

Analitička mehanika

(i)

Uvod

U klasičnoj, Njutnovoj mehanici, onako kako je ona razvijena od strane Njutna, Ojlera i D'Alemberta i drugih velikana mehanike, osnovne veličine koje karakterišu stanje kretanja nekog mehaničkog sistema (količina kretanja, moment količine kretanja za pokretni i nepokretni pol), kao i veličine koje karakterišu dejstvo prinude na njib (sila, moment sile za pol), su vektorske veličine. Zbog toga se ova mehanika naziva još i vektorska mehanika. Analiza kretanja nekog mehaničkog sistema u njoj zato podrazumeva, s jedne strane, geometrijsku analizu samog sistema, a, s druge strane, postavljene matematičkih modela kretanja u odnosu na poznate koordinatne sisteme (najčešće Dekartov koordinatni sistem) u 3D-euklidskom prostoru.

Temelje analitičke mehanike postavio je Žozef duj Lagranž (1736 - 1813). On je u svom delu „Analitička mehanika“ (prvi put objavljenom 1788. god.) ponudio najbolji i sveobuhvatni tretman klasične mehanike do tada i dao osnov za razvoj matematičke fizike do danas. U analitičkoj mehanici veličine koje karakterišu stanje kretanja mehaničkog sistema i dejstvo prinude na njib su skalarne veličine, kao što su: kinetička energija, potencijalna energija sistema, Hamiltonova i Lagranževa funkcija, rad sile, generalisana sila. Osim toga, kretanje mehaničkog sistema se, zahvaljujući analitičkom tretmanu veža, u analitičkoj mehanici posmatra u višedimenzionalnim, apstraktnim prostorima generalisanih koordinata. ^{kao i primena} Primena generalisanih koordinata u analizi kretanja mehaničkih sistema, ^{kao i primena} osnovnim originalnog metoda zasnovanog na pojmu elementarno virtuelno pomeranje materijalnog sistema i pojmu elementarni virtuelni rad sile, omogućili su da se problem rešavanja kretanja materijalnog sistema odvoji od problema određivanja reakcija idealnih geometrijskih, stacionarnih zadržavajućih veža. Zbog svih ovih osobenosti u analitičkoj mehanici se gotovo da i ne vrši geometrijska analiza mehaničkog sistema, pa crteži nisu ni potrebni. Matematičke discipline na kojima bazira analitička mehanika su tenzorski račun, varijacioni račun itd.

① Elementarno stvarno pomeranje (ESP) slobodne tačke M

Pogledajmo se kretanje slobodne materijalne tačke M, a pod dejstvom poznatog sistema sila. U bilo kom trenutku t položaj M tačke, u odnosu na nepokretni Dekartov koordinatni sistem (DKS), $Oxyz$, određen je koordinatama:

$$x=x(t), y=y(t) \text{ i } z=z(t), \quad (1)$$

tako da je vektor položaja $\vec{r}=\vec{OM}$ u tom trenutku:

$$\vec{r}=\vec{OM}, \quad \vec{r}=\vec{r}(t)=x(t)\vec{i}+y(t)\vec{j}+z(t)\vec{k}. \quad (2)$$

Na intervalu vremena bilo koje beskonačno male dužine dt , $[t, t_1=t+dt]$, dolazi do pomeranja tačke iz položaja $M(x, y, z)$ u položaj $M_1(x_1, y_1, z_1)$ koji se nalazi u beskonačno maloj okolini položaja M, tako da su koordinate položaja M_1 :

$$x_1=x(t+dt) \approx x(t)+dx; y_1=y(t+dt) \approx y(t)+dy; z_1=z(t+dt) \approx z(t)+dz, \quad (3)$$

gde su: dx, dy i dz stvarne elementarne promene vrednosti koordinata položaja M tačke u trenutku t , a na posmatranom intervalu vremena $[t, t+dt]$

Vektor položaja $\vec{r}_1=\vec{r}(t+dt)$ tačke M u trenutku $t_1=t+dt$ je:

$$\vec{r}_1=\vec{r}(t+dt)=x(t+dt)\vec{i}+y(t+dt)\vec{j}+z(t+dt)\vec{k},$$

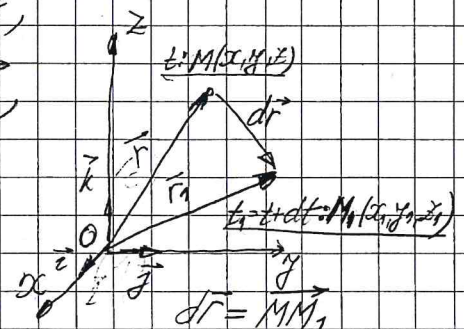
odnosno

$$\vec{r}(t+dt) \approx (x(t)+dx)\vec{i}+(y(t)+dy)\vec{j}+(z(t)+dz)\vec{k},$$

$$\text{tj. } \vec{r}(t+dt) \approx \vec{r}(t)+d\vec{r}, \quad (4)$$

gde je:

$$|d\vec{r}=dx\vec{i}+dy\vec{j}+dz\vec{k}| \quad (5)$$



vektor elementarnog stvarnog pomeranja tačke M pod dejstvom poznatog sistema sila, a na bilo kom intervalu vremena beskonačno male dužine dt .

