

УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ

МАШИНСКИ ФАКУЛТЕТ

Механика робота

ВЕЖБЕ - ДЕВЕТА НЕДЕЉА

Београд, 2023.

NR

Задатак 14: случај оријентације Хамилтон-Родригови параметри су задати у функцији Ојлерових углова, који услед кретања представљају функције времена:

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{\psi - \varphi}{2}\right) = f(\psi, \theta, \varphi) \\ \lambda_2 &= \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{\psi - \varphi}{2}\right) = f(\psi, \theta, \varphi), \quad \psi, \theta, \varphi = f(t) \\ \lambda_3 &= \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{\psi + \varphi}{2}\right) = f(\psi, \theta, \varphi)\end{aligned}$$

Њихов тотални извод по времену је:

$$\begin{aligned}\dot{q}^4 &= \dot{\lambda}_1 = \frac{\partial \lambda_1}{\partial \psi} \dot{\psi} + \frac{\partial \lambda_1}{\partial \theta} \dot{\theta} + \frac{\partial \lambda_1}{\partial \varphi} \dot{\varphi} \\ \dot{q}^5 &= \dot{\lambda}_2 = \frac{\partial \lambda_2}{\partial \psi} \dot{\psi} + \frac{\partial \lambda_2}{\partial \theta} \dot{\theta} + \frac{\partial \lambda_2}{\partial \varphi} \dot{\varphi} \\ \dot{q}^6 &= \dot{\lambda}_3 = \frac{\partial \lambda_3}{\partial \psi} \dot{\psi} + \frac{\partial \lambda_3}{\partial \theta} \dot{\theta} + \frac{\partial \lambda_3}{\partial \varphi} \dot{\varphi}\end{aligned}$$

што се може записати у матричном облику:

$$\begin{Bmatrix} \dot{\lambda}_1 \\ \dot{\lambda}_2 \\ \dot{\lambda}_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \lambda_1}{\partial \psi} & \frac{\partial \lambda_1}{\partial \theta} & \frac{\partial \lambda_1}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial \lambda_2}{\partial \psi} & \frac{\partial \lambda_2}{\partial \theta} & \frac{\partial \lambda_2}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial \lambda_3}{\partial \psi} & \frac{\partial \lambda_3}{\partial \theta} & \frac{\partial \lambda_3}{\partial \varphi} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\psi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\varphi} \end{Bmatrix} = [K] \begin{Bmatrix} \dot{\psi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\varphi} \end{Bmatrix}$$

Када се одреде парцијални изводи, матрица $[K]$ је:

$$[K] = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} s\left(\frac{\theta}{2}\right) s\left(\frac{\psi - \varphi}{2}\right) & \frac{1}{2} c\left(\frac{\theta}{2}\right) c\left(\frac{\psi - \varphi}{2}\right) & \frac{1}{2} s\left(\frac{\theta}{2}\right) s\left(\frac{\psi - \varphi}{2}\right) \\ \frac{1}{2} s\left(\frac{\theta}{2}\right) c\left(\frac{\psi - \varphi}{2}\right) & \frac{1}{2} c\left(\frac{\theta}{2}\right) s\left(\frac{\psi - \varphi}{2}\right) & -\frac{1}{2} s\left(\frac{\theta}{2}\right) c\left(\frac{\psi - \varphi}{2}\right) \\ \frac{1}{2} c\left(\frac{\theta}{2}\right) c\left(\frac{\psi + \varphi}{2}\right) & -\frac{1}{2} s\left(\frac{\theta}{2}\right) s\left(\frac{\psi + \varphi}{2}\right) & \frac{1}{2} c\left(\frac{\theta}{2}\right) c\left(\frac{\psi + \varphi}{2}\right) \end{bmatrix}$$

Матрица $[K]$ је увек несингуларна, тј. $\det [K] \neq 0$, дакле, увек постоји инверзна матрица $[K]^{-1}$!

С обзиром на то да матрица $[K]$ представља везу између првих извода по времену Хамилтон-Родригових параметара и Ојлерових углова,

а да за тражени Јакобијан трансформације важи:

$$\begin{Bmatrix} \dot{\lambda}_1 \\ \dot{\lambda}_2 \\ \dot{\lambda}_3 \end{Bmatrix} = [J_{II}] \begin{Bmatrix} \dot{q}^1 \\ \dot{q}^2 \\ \dot{q}^3 \end{Bmatrix}$$

потребно је одредити и матрицу која представља везу између извода по времену Ојлерових углова и извода по времену унутрашњих координата:

$$\begin{Bmatrix} \dot{\psi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\varphi} \end{Bmatrix} = [P] \begin{Bmatrix} \dot{q}^1 \\ \dot{q}^2 \\ \dot{q}^3 \end{Bmatrix}$$

након чега ће Јакобијан трансформације за случај оријентације бити одређен производом добијених матрица:

$$\begin{Bmatrix} \dot{\lambda}_1 \\ \dot{\lambda}_2 \\ \dot{\lambda}_3 \end{Bmatrix} = [K] \begin{Bmatrix} \dot{\psi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\varphi} \end{Bmatrix} = [K] [P] \begin{Bmatrix} \dot{q}^1 \\ \dot{q}^2 \\ \dot{q}^3 \end{Bmatrix} \Rightarrow [J_{II}] = [K] [P]$$

Дакле, потребно је прво да одредимо матрицу $[P]$.

