67}$$

i analogno

$$\delta\left(\overline{F_k F_j}\right) = \sum_{\alpha=1}^{n}\frac{\overrightarrow{F_k F_j}}{\overline{F_k F_j}}\cdot\frac{\partial\left(\overrightarrow{F_k F_j}\right)}{\partial q^{\alpha}}\delta q^{\alpha}\ , \tag{8.68}$$

izraz (8.64) dobija oblik

$$\delta A^{w} = -\beta\sum_{\alpha=1}^{n}\sum_{\beta=1}^{n}\frac{\overrightarrow{F_k F_j}}{\overline{F_k F_j}}\cdot\frac{\partial\left(\overrightarrow{F_k F_j}\right)}{\partial q^{\beta}}\dot{q}^{\beta}\,\frac{\overrightarrow{F_k F_j}}{\overline{F_k F_j}}\cdot\frac{\partial\left(\overrightarrow{F_k F_j}\right)}{\partial q^{\alpha}}\delta q^{\alpha}\ , \tag{8.69}$$

iz koga se dobija izraz za traženu generalisanu silu u obliku

$$Q_{\alpha}{}^{w} = -\beta\sum_{\beta=1}^{n}\frac{\overrightarrow{F_k F_j}}{\overline{F_k F_j}}\cdot\frac{\partial\left(\overrightarrow{F_k F_j}\right)}{\partial q^{\beta}}\frac{\overrightarrow{F_k F_j}}{\overline{F_k F_j}}\cdot\frac{\partial\left(\overrightarrow{F_k F_j}\right)}{\partial q^{\alpha}}\dot{q}^{\beta}\,, \tag{8.70}$$

ili (vidi (8.52) i (8.53))

$$Q_{\alpha}^{w} = -\beta\sum_{\beta=1}^{n}\frac{\vec{r}_{C_j}-\vec{r}_{C_k}+\vec{\tau}_j-\vec{\tau}_k}{\left|\vec{r}_{C_j}-\vec{r}_{C_k}+\vec{\tau}_j-\vec{\tau}_k\right|^{2}}\cdot\left(\vec{T}_{\beta(j)}-\vec{T}_{\beta(k)}+\vec{\Omega}_{\beta(j)}\times\vec{\tau}_j-\vec{\Omega}_{\beta(k)}\times\vec{\tau}_k\right)*$$

$$*\left(\vec{r}_{C_j}-\vec{r}_{C_k}+\vec{\tau}_j-\vec{\tau}_k\right)\cdot\left(\vec{T}_{\alpha(j)}-\vec{T}_{\alpha(k)}+\vec{\Omega}_{\alpha(j)}\times\vec{\tau}_j-\vec{\Omega}_{\alpha(k)}\times\vec{\tau}_k\right)\dot{q}^{\beta}\ , \tag{8.71}$$

8.2.3 Generalisane sile od sistema pogonskih sila-drugi nacin

Relativno kretanje proizvoljnog robotskog segmenta (V_i) u odnosu na segment (V_{i-1}) ostvaruje se pomoću pogonskih motora. Motor koji ostvaruje kretanje segmenta (V_i) u odnosu na (V_{i-1}) (vidi sl.8.5) deluje na (V_i) pogonskom silom $\vec{P}_i$ (u slučaju $\xi_i = 1$), odnosno spregom $\vec{\mathfrak{M}}_i$ pogonskih sila čiji je moment $\vec{M}_i$, (u slučaju $\bar{\xi}_i = 1$). Takođe, motor deluje na segment (V_{i-1}) pogonskom silom $\vec{P}_i'$ odnosno spregom $\vec{\mathfrak{M}}_i'$ pogonskih sila čiji je moment $\vec{M}_i'$. Uzmimo da su za pogonske sile $\vec{P}_i$ i $\vec{P}_i'$ napadne tačke $O_i' \in (V_i)$ i $O_i \in (V_{i-1})$ respektivno. Osim toga važi relacija

$$\vec{P}_i' = -\vec{P}_i,\ \vec{M}_i' = -\vec{M}_i,\ i = 1,2,...,n. \tag{8.72}$$

