(V) Биномни интеграл

- $\int x^m (a+bx^n)^p \, dx \;; \quad a,b \in \mathbb{R}, \; m,n,p \in \mathbb{Q}$

- **Т** Биномни интеграл је елементарно решив ако и само ако је бар један од бројева $p, \frac{m+1}{n}, \frac{m+1}{n}+p \in \mathbb{Z}$ (цео).

- 1. смена: $x^n = t$

  2. смена:
     1) $p \in \mathbb{Z}$: $t = s^k$, k најмањи именилац $\frac{m+1}{n}$
     2) $\frac{m+1}{n} \in \mathbb{Z}$: $a+bt = s^k$, k именилац p
     3) $\frac{m+1}{n} + p \in \mathbb{Z}$: $\frac{a+bt}{t} = s^k$, k именилац p

1. $I = \int x^{-11}(1+x^4)^{-1/2} dx \;; \quad a=1, b=1; \; m=-11, n=4, p=-\frac{1}{2}$

$p = -\frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$; $\frac{m+1}{n} = -\frac{5}{2} \in \mathbb{Z}$; $\frac{m+1}{n}+p = -3 \in \mathbb{Z}$

(не може 1)) (не може 2)) (може 3))

$\overset{Т}{\Rightarrow}$ I је елементарно решив

$$I = \left\{ \begin{array}{l} x^4 = t \Rightarrow x = t^{1/4} \\ dx = \frac{1}{4} t^{-3/4} dt \end{array} \right\} = \int (t^{1/4})^{-11} (1+t)^{-1/2} \cdot \frac{1}{4} t^{-3/4} dt =$$

$$= \frac{1}{4} \int t^{-7/2} (1+t)^{-1/2} dt = \frac{1}{4} \int t^{-4} \left(\frac{1+t}{t} \right)^{-1/2} dt = \left\{ \frac{1+t}{t} = s^2 \right.$$

$$\left. 1+t = s^2 t, \; s^2 t - t = 1, \; t = \frac{1}{s^2-1}, \Rightarrow dt = -\frac{2s}{(s^2-1)^2} ds \right\} =$$

$$= \frac{1}{4} \int (s^2-1)^{+4} \cancel{(s^2)^{-1/2}} \left(-\frac{2s}{(s^2-1)^2} ds \right) = -\frac{1}{2} \int (s^2-1)^2 ds =$$

$$= \frac{1}{2} \int (s^4 - 2s^2 + 1) ds = \frac{1}{2} \left(\frac{s^5}{5} - 2\frac{s^3}{3} + s \right) + C =$$

$$= \frac{1}{10}\left(\frac{1+t}{t}\right)^{5/2} - \frac{1}{3}\left(\frac{1+t}{t}\right)^{3/2} + \frac{1}{2}\left(\frac{1+t}{t}\right)^{1/2} + C$$

$$= \frac{1}{10}\left(\frac{1+x^4}{x^4}\right)^{5/2} - \frac{1}{3}\left(\frac{1+x^4}{x^4}\right)^{3/2} + \frac{1}{2}\left(\frac{1+x^4}{x^4}\right)^{1/2} + C$$

2. $I = \int \frac{dx}{\sqrt{x}(\sqrt[4]{x}+1)^{10}} = \int x^{-1/2}(1+x^{1/4})^{-10}$

$a=1,\ b=1;\ m=-\frac{1}{2},\ n=\frac{1}{4},\ p=-10.$

$p=-10 \in \mathbb{Z}$; $\frac{m+1}{n} = 2 \in \mathbb{Z}$; $\frac{m+1}{n} + p = -8 \in \mathbb{Z}$

(може 1)) (може 2)) (може 3))

$\overset{\text{Ч}}{\Rightarrow}$ I је елементарно решив

$$I = \left\{ \begin{aligned} x^{1/4} &= t \Rightarrow x = t^4 \\ dx &= 4t^3dt \end{aligned} \right\} = \int (t^4)^{-1/2}(1+t)^{-10} \cdot 4t^3 dt =$$

$$= 4\int \frac{t}{(1+t)^{10}}dt = \left\{ \begin{aligned} 1+t &= s \\ dt &= ds \end{aligned} \right\} = 4\int (s-1)\cdot s^{-10}ds =$$

(нема потребе за 2. смену, јер би гласила $t=s$)

$$= 4\int (s^{-9} - s^{-10})ds = 4\left(\frac{s^{-8}}{-8} - \frac{s^{-9}}{-9}\right) + C =$$

$$= -\frac{1}{2(1+t)^8} + \frac{4}{9(1+t)^9} + C = -\frac{1}{2(1+x^{1/4})^8} + \frac{4}{9(1+x^{1/4})^9} + C$$

3. $I = \int \frac{\sqrt{1+\sqrt[3]{x}}}{\sqrt[3]{x^2}}dx = \int x^{-2/3}(1+x^{1/3})^{1/2}dx$

$a=1,\ b=1;\ m=-\frac{2}{3},\ n=\frac{1}{3},\ p=\frac{1}{2}$

$p=\frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$; $\frac{m+1}{n} = 1 \in \mathbb{Z}$; $\frac{m+1}{n} + p = \frac{3}{2} \notin \mathbb{Z}$

(не може 1)) (може 2)) (не може 3))

$\overset{\text{Ч}}{\Rightarrow}$ I је елементарно решив.

$$I = \left\{ \begin{array}{l} x^{1/3} = t, \quad x = t^3 \\ dx = 3t^2 dt \end{array} \right\} = \int \cancel{(t^3)^{-2/3}} (1+t)^{1/2} \, 3\cancel{t^2} dt$$

$$= 3\int (1+t)^{1/2} dt = \left\{ \begin{array}{l} 1+t = s^2 \\ dt = 2s\,ds \end{array} \right\} = 3\int (s^2)^{1/2} \cdot 2s\,ds =$$

не мора да се уведе 2. смена, али овде како што угодите

$$= 6\int s^2 ds = 6\,\frac{s^3}{3} + C = 2\left((1+t)^{1/2}\right)^3 + C =$$

$$= 2\left(1 + x^{1/3}\right)^{3/2} + C$$