Vektor elementarnog stvarnog pomeranja (ESP) tačke usklodu je sa diferencijalnom jednačinom kretanja tačke M:

$$m \frac{d(d\vec{r})}{dt^2} = \sum_i \vec{F}_i \quad (6)$$

Pojam EVP je opštiji od pojma ESP, s obzirom da se pri analizi EVP, u ovom slučaju tačke, ne uzima u obzir dejstvo sile na tačku. Zbog toga je ESP tačke jedno iz skupa svih mogućih EVP, tj. vektor ESP tačke, $d\vec{r}$, na intervalu vremena $[t, t+dt]$ pripada skupu svih mogućih vektora EVP, $\delta\vec{r}$, i jednak je jednom od njih:

$$|d\vec{r} \in \{\delta\vec{r}\} \text{ i } d\vec{r} = \delta\vec{r}.$$

Definicija: Operator δ , u matematičkom smislu, predstavlja operator sinhronog variranja, po su veličine: $\delta x, \delta y, \delta z, \delta\vec{r}$, sinhrono varijacije koordinata x, y, z i vektora položaja $\vec{r}$ u trenutku t . (sinhrono - istovremeno, u odnosu na isti trenutak t , pri $dt=0$ (vreme zamrznuto u trenutku t))

[Dodatak]

1. Sinhrona varijacija vektorske funkcije $\vec{r} = \vec{r}(t)$. - Ako je $\vec{r}$, kao i do sada vektor položaja tačke M u odnosu na pol O , tada hodograf vektorske funkcije:

$\vec{r} = \vec{r}(t)$, $t \geq 0$, predstavlja trajektoriju tačke M čija je konačna jednačina kretanja: upravo navedena funkcija $\vec{r} = \vec{r}(t)$. Ova trajektorija naziva se direktna, nevarirana, neporemećena trajektorija tačke. Linije koje se nalaze u ϵ okolini direktne trajektorije (puta), gde je ϵ neki parametar čija je apsolutna vrednost dovoljno mala, i reda istog kao red diferencijala vremena, dt , nazivaju se indirektne, varirane, poremećene trajektorije. Jednačine ovih linija imaju oblik dvoparameterskih funkcija:

$$|\vec{r}^* = \vec{r}^*(t, \epsilon)|$$

(a)

pri čemu se za različite vrednosti parametra ϵ u (a) dobijaju različite linije, tj. različite varirane trajektorije tačke M .

Za vrednost parametra ϵ , $\epsilon=0$, funkcija (a) daje funkciju nevarirane, neporemećene trajektorije, tj.:

(b)

$$|\vec{r}^*(t, \epsilon=0) = \vec{r}(t)|$$

Ako funkciju (a) razvijemo u Maklorenov red po parametru ϵ (u okolini vrednosti parametra ϵ , $\epsilon=0$) dobiće se:

$$\vec{r}^*(t, \epsilon) \approx \vec{r}^*(t, \epsilon=0) + \frac{\partial \vec{r}^*}{\partial \epsilon} \Big|_{\epsilon=0} \epsilon \Rightarrow |\vec{r}^*(t, \epsilon) \approx \vec{r}(t) + \epsilon \vec{\eta}(t)|, (c)$$

gde je: $\left(\frac{\partial \vec{r}^*}{\partial \epsilon}\right)_{\epsilon=0} = \vec{\eta}(t)$, neprekidna, diferencijabilna vektorska funkcija vremena.

Razlika vektora položaja $\vec{r}^* = \vec{r}^*(t, \epsilon)$ tačke M na variranoj trajektoriji koja u trenutku t zauzima položaj M^* i vektora položaja M

Elementarno virtualno pomeranje (EVP) slobodne tačke M

Neka je položaj M tačke u odnosu na DKS $Oxyz$, a u trenutku t određen koordinatama:

$$x = x(t), y = y(t) \text{ i } z = z(t)$$

Sa M^* označen je bilo koji virtualni (zamisljen) položaj tačke, u tom istom trenutku t , a koji se nalazi u beskonačno maloj okolini položaja M tačke. Koordinate položaja M^* u odnosu na DKS $Oxyz$ su:

$$x^* \approx x + \delta x, y^* \approx y + \delta y \text{ i } z^* \approx z + \delta z \quad (7)$$

Veličine $\delta x, \delta y, \delta z$ predstavljaju bilo kakve elementarne virtualne (zamisljene) priraštaje koordinata (x, y, z) položaja M tačke u trenutku t , respektivno.