Virtualni rad sprega sila $\vec{\mathfrak{M}}_i$, koji deluje na kruto telo (V_i) čiji moment je $\vec{M}_i$ izračunavamo kao virtualni rad sistema sila $\left(\vec{F}_{i1}, \vec{F}_{i2}\right)$ čije su napadne tačke $A_i \in (V_i)$ i $B_i \in (V_i)$ respektivno, pri čemu važi

$$\vec{F}_{2i} = -\vec{F}_{1i},\ \vec{M}_i = \vec{M}_{A_i}\left(\vec{F}_{2i}\right) = \vec{M}_{B_i}\left(\vec{F}_{1i}\right). \tag{8.73}$$

Pod gornjim uslovom, kao što je poznato, biće

$$\vec{\mathfrak{M}}_i \sim \left(\vec{F}_{1i}; \vec{F}_{2i}\right). \tag{8.74}$$

Kao što je rečeno, važi

$$\delta A(\vec{\mathfrak{M}}_i) = \delta A(\vec{F}_{1i}) + \delta A(\vec{F}_{2i}), \tag{8.75}$$

ili

$$\delta A(\vec{\mathfrak{M}}_i) = \vec{F}_{1i} \cdot \delta \vec{r}_{A_i} + \vec{F}_{2i} \cdot \delta \vec{r}_{B_i}, \tag{8.76}$$

gde su $\vec{r}_{A_i}$ i $\vec{r}_{B_i}$ vektori položaja tačaka A_i i B_i respektivno, u odnosu na koordinatni početak O inercijalnog koordinatnog sistema $Oxyz$. Poslednja relacija prema (8.73) dobija oblik

$$\delta A(\vec{\mathfrak{M}}_i) = \vec{F}_{1i} \cdot \delta(\vec{r}_{A_i} - \vec{r}_{B_i}), \tag{8.77}$$

ili, kako je

$$\delta(\vec{r}_{A_i} - \vec{r}_{B_i}) = \delta\left(\overrightarrow{B_i A_i}\right), \tag{8.78}$$

oblik

$$\delta A(\vec{\mathfrak{M}}_i) = \vec{F}_{1i} \cdot \delta\left(\overrightarrow{B_i A_i}\right), \tag{8.79}$$

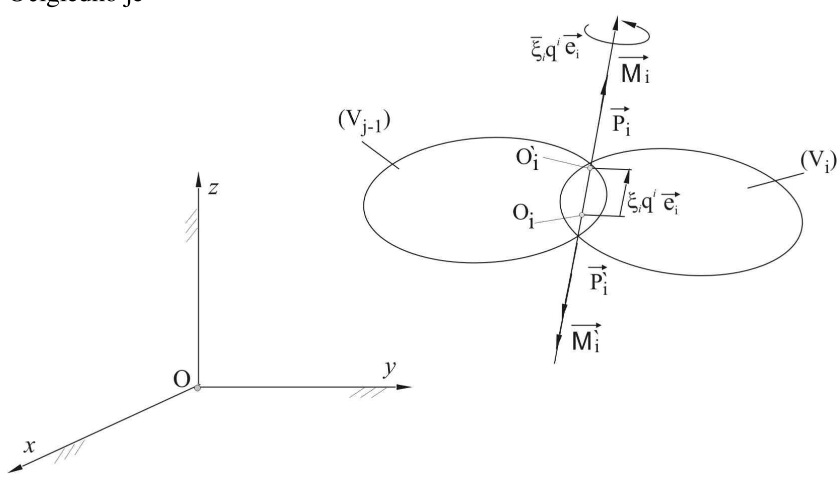
ili

$$\delta A(\vec{\mathfrak{M}}_{\mathrm{i}}) = \sum_{\alpha=1}^{n} \vec{F}_{1i} \cdot (\Omega_{\alpha(i)} \times \overrightarrow{B_i A_i}) \delta q^{\alpha}, \tag{8.80}$$

što dovodi do rezultata

$$\delta A(\vec{\mathfrak{M}}_{\mathrm{i}}) = \sum_{\alpha=1}^{n} \vec{M}_i \cdot \vec{\Omega}_{\alpha(i)} \delta q^{\alpha}. \tag{8.81}$$

Vratimo se nadalje određivanju virutalnog rada sistema pogonskih sila koje deluju na robotski sistem u obliku otvorenog kinematičkog lanca bez grananja. Očigledno je