Полазимо од израза за угаону брзину, која се може одредити у функцији генералисаних брзина (погледати Задатак 10):

$$\begin{aligned} \boxed{\vec{\omega}_i = \sum_{\alpha=1}^i \bar{\xi}_{\alpha} \vec{e}_{\alpha} \dot{q}^{\alpha}} &\Rightarrow \vec{\omega}_3^{(0)} = \left\{ \vec{e}_1^{(0)} \right\} \dot{q}^1 + \left\{ \vec{e}_2^{(0)} \right\} \dot{q}^2 + \left\{ \vec{e}_3^{(0)} \right\} \dot{q}^3 \\ &= \left[\vec{e}_1^{(0)} \mid \vec{e}_2^{(0)} \mid \vec{e}_3^{(0)} \right] \begin{Bmatrix} \dot{q}^1 \\ \dot{q}^2 \\ \dot{q}^3 \end{Bmatrix} = [E] \begin{Bmatrix} \dot{q}^1 \\ \dot{q}^2 \\ \dot{q}^3 \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

Јединичне векторе оса ротације можемо одредити на основу задатих матрица трансформације, на већ познат начин:

$$\vec{e}_1^{(1)} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \vec{e}_2^{(2)} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}, \vec{e}_3^{(3)} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

С обзиром на то да су јединични вектори одређени у односу на локалне координатне системе, извршићемо неопходне трансформације:

$$[E] = \left[[A_{0,1}] \left\{ \vec{e}_1^{(1)} \right\} \mid [A_{0,2}] \left\{ \vec{e}_2^{(2)} \right\} \mid [A_{0,3}] \left\{ \vec{e}_3^{(3)} \right\} \right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0,955 \\ 0 & 0,98 & 0,059 \\ 0 & 0,199 & -0,29 \end{bmatrix}$$

Дакле:

$$\begin{Bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{Bmatrix} = [E] \begin{Bmatrix} \dot{q}^1 \\ \dot{q}^2 \\ \dot{q}^3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0,955 \\ 0 & 0,98 & 0,059 \\ 0 & 0,199 & -0,29 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{q}^1 \\ \dot{q}^2 \\ \dot{q}^3 \end{Bmatrix} \quad (1)$$

Угаона брзина се такође може одредити на основу Ојлерових кинематских једначина:

$$\begin{aligned} \omega_x &= \dot{\theta} \cos \psi + \dot{\varphi} \sin \theta \sin \psi \\ \omega_y &= \dot{\theta} \sin \psi - \dot{\varphi} \sin \theta \cos \psi \\ \omega_z &= \dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta \end{aligned}$$

које се могу написати у матричном облику:

$$\begin{Bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \cos \psi & \sin \theta \sin \psi \\ 0 & \sin \psi & -\sin \theta \cos \psi \\ 1 & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\psi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\varphi} \end{Bmatrix} = [K_{OJL}] \begin{Bmatrix} \dot{\psi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\varphi} \end{Bmatrix} \quad (2)$$

С обзиром на то да су леве стране једначина (1) и (2) једнаке, можемо изједначити и десне стране:

$$[E] \begin{Bmatrix} \dot{q}^1 \\ \dot{q}^2 \\ \dot{q}^3 \end{Bmatrix} = [K_{OJL}] \begin{Bmatrix} \dot{\psi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\varphi} \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} \dot{\psi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\varphi} \end{Bmatrix} = [K_{OJL}]^{-1} [E] \begin{Bmatrix} \dot{q}^1 \\ \dot{q}^2 \\ \dot{q}^3 \end{Bmatrix}$$

Дакле, матрица $[P]$ је:

$$[P] = [K_{OJL}]^{-1} [E],$$

а Јакобијан трансформације за случај оријентације је:

$$[J_{II}] = [K] [P] = [K] [K_{OJL}]^{-1} [E].$$

На основу Ојлерових углова које смо одредили у Задатку 13, матрица $[K]$ је:

$$[K] = \begin{bmatrix} -0,074 & 0,421 & 0,074 \\ 0,146 & 0,214 & -0,146 \\ 0,472 & 0,002 & 0,472 \end{bmatrix}$$

а матрица $[K_{OJL}]^{-1}$ је:

$$\begin{aligned} [K_{OJL}]^{-1} &= \begin{bmatrix} -\sin \psi \operatorname{ctg} \theta & \cos \psi \cos \theta & 1 \\ \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ -\frac{\sin \psi}{\sin \theta} & -\frac{\cos \psi}{\sin \theta} & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -0,555 & 1,134 & 1 \\ 0,898 & -0,439 & 0 \\ -0,707 & -1,446 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Овде се може приметити да се јављају сингуларитети када је $\sin \theta = 0$, тј. када је $\theta = k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Коначно, Јакобијан трансформације за случај оријентације је:

$$\begin{aligned} [J_{\Pi}] &= [K] [K_{OJL}]^{-1} [E] \\ &= \begin{bmatrix} 0,4723 & -0,0221 & 0,4723 \\ 0,0075 & 0,4919 & -0,0075 \\ -0,1461 & -0,0714 & -0,1461 \end{bmatrix} \end{aligned}$$