Ove veličine su u slučaju slobodne tačke međusobno nezavisne. To znači da elementarna virtualna promena bilo koje od koordinata slobodne tačke u bilo kom trenutku neće izazvati virtualne promene preostale dve koordinate:

$$a \delta x + b \delta y + c \delta z = 0 \text{ akko } a = b = c \equiv 0$$

Pošto je promena koordinata, u ovom slučaju tačke, usko vezana za pojam kretanja, to se na bazi prethodno rečenog može zaključiti da slobodna tačka u 3D-euklidskom prostoru može da vrši 3 nezavisna kretanja (ova kretanja u DKS $Oxyz$ predstavljaju beskonačno male virtualne pomeranja tačke po koordinatnim linijama u položaju M)

Broj stepeni slobode slobodne tačke u 3D-euklidskom prostoru je 3, $n=3$, i jednak je broju nezavisnih kretanja tačke, odnosno, broju koordinata koje određuju njen položaj u odnosu na referentni koordinatni sistem. Vektor položaj virtualnog položaja M^* tačke u trenutku t , a u odnosu na pol O je:

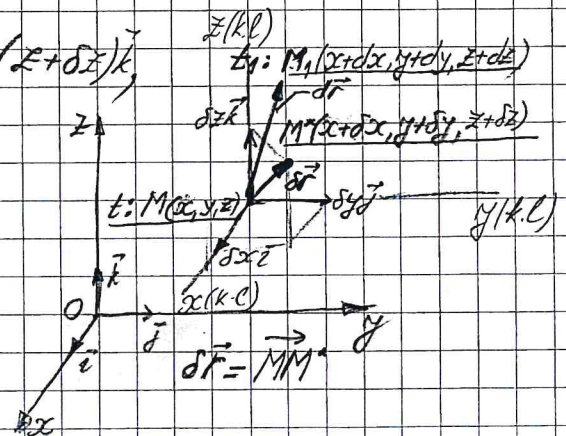
$$\vec{r}^* = x^* \vec{i} + y^* \vec{j} + z^* \vec{k}; \vec{r} \approx (x + \delta x) \vec{i} + (y + \delta y) \vec{j} + (z + \delta z) \vec{k}$$

$$\vec{r}^* \approx \vec{r}(t) + \delta \vec{r}, \quad (8)$$

gde je:

$$\delta \vec{r} = \delta x \vec{i} + \delta y \vec{j} + \delta z \vec{k} \quad (9)$$

vektor elementarnog virtualnog pomeranja (EVP) tačke u trenutku t (iz položaja M u virtualni položaj M^*).



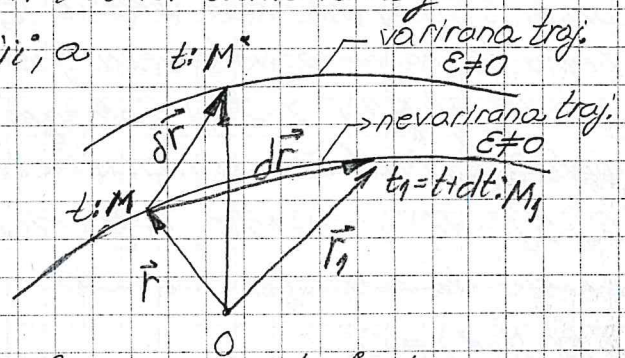
te tačke u istom trenutku t na nevariranoj trajektoriji, $\vec{r} = \vec{r}(t)$, predstavlja prvu sinhronu varijaciju, ili kraće sinhronu varijaciju, $\delta\vec{r}$, vektora $\vec{r}$ u posmatranom trenutku t , tj.:

$$[\delta\vec{r} \approx \vec{r}^*(t, \epsilon) - \vec{r}(t) \text{ i } \delta\vec{r} = \epsilon \vec{\eta}(t)] \quad (d)$$

Uvođenjem (d) u (c) dobija se vektor položaja tačke na variranoj trajektoriji u trenutku t u obliku:

$$\vec{r}^* \approx \vec{r}(t) + \delta\vec{r}.$$

Na slici je pored vektora $\delta\vec{r}$ prikazan i vektor elementarnog pomeranja tačke, $d\vec{r}$, po trajektoriji, a na intervalu vremena dt (iz položaja M tačke u trenutku t u položaj M_1 tačke na nevariranoj trajektoriji u trenutku $t_1 = t + dt$)



2. Sinhrona varijacija više promenljivih. - Neka je data funkcija više nezavisnih promenljivih $g_j, j=1, 2, \dots, n$

$$g = g(t, z_1, z_2, \dots, z_j, \dots, z_n), \quad (e)$$

pri čemu je

$$z_j = z_j(t), \quad j=1, 2, \dots, n$$

Ako funkcija (e) predstavlja nevariranu funkciju, onda u odnosu na nju varirana funkcija ima oblik:

$$g^* = g^*(t, z_1^*, \dots, z_j^*, \dots, z_n^*), \quad (f)$$

gde su: $z_j^* = z_j^*(t, \epsilon)$

varirane funkcije funkcija $z_j = z_j(t)$.