Slika 8.5

$$\delta A^p = \sum_{i=1}^{n} \delta A\left(\vec{M}_i\right) + \delta A\left(\vec{M}_i'\right) + \delta A\left(\vec{P}_i\right) + \delta A\left(\vec{P}_i'\right), \tag{8.82}$$

što prema (8.81) i (8.26) dovodi do

$$\delta A^p = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{\alpha=1}^{n} \left(\vec{M}_i \cdot \vec{\Omega}_{\alpha(i)} + \vec{M}_i' \cdot \vec{\Omega}_{\alpha(i-1)} \right) \right) \delta q^{\alpha} + \sum_{i=1}^{n} \left(\vec{P}_i \cdot \delta \vec{r}_{O_i'} + \vec{P}_i' \cdot \delta \vec{r}_{O_i} \right), \tag{8.83}$$

što se može napisati i u obliku

$$\delta A^p = \sum_{\alpha=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \vec{M}_i \cdot \left(\vec{\Omega}_{\alpha(i)} - \vec{\Omega}_{\alpha(i-1)} \right) \delta q^{\alpha} + \sum_{\alpha=1}^{n} \vec{P}_{\alpha} \cdot \delta\left(\vec{r}_{O_{\alpha}'} - \vec{r}_{O_{\alpha}} \right). \tag{8.84}$$

Kako je

$$\delta\left(\vec{r}_{O'\alpha} - \vec{r}_{O\alpha} \right) = \delta\left(\xi_{\alpha} \vec{e}_{\alpha} q^{\alpha} \right), \tag{8.85}$$

i

$$\vec{P}_\alpha \cdot \delta\left(\vec{r}_{O'\alpha} - \vec{r}_{O\alpha}\right) = \vec{P}_\alpha \cdot \vec{e}_\alpha \xi_\alpha \delta q^\alpha , \tag{8.86}$$

jer je

$$\vec{P}_\alpha \cdot \delta\vec{e}_\alpha = 0 , \tag{8.87}$$

sledi da (8.84) ima i sledeću formu

$$\delta A^p = \sum_{\alpha=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n}\vec{M}_i \cdot \left(\vec{\Omega}_{\alpha(i)} - \vec{\Omega}_{\alpha(i-1)}\right) + \xi_\alpha \vec{P}_\alpha \cdot \vec{e}_\alpha\right)\delta q^\alpha , \tag{8.88}$$

iz koje se dobija tražena generalisana sila u obliku

$$Q_\alpha^p = \sum_{i=1}^{n}\vec{M}_i \cdot \left(\vec{\Omega}_{\alpha(i)} - \vec{\Omega}_{\alpha(i-1)}\right) + \xi_\alpha \vec{P}_\alpha \cdot \vec{e}_\alpha . \tag{8.89}$$

Poznato je da važe relacije

$$\begin{aligned} &\vec{\Omega}_{\alpha(i)} = 0 \quad \forall\ \alpha < i, \\ &\vec{\Omega}_{\alpha(i)} = \bar{\xi}_\alpha \vec{e}_\alpha \quad \forall\ \alpha \ge i, \end{aligned} \tag{8.90}$$

koje izraz (8.89), uzimajući u obzir da je $\vec{\Omega}_{\alpha(i)} \equiv 0,$ dovode na oblik

$$Q_\alpha^p = \left(\bar{\xi}_\alpha \vec{M}_\alpha + \vec{P}_\alpha \xi_\alpha\right)\cdot \vec{e}_\alpha, \ \ \alpha = 1,2,...,n. \tag{8.91}$$

Primetimo da se do poslednje relacije dolazi direktno ako se sračuna virtualni rad sistema pogonskih sila koji deluje na RS pod uslovom da je virtualno pomeranje RS određeno na sledeći način:

$$\delta q^1 = \delta q^2 = ... = \delta q^{\alpha-1}, \delta q^\alpha \ne 0, \delta q^{\alpha+1} = \delta q^{\alpha+2} = ... = \delta q^n = 0. \tag{8.92}$$

8.2 Princip idealnosti veza robotskog sistema, Q^r_α =0

Ako u sistemu krutih tela koji predstavlja mehanički model RS u obliku otvorenog kinematičkog lanca bez grananja izdvojimo telo (segment) (V_i), sistem reakcija veza (7.38) koji deluje na (V_i), sa napadnim tačkama (7.39) ima za glavni vektor i glavni moment, sračunat za centar inercije C_i segmenta (V_i), izraze (7.44) odnosno (7.45) . Pretpostavimo da su veze između segmenata idealne. Princip idealnosti veza (bez obzira da li je u pitanju otvoreni kinematički lanac ili neki drugi model RS) ima poznati oblik

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{m_i}\vec{R}_{k(i)}\cdot\delta\vec{r}_{k(i)}\right)=0\,, \tag{8.102}$$

gde je $\vec{r}_{k(i)}=\overrightarrow{OB}_{k(i)}$ vektor položaja napadne tačke $B_{k(i)}\in(V_i)$ reakcije veze $\vec{R}_{k(i)}$ u odnosu na koordinatni početak inercijalnog koordinatnog sistema $Oxyz$. Ponavljajući razmatranje dato izrazima (8.26) - (8.28) dolazi se do relacije

$$\vec{R}_{k(i)}\cdot\delta\vec{r}_{k(i)}=\sum_{\alpha=1}^{n}\left(\vec{R}_{k(i)}\cdot\vec{T}_{\alpha(i)}+\vec{M}_{C_i}\left(\vec{R}_{k(i)}\right)\cdot\vec{\Omega}_{\alpha(i)}\right)\delta q^{\alpha}=0\,. \tag{8.103}$$

Takođe, analogno razmatranju datim izrazima (8.29) - (8.31) dobija se (8.102) u obliku

$$\sum_{i=1}^{n}\left[\sum_{\alpha=1}^{n}\left(\vec{R}_{R(i)}\cdot\vec{T}_{\alpha(i)}+\vec{M}^{r}_{C_iR(i)}\cdot\vec{\Omega}_{\alpha(i)}\right)\right]\delta q^{\alpha}=0\,, \tag{8.104}$$

odnosno

$$\sum_{\alpha=1}^{n}\left[\sum_{i=1}^{n}\left(\vec{R}_{R(i)}\cdot\vec{T}_{\alpha(i)}+\vec{M}^{r}_{C_iR(i)}\cdot\vec{\Omega}_{\alpha(i)}\right)\right]\delta q^{\alpha}=0\,, \tag{8.105}$$

gde su glavni vektor i glavni moment, sistema reakcija veza (7.38) sračunat u odnosu na centar inercije segment (V_i), određeni izrazima

$$\begin{aligned}\vec{R}_{R(i)}&=\sum_{k=1}^{m_i}\vec{R}_{k(i)},\\ \vec{M}^{r}_{C_iR(i)}&=\sum_{k=1}^{m_i}\vec{M}_{C_i}\left(\vec{R}_{k(i)}\right).\end{aligned} \tag{8.106}$$

U slučaju RS u obliku otovrenog kinematičkog lanca bez grananja, sistem generalisanih koordinata $\left(q^1, q^2, \ldots, q^n\right)$ je nezavisan. Pošto važi (vidi (8.102))

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m_i}\vec{R}_{(i)k}\cdot\delta\vec{r}_{(i)k}=\sum_{\alpha=1}^{n}Q_{\alpha}^{r}\cdot\delta q^{\alpha}=0\,, \tag{8.107}$$

gde je Q_{α}^{r} generalisana sila od sistema reakcija veza

$$\left(\left(\vec{R}_{1(1)},\vec{R}_{2(1)},\ldots,\vec{R}_{m_1(1)}\right),\left(\vec{R}_{1(1)},\vec{R}_{2(1)},\ldots,\vec{R}_{m_2(1)}\right),\ldots,\left(\vec{R}_{1(1)},\vec{R}_{2(1)},\ldots,\vec{R}_{m_n(1)}\right)\right), \tag{8.108}$$

Upoređujući (8.107) i (8.105) i uzimajući u obzir nezavisnost koordinata $\left(q^1, q^2, \ldots, q^n\right)$ dobijamo

$$Q_{\alpha}^{r}=\sum_{i=1}^{n}\left(\vec{R}_{R(i)}\cdot\vec{T}_{\alpha(i)}+\vec{M}_{C_iR(i)}^{r}\cdot\vec{\Omega}_{\alpha(i)}\right)=0,\ \alpha=1,2,\ldots,n. \tag{8.109}$$

Poslednja relacija predstavlja princip idealnosti veza (RS) u obliku otvorenog kinematičkog lanca (sl. 8.5).