Kako je:

$$z_j^* \approx z_j + \delta z_j, \quad (\text{kao što je } \vec{r}^* \approx \vec{r} + \delta\vec{r})$$

gde su δz_j sinhrona varijacije funkcija $z_j = z_j(t)$ ($\delta z_j = \left(\frac{\partial z_j^*}{\partial \epsilon}\right) \epsilon$, tj. $\delta z_j = \epsilon \eta_j(t)$),

to: se varirana funkcija (f) može napisati u obliku

$$g^* = g^*(t, z_1 + \delta z_1, z_2 + \delta z_2, \dots, z_n + \delta z_n). \quad (g)$$

Tejlorov razvoj funkcije (g) u okolini vrednosti $z_1, z_2, \dots, z_n$ nezavisnih promenljivih, a s obzirom da je $z_j^* - z_j \approx \delta z_j$, glasi:

$$g^* \approx g(t, z_1, \dots, z_j, \dots, z_n) + \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial g^*}{\partial z_j} \right)_{z_j^*=z_j} \delta z_j, \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} \delta g \approx g^* - g \\ \delta g = \sum_{j=1}^n \frac{\partial g}{\partial z_j} \delta z_j \end{array} \right.$$

② ESP i EVP vezane tačke

(A) Kretanje tačke ograničeno geometrijskom stacionarnom
zadržavajućom vezom $f(x, y, z) = 0$

(A₁) ESP tačke na vezi $f(x, y, z) = 0$.

Veza čija je jednačina u DKS:

(10)

$$f(x, y, z) = 0,$$

predstavlja jednačinu površi po kojoj se kreće tačka M .

ESP tačke M povezi (10) je pomeranje tačke usled dejstva sile na nju, a tokom bilo kog intervala vremena $[t, t_1 = t + dt]$ beskonačno male dužine dt , pri čemu tačka ne napušta vezu (površ) (10). To znači da koordinate $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ položaja M tačke u trenutku t i koordinate položaja M_1 tačke u trenutku $t_1 = t + dt$:

$x_1 = x(t + dt) \approx x(t) + dx$, $y_1 = y(t + dt) \approx y(t) + dy$, $z_1 = z(t + dt) \approx z(t) + dz$, moraju da zadovolje jednačinu veze (10), tako da važi:

$$f(x, y, z) = 0$$

(11)

$$i f(x + dx, y + dy, z + dz) = 0$$

(12)

Takođe, kako se položaj M_1 tačke nalazi u beskonačno maloj okolini položaja M tačke, to se može, sa tačnošću do malih veličina prvog reda parametara položaja, usvojiti da se položaj M_1 nalazi u tangentnoj ravni Π na površ (10) a u tački M površi ($M, M_1 \in \Pi$). Posledica ove činjenice je i da vektor ESP tačke

$$d\vec{r} = \vec{MM}_1, d\vec{r} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k} \quad (d\vec{r} \approx \vec{r}(t + dt) - \vec{r}(t)) \quad (13)$$

$$\text{pripada ravni } \Pi, \text{ tj. : } d\vec{r} \in \Pi, \quad (14)$$

odnosno, da je vektor:

$$\text{grad } f = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{k}, \quad (15)$$

kao vektor u pravcu normale na površ u tački $M(x, y, z)$ površi, upravan na vektor ESP, $d\vec{r}$. Dakle, važi:

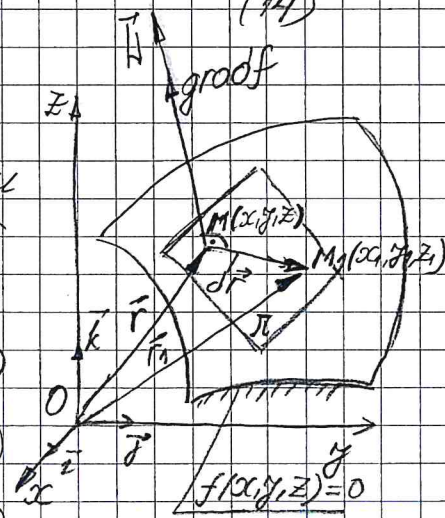
$$d\vec{r} \perp \text{grad } f \Rightarrow d\vec{r} \cdot \text{grad } f = 0, \quad (16)$$

$$\text{tj. } dx \frac{\partial f}{\partial x} + dy \frac{\partial f}{\partial y} + dz \frac{\partial f}{\partial z} = 0 \quad (17)$$

$$i \quad df = 0, \quad (18)$$

gde je: $df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz$ - totalni diferencijal funkcije

veze: $f = f(x, y, z)$, koji se može interpretirati kao elementarna (diferencijalna)



promena funkcije veze $f = f(x, y, z)$ u položaju M (trenutku t)
 tačke usled njenog pomeranja u položaj M_1 (trenutak $t_1 = t + dt$)

(A₂) EVP tačke po vezi $f(x, y, z) = 0$

Elementarno virtuelno pomeranje (EVP) tačke po vezi (10) je
 zamišljeno, vezom (10) dozvoljeno, beskonačno malo pomeranje
 tačke iz nekog položaja M koji ona zauzima na vezi (10) u
 trenutku t , u bilo koji drugi virtuelni (zamišljeni) položaj M^*
 koji se nalazi u beskonačno maloj okolini položaja M na vezi (10)
 i kome, takođe, odgovara trenutak t .

To znači da se pri analizi EVP tačke po bilo kojoj vezi, kao i pri
 analizi EVP slobodne tačke, tok vremena u uočnom trenutku t zausta-
 vija, $dt = 0$, a dejstvo sile na tačku ne uzima u obzir.

Pošto koordinate položaja $M(x, y, z)$ i koordinate, u odnosu na njega,
 zamišljenog položaja $M^*(x^*, y^*, z^*)$ moraju da zadovolje jednačinu (10):

$$f(x, y, z) = 0 \quad (20)$$

$$f(x^*, y^*, z^*) = 0 \Rightarrow f(x + \delta x, y + \delta y, z + \delta z) = 0, \quad (21)$$

i pošto se položaj M^* nalazi u beskonačno maloj okolini položaja M ,
 to sledi da se, sa tačnošću do malih veličina prvog reda parametara,
 položaja, može smatrati da položaji M i M^* pripadaju tangentnoj ravni
 π na površ u M : $M, M^* \in \pi$.

Vektor EVP tačke u trenutku t , $\delta \vec{r}$:

$$\delta \vec{r} = \vec{MM}^*, \quad \delta \vec{r} \approx \vec{r}^* - \vec{r}, \quad [\delta \vec{r} = \delta x \vec{i} + \delta y \vec{j} + \delta z \vec{k}], \quad (22)$$

pripada, takođe, ravni π ($\delta \vec{r} \in \pi$) i na
 njega je upravna vektor $\text{grad } f$ u M :

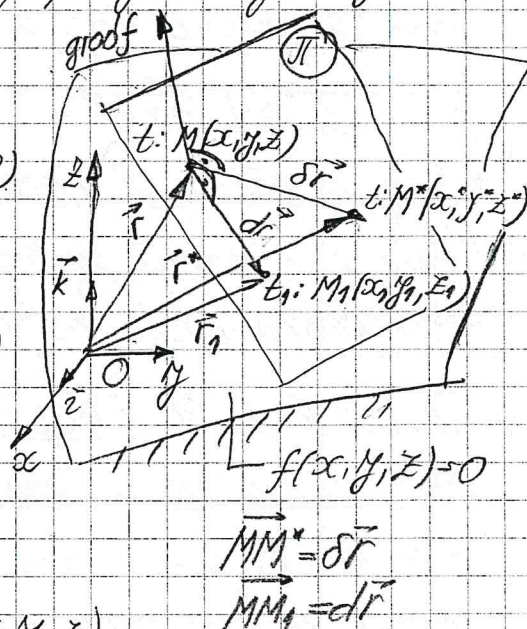
$$\delta \vec{r} \perp \text{grad } f \Rightarrow [\delta \vec{r} \cdot \text{grad } f = 0] \quad (23)$$

$$\text{tj.} : \frac{\partial f}{\partial x} \delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \delta y + \frac{\partial f}{\partial z} \delta z = 0 \quad (24)$$

$$\text{i } \delta f = 0, \quad (25)$$

$$\text{gde je: } \delta f = \frac{\partial f}{\partial x} \delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \delta y + \frac{\partial f}{\partial z} \delta z \quad (26)$$

sinhrona varijacija funkcije veze $f = f(x, y, z)$.



-7-

Sinhrona varijacija Neke funkcije $f=f(x,y,z)$ predstavlja, u mat. smislu, elementarnu virtualnu promenu te funkcije u bilo kom trenutku t , a u tački $M(x,y,z)$ te funkcije, nastale zbog elementarnog virtualnog priraštaja njenih koordinata $\delta x, \delta y$ i δz u posmatranom trenutku t .

Upoređivanjem izraza za totalni diferencijal (19) funkcije $f=f(x,y,z)$ sa izrazom za njenu sinhronu varijaciju (27) može se ustanoviti da se izraz (27) može dobiti iz (19) zamenom operatora d sa δ ($d \rightarrow \delta$), a za $dt=0$ (u uslovima zamrzavanja protoka vremena):

$$\delta f = df \Big|_{\substack{d \rightarrow \delta \\ dt=0}} \quad (28)$$

Takođe, pošto je prema (26), $\delta f=0$, tj. pošto je elementarna virtualna promena funkcije veze jednaka nuli, to važi (25).

Jednačina (25) pokazuje da elementarne virtualne promene koordinata tačke $M(x,y,z)$ u trenutku t , $\delta x, \delta y$ i δz , nisu, u slučaju EVP tačke po vezi, nezavisne. To znači da i kretanja ^{tačke} u pravcima osa Ox, Oy i Oz nisu nezavisna, jer se

EVP tačke u pravcu jedne od osa DKS $Oxyz$, može izraziti preko EVP u pravcima druge 2 ose, npr:

$$\delta z = -\frac{1}{\partial f / \partial z} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \delta y \right).$$

Broj nezavisnih kretanja tačke po vezi (10) je prema tome 2 i jednak je broju nezavisnih Dekartovih koordinata tačke na vezi ($f(x,y,z)=0 \Rightarrow z=g(x,y)$).

To znači da je i broj stepeni slobode tačke koja se kreće po geometrijskim zadržavajućim stacionarnim vezama, n , kao broj nezavisnih parametara koji određuju njen položaj u odnosu na referentni koordinatni sistem, jednak broju

-8-

nezavisnih kretanja te tačke (isto kao i u slučaju slobodne tačke).

Ako je broj veza tipa (10), l , jednak 2 ($l=2$) tada se mogu postaviti 2 jednačine tipa (25), pa tačka ima samo jedan stepen slobode, tj. EVP tačke u pravcu samo jedne od ose DKS $Oxyz$ je nezavisno:

$$\left. \begin{aligned} f_1(x,y,z)=0 &\Rightarrow \delta f_1=0 \Rightarrow \frac{\partial f_1}{\partial x} \delta x + \frac{\partial f_1}{\partial y} \delta y + \frac{\partial f_1}{\partial z} \delta z = 0 \\ f_2(x,y,z)=0 &\Rightarrow \delta f_2=0 \Rightarrow \frac{\partial f_2}{\partial x} \delta x + \frac{\partial f_2}{\partial y} \delta y + \frac{\partial f_2}{\partial z} \delta z = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow^{l=2}$$

$$\Rightarrow \delta z = g_1(\delta x) \text{ i } \delta y = g_2(\delta x)$$

Dakle, broj stepeni slobode tačke M u ovom slučaju je $N=1$, pa se s obzirom na razmatrane slučajeve ($l=1$ i $l=2$) može reći: broj stepeni slobode tačke čije je kretanje ograničeno geometrijskim slobodnarnim vezama iznosi:

$$N = 3 - l; \quad l \leq 2, \quad \text{gde je } l = \text{broj veza} \quad (29) \quad \text{EVP}$$

gde je l broj veza, tj. Broj zavisnih EVP tačke u pravcima, npr., osa DKS $Oxyz$.

Treba primetiti, takođe, i sledeće:

1.- ESP pomeranje tačke po vezi (10), $d\vec{r}$, takođe pripada ravni Π (vidi sliku), pa predstavlja jedno iz skupa svih mogućih EVP, $\delta\vec{r}$, tačke po vezi (10) $(d\vec{r} \in \delta\vec{r})$, $d\vec{r} = \delta\vec{r}$

2.- Reakcija idealno glatke površi (10), $\vec{N}$, ima pravac vektora grad f i data je izrazom:

$$\vec{N} = \lambda(t) \text{ grad } f,$$

$\lambda = \lambda(t)$ - Lagranžev množenitelj veze, tako da prema (24)

$$\text{važi: } \boxed{\vec{N} \cdot \delta\vec{r} = 0 \Rightarrow \vec{N} \perp \delta\vec{r}} \quad (30)$$

Ako površ (10) nije idealno glatka tada je reakcija veze:

$$\boxed{\vec{R} = \vec{F}_\mu + \vec{N}} \quad (31)$$

$$\text{pa je: } \boxed{\vec{R} \cdot \delta\vec{r} = \vec{F}_\mu \cdot \delta\vec{r} \neq 0} \quad (32)$$

B) Kretanje tačke ograničeno geometrijskom, nestacionarnom (reonomnom) zadržavajućom vezom (GRZ-veza); $f(x, y, z, t) = 0$. -

Geometrijska, reonomna zadržavajuća veza čija je jed. u DKS $Oxyz$ $f(x, y, z, t) = 0$, (33)
predstavlja jednačinu površi koja se kreće i/ili deformiše u vremenu.
Razlog za to leži u činjenici da funkcija veze $f = f(x, y, z, t)$ zavisi eksplicitno i od vremena, tako da veza () u svakom trenutku t iz posmatranog intervala vremena, predstavlja geometrijsko mesto tačaka prostora koje leže na nekoj drugoj površi prostora definisanog u odnosu DKS $Oxyz$. To znači da ako je ova veza u trenutku t određena jednačinom (33), onda će njena jednačina u trenutku $t_1 = t + dt$ biti: $f(x, y, z, t + dt) = 0$. (34)

B₁) Elementarno stvarno pomeranje (ESP) tačke na vezi $f(x, y, z, t) = 0$. -

Pri ESP tačke čije je kretanje ograničeno vezom (33) na intervalu vremena $[t, t_1 = t + dt]$, tačka pod dejstvom sile prelazi iz položaja $M(x, y, z)$ u trenutku t koji se nalazi na vezi čija jednačina () tako da važi:

$f(x, y, z, t) = 0$,
u položaj $M_1(x + dx, y + dy, z + dz)$ koji odgovara trenutku $t_1 = t + dt$ i čije koordinate zadovoljavaju jednačinu veze (34).

$$f(x + dx, y + dy, z + dz, t + dt) = 0.$$

Posledica postojnje dve jednačine je da je totalni diferencijal funkcije veze $f = f(x, y, z, t)$ u položaju M i trenutku t :

$df \approx f(x + dx, y + dy, z + dz, t + dt) - f(x, y, z, t)$ i $df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz + \frac{\partial f}{\partial t} dt$,
jednak nuli, tj. da važi:

$$df = 0 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz + \frac{\partial f}{\partial t} dt = 0$$

$$\text{odnosno: } \boxed{\text{grad } f \cdot d\vec{r} = -\frac{\partial f}{\partial t} dt} \quad (35)$$

gde je $d\vec{r} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$ vektor ESP pomeranja tačke na intervalu vremena $[t, t + dt]$. Jednačina (35) pokazuje da vektor ESP tačke, $d\vec{r}$, na intervalu $[t, t + dt]$ ne leži u ravni tangentnoj na površ u trenutku t , $f(x, y, z, t) = 0$, u tački $M(x, y, z)$ te površi ($\text{grad } f \cdot d\vec{r} \neq 0$, $d\vec{r} \notin \Pi$).

B₂) Elementarno virtuelno pomeranje (EVP) tačke na vezi $f(x, y, z, t) = 0$. -

Pri EVP tačke M čije je kretanje ograničeno vezom (33), tačka iz položaja $M(x, y, z)$ u trenutku t koji se nalazi na vezi:

$f(x, y, z, t) = 0$
prelazi u (odnosu na njeno) virtuelni položaj $M^*(x + \delta x, y + \delta y, z + \delta z)$ kame zbog toga, odgovara isti trenutak t i koji se, takođe, nalazi na površi (33) i tako da važi:

$$f(x+\delta x, y+\delta y, z+\delta z, t) = 0$$

Elementarna virtualna promena (sinhrona varijacija) funkcije veze $f = f(x, y, z, t)$ u trenutku t , (δf u trenutku t)

$$\delta f \approx f(x+\delta x, y+\delta y, z+\delta z, t) - f(x, y, z, t) \quad \text{i} \quad \text{grad } f$$

$$\delta f = df \Big|_{dt=0} = \frac{\partial f}{\partial x} \delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \delta y + \frac{\partial f}{\partial z} \delta z,$$

bide, u smislu poslednje dve jednačine, jednaka nuli:

$$\delta f = 0 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} \delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \delta y + \frac{\partial f}{\partial z} \delta z = 0$$

$$\text{odnosno: } \boxed{\text{grad } f \cdot \delta \vec{r} = 0} \quad (136)$$

gde je $\delta \vec{r} = \delta x \vec{i} + \delta y \vec{j} + \delta z \vec{k}$ vektor EVP tačke iz položaja $M(x, y, z)$ u trenutku t . Jednačina (136) pokazuje da je $\delta \vec{r} \perp \text{grad } f$, tj. da pripada tangentalnoj ravni na površ u trenutku t , a u tački $M(x, y, z)$ te površi.

Na osnovu jednačina (35) i (36), kao i slike, jasno je da ESP, $d\vec{r}$, u ovom slučaju nije iz skupa EVP, $\delta \vec{r}$, tj. da se vektor $d\vec{r}$ ne poklopa ni sa jednim vektorom $\delta \vec{r}$: $\boxed{d\vec{r} \notin \{\delta \vec{r}\}, d\vec{r} \neq \delta \vec{r}}$.

Napomena. - ESP tačke na vezi, $d\vec{r}$, i u slučaju A) i u slučaju B) zadovoljavaju diferencijalnu jednačinu kretanja tačke:

$$m \frac{d(d\vec{r})}{dt^2} = \vec{F} + \vec{R}, \quad (137)$$

gde je $\vec{F}$ rezultanta aktivnih sila koje deluju na tačku, a $\vec{R}$ reakcije odgovarajuće veze. Ako su veze (i pod A) i pod B)) glatke, reakcija veze je datom izrazom:

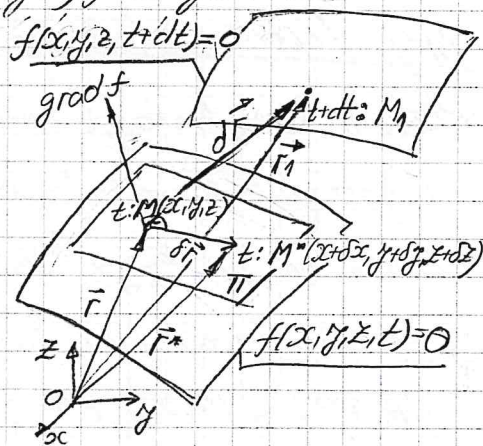
$$\vec{R} = \vec{N} = \lambda(t) \text{grad } f,$$

a ako razmatrane veze hrapave važi:

$$\vec{R} = \vec{N} + \vec{T} = \lambda(t) \text{grad } f - \mu N \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|},$$

gde je $\vec{v}$ - brzina tačke, pri čemu u oba slučaja (i A) i B)) za idealno glatke veze važi (31) i za realne (32).

Takođe, ESP tačke na vezi, $d\vec{r}$, pored diferencijalne jednačine kretanja tačke (137) u slučaju pod A) mora da zadovolji i vektorsku jednačinu (17) ($\text{grad } f \cdot d\vec{r} = 0$), a u slučaju pod B) jednačinu (35)



③ Slobodni materijalni sistem (SMS)

Broj stepeni slobode slobodnog materijalnog sistema SMS.

Pogledajmo se kretanje kretanje slobodnog materijalnog sistema (SMS)

N materijalnih tačaka $M_i, i=1, 2, \dots, N$, u 3D-euklidskom prostoru, a u odnosu na DKS Oxyz. Kako je položaj bilo koje tačke M_i SMS-a određen Dekartovim koordinatama (x_i, y_i, z_i) , to će položaj SMS-a biti određen sa N trojki koordinata (x_i, y_i, z_i) , tj. sa $3N$ međusobno nezavisnih parametara:

$$x_1, y_1, z_1, \dots, x_i, y_i, z_i, \dots, x_N, y_N, z_N. \quad (37)$$

To znači da je broj stepeni slobode SMS-a, n , kao broj međusobno nezavisnih parametara koji na jednoznačan način određuje položaj materijalnog sistema u odnosu na izabrani referentni koordinatni sistem:

$$n = 3N. \quad (38)$$

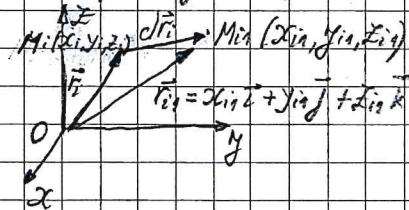
Elementarno stvarno pomeranje (ESP) slobodnog mat. sistema (SMS).

Tokom kretanja, SMS pod dejstvom aktivnih sila na bilo kom intervalu vremena $[t, t+dt]$ beskonačno male dužine dt , tačke M_i SMS-a premeštaju se iz položaja $M_i(x_i, y_i, z_i)$ u trenutku t u položaje $M_{i1}(x_{i1}, y_{i1}, z_{i1})$ u trenutku $t_1 = t + dt$, gde je:

$$x_{i1} = x_i(t+dt) \approx x_i(t) + dx_i \quad (39)$$

$$y_{i1} = y_i(t+dt) \approx y_i(t) + dy_i$$

$$z_{i1} = z_i(t+dt) \approx z_i(t) + dz_i, \quad i=1, 2, \dots, N$$



Dakle, svaka tačka M_i SMS na intervalu vremena $[t, t+dt]$ pod dejstvom sila izvrši ESP (vidi sliku)

$$d\vec{r}_i = dx_i\vec{i} + dy_i\vec{j} + dz_i\vec{k} \quad (40)$$

$$(d\vec{r}_i \approx \vec{r}_i(t+dt) - \vec{r}_i(t); d\vec{r}_i \approx \vec{r}_{i1} - \vec{r}_i)$$

Pod ESP slobodnog materijalnog sistema (SMS) podrazumeva se beskonačno malo pomeranje tog materijalnog sistema pod dejstvom aktivnih sila, a na bilo kom intervalu vremena beskonačno male dužine $[t, t+dt]$. Ovo pomeranje određeno je skupom ESP svih tačaka SMS, $M_i, i=1, \dots, N$:

$$d\vec{r}_i = \{dx_i, dy_i, dz_i\}, \quad i=1, \dots, N \quad (41)$$

koja su u skladu sa diferencijalnim jednačinama kretanja SMS: