

$$m_i \frac{d(\dot{\vec{r}}_i)}{dt^2} = \vec{F}_i, \quad i=1, \dots, N \quad (42)$$

Elementarno virtuelno pomeranje (EVP) SMS-a. - Posmatra se bilo

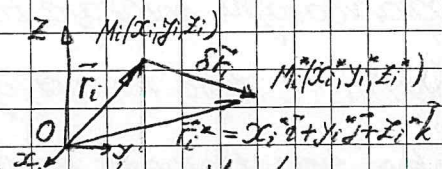
koji položaj SMS-a u 3D-euklidskom prostoru, tj. položaj SMS koji odgovara nekom, bilo kom, trenutku t . Položaji tačaka SMS u odnosu na DKS $Oxyz$, u posmatranom trenutku t su: $M_i(x_i, y_i, z_i)$, $i=1, \dots, N$. Iz ovih položaja tačke sistema mogu da, u uslovno zamrzavanja toka vremena ($dt=0$) i neuzimanja u obzir dejstvo sila na SMS, pređu u virtuelne (zamisljene) položaje $M_i^*(x_i^*, y_i^*, z_i^*)$ koji se nalaze u beskonačno malim okolinama položaja $M_i(x_i, y_i, z_i)$, respektivno. Kako su koordinate (x_i^*, y_i^*, z_i^*) virtuelnih položaja M_i^* tačaka SMS u trenutku t :

$$x_i^* \approx x_i + \delta x_i, \quad y_i^* \approx y_i + \delta y_i, \quad z_i^* \approx z_i + \delta z_i, \quad (43)$$

to su vektori njihovih elementarnih virtuelnih pomeranja (EVP) u tom trenutku:

$$\delta \vec{r}_i = \delta x_i \vec{i} + \delta y_i \vec{j} + \delta z_i \vec{k}, \quad (44)$$

$$(\delta \vec{r}_i \approx \vec{r}_i^* - \vec{r}_i) \quad (\text{vidi sliku})$$



Pod EVP slobodnog materijalnog sistema (SMS) u bilo kom trenutku t podrazumeva se bilo kakvo, zamisljeno, beskonačno malo sinhrono pomeranje tog materijalnog sistema iz položaja koji on zauzima u posmatranom trenutku t , u bilo koji drugi, virtuelni (zamisljeni) položaj koji nalazi u beskonačno maloj okolini položaja materijalnog sistema u trenutku t .

Pri EVP materijalnog sistema, generalno, tok vremena se zamrzava ($dt=0$) i ne uzimaju se u obzir sile koje deluju na taj materijalni sistem.

EVP slobodnog materijalnog sistema (SMS) u posmatranom trenutku t određeno je bilo kojim skupom EVP tačaka M_i tog SMS (44), tj.:

$$\delta \vec{r}_i = \{\delta x_i, \delta y_i, \delta z_i\}, \quad i=1, 2, \dots, N \quad (45)$$

Virtuelne (zamisljene) promene Dekartovi koordinate svih tačaka SMS u pravcima osa DKS $Oxyz$: $\delta x_i, \delta y_i, \delta z_i$, $i=1, \dots, N$, u trenutku t su međusobno nezavisne veličine, zato što su i veličine: x_i, y_i, z_i , $i=1, \dots, N$, kao koordinate SMS, takođe, međusobno nezavisne veličine, pa važi:

$$\sum_{i=1}^N a_i \delta x_i + b_i \delta y_i + c_i \delta z_i = 0 \quad \text{akko} \quad a_i = b_i = c_i \equiv 0$$

To dalje znači da SMS može da vrši $3N$ nezavisnih kretanja, pri čemu svako od tih kretanja predstavlja elementarnu virtuelnu promenu jedne, od $3N$ raspoloživih, Dekartovih koordinata.

Broj nezavisnih kretanja SMS jednak je, dakle, broju koordinata SMS, tj.

broju stepeni slobode n SMS: $n=3N$

ESP SMS: $d\vec{r}_i, i=1, 2, \dots, N$ na intervalu vremena $[t, t+dt]$ je jedno od

EVP SMS: $\delta\vec{r}_i, i=1, \dots, N$ u trenutku t , tako da se može pisati:

$$d\vec{r}_i \in \delta\vec{r}_i, \text{ i } d\vec{r}_i = \delta\vec{r}_i$$

④ Vezani materijalni sistem (VMS)

Broj stepeni slobode vezanog materijalnog sistema (VMS). -

Vezе su tela koja ograničavaju stanje kretanja materijalnog sistema (MS), tako što ograničavaju stanje kretanja, položaje i brzine kontaktnih tačaka MS i veza. Kao i u Njutnovoj, tako i analitičkoj mehanici biće posmatrane samo veze koje na direktan način ograničavaju položaje tačaka MS, a na indirektan način i njihove brzine i koje ne menjaju svoju formu u vremenu, pri čemu MS tokom svog kretanja ne napušta (ne narušava) te veze. Takve veze se nazivaju geometrijske stacionarne, zadržavajuće veze (GSZ-veze). Ako se kretanje MS posmatra, u odnosu na DKS Oxyz, tada te veze, u analitičkom smislu, imaju formu jednačina koje moraju da zadovolje Dekartove koordinate kontaktnih tačaka MS i veza, a u opštem, teorijskom, smislu sve Dekartove koordinate svih tačaka MS: $x_i, y_i, z_i, i=1, \dots, N$. Imajući u vidu da su i spoljašnje i unutrašnje veze istog tipa, tj. GSZ-veze, kao i da se mehanički modeli nekih od tih veza, mogu opisati sa više jednačina (sferni zglob, cilindrični zglob), pretpostavlja se da je ukupan broj jednačina ^{veza} koje moraju da zadovolje $3N$ parametara x_i, y_i i z_i jednak ℓ . Ove jednačine veza su:

$$f_v(x_1, y_1, z_1, \dots, x_i, y_i, z_i, \dots, x_N, y_N, z_N) = 0,$$

odnosno

$$f_v(x_i, y_i, z_i) = 0, \quad v=1, 2, \dots, \ell; \quad i=1, 2, \dots, N. \quad (46)$$

gde je v indeks jednačine ^{veza} $f_v = f_v(x_i, y_i, z_i)$ funkcija v -te

jednačine veze.

U matematičkom smislu jednačine (46) predstavljaju sistem ℓ jednačina po $3N$ parametara $x_i, y_i, z_i, i=1, 2, \dots, N$, kao nepoznatih veličina. Ako je rang odgovarajuće Jakobijevе matrice sistema ⁽⁴⁶⁾ jednak ℓ iz njega je moguće odrediti ℓ Dekartovih koordinata u funkciji preostalih $3N-\ell$ ovih parametara. To znači da je od $3N$ Dekartovih koordinata, upravo, $3N-\ell$ nezavisnih, tako da je pomoću njih, a s obzirom na jednačine veza (46), moguće odrediti položaj MS u odnosu na referenti DKS $Oxyz$, pa je broj stepeni slobode VMS:

$$n = 3N - \ell. \quad (47)$$

Skup od n koordinata VMS kao skup n odgovarajućih Dekartovih koordinata pojedinih tačaka VMS nije uvek prirodan za opisivanje kretanja tog MS. Zbog toga se umesto njih, a pomoću odgovarajućih generaliziranih transformacija koordinata, za koordinate VMS usvoje skup novih n međusobno nezavisnih parametara, tzv. generalisanih koordinata:

$$q_1, q_2, \dots, q_j, \dots, q_n.$$

(48)

Pomoću ^{pomenutih} n jednačina generalisanih transformacije koordinata i ℓ jednačina veza (46) moguće je ^{svih} Dekartove koordinate svih tačaka sistema izraziti preko uvedenih generalisanih koordinata MS, $q_j, j=1, 2, \dots, n$:

$$x_i = x_i(q_j), y_i = y_i(q_j), z_i = z_i(q_j) \quad (49)$$

pa su i vektori položaja ^{svih} $\vec{r}_i$ tačaka sistema, takođe funkcijom n međusobno nezavisnih parametara:

$$\vec{r}_i = x_i(q_j) \vec{i} + y_i(q_j) \vec{j} + z_i(q_j) \vec{k}, (\vec{r}_i = \vec{OM}_i) \quad (50)$$

$$\boxed{q_j | \vec{r}_i = \vec{r}_i(q_j)} \quad (51)$$

Zamnom, pak, (49) u jednačine veza (46), te jednačine postaju identički zadovoljene:

$$f_i[x_i(q_j), y_i(q_j), z_i(q_j)] \equiv 0, \quad (52)$$

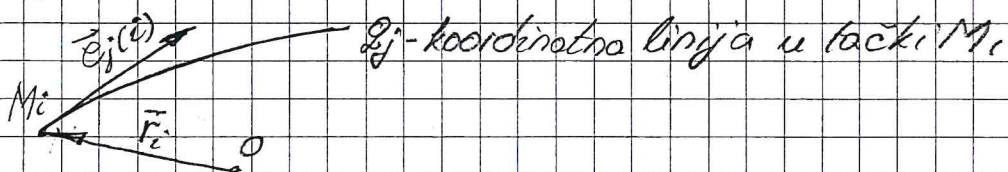
Prostor n generalisanih koordinata q_j nije, zbog svoje mehanike, u opštem slučaju euklidski prostor, već tzv. n dimenzionalni Rimanov prostor. Taj prostor sadrži sve oblike i položaje VMS i predstavlja konfiguracioni prostor MS. Koordinatne linije generalisanih koordinata $(q_j, j=1, 2, \dots, n)$ u tačkama M_i tog prostora, čiji su vektori položaja $\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_j)$, su krive linije. n vektora u tački M_i

$$\left\{ \vec{e}_j(i) = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}; \quad \vec{e}_j(i) = \vec{e}_j(i)(q_1, q_2, \dots, q_n) \right\} \quad (53)$$

$i=1, 2, \dots, H, \quad j, k=1, 2, \dots, n$

imaju pravce tangentni na odgovarajuće koordinatne linije $q_j, j=1, 2, \dots, n$ u tački M_i i određuju bazu koordinatnog sistema generalisanih koordinata $q_j, j=1, \dots, n$ u tački M_i .

Vektori $\vec{e}_j(i), j=1, 2, \dots, n$ u tački M_i su nezavisni, a u opštem slučaju nisu jedinični, niti su međusobno ortogonalni.



Elementarno stvarno pomeranje (ESP) vezanog materijalnog sistema (VMS)

Tokom kretanja VMS, a pod dejstvom aktivnih sila i reakcija veza (46), jednačine veza (46) mogu biti zadovoljene u svakom trenutku t vremena.

Pod elementarnim stvarnim pomeranjem (ESP) vezanog materijalnog sistema (VMS) podrazumeva se elementarno (beskonačno malo) pomeranje tog MS na bilo kom intervalu vremena $[t, t_1 = t + dt]$ beskonačno male dužine dt po vezama (46), a koje se realizuje pod dejstvom aktivnih sila i reakcija veza. Ovo pomeranje, kao i u slučaju SMS, određeno

je skupom ESP svih tačaka M_i mat. sistema: $d\vec{r}_i, i=1,2,\dots,N$.

Dalje će biti razmotrena dva načina zadržavanja ESP VMS, a zatim - s obzirom na mogućih zadržavanja kretanja ovih MS.

1) U slučaju kada se kretanje VMS posmatra u odnosu na DKS Oxyz i kada je kretanje tog MS određeno sa 3N funkcija:

$$x_i = x_i(t), y_i = y_i(t), z_i = z_i(t), i=1,2,\dots,N, \quad (54)$$

ESP, $d\vec{r}_i$, bilo koje tačke M_i na intervalu vremena $[t, t_1 = t + dt]$ predstavlja vektor pomeranja te tačke iz položaja $M_i(x_i = x_i(t), y_i = y_i(t), z_i = z_i(t))$ u trenutku t , u njen položaj

$M_{i1}(x_{i1} = x_i(t) + dx_i, y_{i1} = y_i(t) + dy_i, z_{i1} = z_i(t) + dz_i)$ u trenutku

$t_1 = t + dt$, tako da je:

$$d\vec{r}_i = dx_i \vec{i} + dy_i \vec{j} + dz_i \vec{k}, i=1,2,\dots,N \quad (55)$$

Pošto položaji M_i tačaka MS u trenutku t i njihovi položaji

M_{i1} u trenutku $t_1 = t + dt$ moraju biti na vezama (46), to koordinate ovih položaja moraju da zadovolje skoleće sisteme jednačina:

$$t: f_v(x_i, y_i, z_i) = 0 \quad (56)$$

$$t_1 = t + dt: f_v(x_i + dx_i, y_i + dy_i, z_i + dz_i) = 0, v=1,2,\dots,\ell \quad (57)$$

Posledica ova dva sistema jednačina je da su elementarne promene funkcija veza $f_v = f_v(x_i, y_i, z_i)$, df_v , na intervalu vremena $[t, t + dt]$ jednake nuli:

$$df_v(x_i, y_i, z_i) = 0, \quad (58)$$

$$\sum_{i=1}^N \frac{\partial f_v}{\partial x_i} dx_i + \frac{\partial f_v}{\partial y_i} dy_i + \frac{\partial f_v}{\partial z_i} dz_i = 0, v=1,2,\dots,\ell \quad (59)$$

gde df_v predstavlja totalni diferencijal funkcije f_v koja zavisi od 3N promenljivih x_i, y_i i $z_i, i=1, \dots, N$ i gde su dx_i, dy_i i dz_i diferencijalni (elementarni) priraštaji koordinata položaja M_i tačaka MS u trenutku t za interval vremena dt .

Ako se uvede operator gradijenta funkcije $f_v = f_v(x_i, y_i, z_i)$ u tački

$$M_i: \text{grad}_i f_v = \frac{\partial f_v}{\partial x_i} \vec{i} + \frac{\partial f_v}{\partial y_i} \vec{j} + \frac{\partial f_v}{\partial z_i} \vec{k}, \quad (60)$$

to se jednačine (59) mogu napisati u obliku:

$$\boxed{\sum_{i=1}^N \text{grad}_i f_v \cdot d\vec{r}_i = 0,} \quad (61)$$

tj. u obliku:

$$\sum_{i=1}^N \text{grad}_i f_v \cdot \vec{v}_i = 0, \quad (d\vec{r}_i = \vec{v}_i dt) \quad (62)$$

gde su: $\vec{v}_i = \dot{x}_i \vec{i} + \dot{y}_i \vec{j} + \dot{z}_i \vec{k}$ brzine tačaka M_i VMS u DKS Oxyz.

2) U slučaju kada se kretanje VMS posmatra u prostoru generalisanih koordinata q_j , $j=1,2,\dots,n$ za koje su jednačine veza identički zadovoljene, konačne jednačine kretanja tog MS biće:

$$q_j = q_j(t), \quad j=1,2,\dots,n \quad (63)$$

Vodeći računa o (49) i (51), elementarne promene dx_i, dy_i i dz_i , tek koordinata $x_i = x_i(t), y_i = y_i(t)$ i $z_i = z_i(t)$, kao i vektoru ESP tačaka MS, $d\vec{r}_i$, na intervalu vremena $[t, t+dt]$, biće:

$$dx_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial x_i}{\partial q_j} dq_j, \quad dy_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial y_i}{\partial q_j} dq_j, \quad dz_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial z_i}{\partial q_j} dq_j, \quad (64)$$

$$d\vec{r}_i = \sum_j \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} dq_j \Rightarrow \boxed{d\vec{r}_i = \sum_{j=1}^n dq_j \vec{C}_{ji}(i) = dq_1 \vec{C}_{1i}(i) + \dots + dq_j \vec{C}_{ji}(i) + \dots + dq_n \vec{C}_{ni}(i)} \quad (65)$$

gde su: prema ():

$$\boxed{\vec{C}_{ji}(i) = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \vec{i} + \frac{\partial y_i}{\partial q_j} \vec{j} + \frac{\partial z_i}{\partial q_j} \vec{k}.} \quad (66)$$

$$\boxed{\vec{C}_{jk}(i) = \vec{C}_{j(i)}(q_k)}, \quad j,k=1,2,\dots,n, \quad i=1,2,\dots,N \quad (67)$$

Na osnovu (65) može se zaključiti da je ESP vezanog MS na intervalu vremena $[t, t_1 = t+dt]$ određeno generalisanim koordinatama $q_j = q_j(t)$ i diferencijalnim priraštajima vrednosti tih generalisanih koordinata na posmatranom intervalu vremena:

$$dq_j \approx q_j(t+dt) - q_j(t), \quad j=1,2,\dots,n. \quad (68)$$

Brzine $\vec{v}_i$ tačaka M_i mat. sistema u trenutku t , prema (65), biće:

$$\boxed{\vec{v}_i = \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \sum_{j=1}^n \dot{q}_j \vec{C}_{ji}(i) = \dot{q}_1 \vec{C}_{1i}(i) + \dot{q}_2 \vec{C}_{2i}(i) + \dots + \dot{q}_j \vec{C}_{ji}(i) + \dots + \dot{q}_n \vec{C}_{ni}(i)} \quad (69)$$

što znači biće funkcije n generalisanih koordinata q_j i n generalisanih brzina $\dot{q}_j = \frac{dq_j}{dt}$, tj.:

$$\boxed{\vec{v}_i = \vec{v}_i(q_j, \dot{q}_j)} \quad (69)$$

ESP materijalnog sistema čije je kretanje ograničeno vezama (46), kao sveukupnost ESP njegovih tačaka, $d\vec{r}_i$, $i=1,2,\dots,N$, pored sistema od N dif. jednačina kretanja tačaka sistema:

$$\boxed{m_i \frac{d^2 \vec{r}_i}{dt^2} = \vec{F}_i^a + \vec{R}_i}, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (70)$$

gde je $\vec{F}_i^a$ rezultanta aktivnih sila koja deluje na tačku M_i , a $\vec{R}_i$ rezultanta reakcija veza (i spoljašnjih i unutrašnjih) (46), mora da zadovolji i 1 jednačina (61) ($\sum_{i=1}^N \text{grad}_i f_i \cdot d\vec{r}_i = 0$). Treba, takođe, napomenuti da su jednačine (61) i ukoliko se problem kretanja VMS rešava u konfiguracionom prostoru MS, tj. u ^{prostoru} generalisanim koordinatama $q_j, j=1, 2, \dots, n$, identički zadovoljene, s obzirom na činjenicu da su tada i jednačine veza (46) identički zadovoljene, tj. da tada važi (52). Međutim, ukoliko se problem kretanja VMS rešava u prostoru 3H Dekartovih koordinata $x_i, y_i, z_i, i=1, 2, \dots, N$, jednačine (61), tj. jednačine samih veza (46), se moraju prirediti diferencijalnim jednačinama kretanja tog MS (70).

Elementarno virtuelno pomeranje (EVP) vezanog materijalnog sistema

Pod EVP VMS podrazumeva se bilo kakvo, zamišljeno, vezama (46) dozvoljeno, beskonačno malo ^(sinhrono) pomeranje MS iz nekog položaja koji on, u trenutku t , zauzima na vezama, u bilo koji drugi, u odnosu na njega, virtuelni (zamišljeni) položaj tog MS koji se nalazi na vezama, a u beskonačno maloj okolini prethodno uočenog položaja i kome, prema tome, takođe odgovara trenutak t .

Pri analizi EVP VMS, kao i pri analizi EVP SMS, tok vremena se zaustavlja ($dt=0$), ne uzima se u razmatranje dejstvo sila na posmatrani MS. EVP posmatranog VMS određeno je bilo kojim skupom EVP svih njegovih tačaka $M_i, d\vec{r}_i, i=1, 2, \dots, N$, u posmatranom trenutku t , a koji je u skladu sa vezama (46).

Dalje će, kao i pri analizi ESP VMS, biti razmatrana dva načina zadavanja EVP VMS.

- 1) U slučaju kada se kretanje VMS posmatra u odnosu na DKS Dvuz-EVP bilo koje njegove tačke M_i , kao pomeranje te tačke iz

položaja $M_i(x_i=y_i(t), y_i=y_i(t), z_i=z_i(t))$ u trenutku t , u virtualni položaj $M_i^*(x_i^*=x_i(t)+\delta x_i, y_i^*=y_i(t)+\delta y_i, z_i^*=z_i(t)+\delta z_i)$ kome odgovara isti trenutak t , biće u DKS $Oxyz$ određeno beskonačno malim, proizvoljnim, virtualnim priroštajima Dekartovih koordinata položaja M_i ; $\delta x_i, \delta y_i$ i δz_i , tj.:

$$\delta \vec{r}_i = \delta x_i \vec{i} + \delta y_i \vec{j} + \delta z_i \vec{k}. \quad (71)$$

Međutim, zbog toga što se položaji M_i i M_i^* moraju nalaziti na vezama, tj. njihove koordinate moraju zadovoljiti jednačine veza (46)

$$M_i: f_v(x_i, y_i, z_i) = 0, \quad (72)$$

$$M_i^*: f_v(x_i + \delta x_i, y_i + \delta y_i, z_i + \delta z_i) = 0, \quad v=1, 2, \dots, \ell \quad (73)$$

3H veličina $\delta x_i, \delta y_i, \delta z_i$ koje određuju elementarna virtualna pomeranja tačaka M_i ^(iz položaja M_i) pravcima osa DKS $Oxyz$, neće biti nezavisne veličine. Jednačine kojim ove veličine moraju da zadovolje posledica su jednačina (72) i (73), a izražavaju činjenicu da je elementarna virtualna promena svake od funkcija veza $f_v = f_v(x_i, y_i, z_i)$ nastala zbog elementarnih virtualnih priroštaja koordinata tačaka M_i u položajima $M_i(x_i, y_i, z_i)$ jednaka nuli, tj.:

$$\delta f_v = 0, \quad v=1, 2, \dots, \ell \quad (74)$$

Kako, u matematičkom smislu, elementarna virtualna promena δf_v funkcije $f_v = f_v(x_i, y_i, z_i)$, predstavlja sinhronu varijaciju te funkcije, to ona glasi:

$$\delta f_v = \sum_{i=1}^H \frac{\partial f_v}{\partial x_i} \delta x_i + \frac{\partial f_v}{\partial y_i} \delta y_i + \frac{\partial f_v}{\partial z_i} \delta z_i, \quad (\delta f_v = df_v \Big|_{dt=0}) \quad (75)$$

pa se jednačine (74) mogu napisati u obliku:

$$\sum_{i=1}^H \frac{\partial f_v}{\partial x_i} \delta x_i + \frac{\partial f_v}{\partial y_i} \delta y_i + \frac{\partial f_v}{\partial z_i} \delta z_i = 0, \quad (76)$$

odnosno, u obliku

$$\left[\sum_{i=1}^H \text{grad}_i f_v \cdot \delta \vec{r}_i \right] = 0, \quad v=1, 2, \dots, \ell \quad (77)$$

Sistem jednačina (76) ukazuje na činjenicu da 3H sinhronih varijacija $\delta x_i, \delta y_i, \delta z_i, i=1, \dots, H$, koordinata položaja $M_i(x_i, y_i, z_i)$ tačaka M_i u trenutku t , kao 3H elementarnih, virtualnih, proizvoljnih promena,

Dekartovik koordinate tačka VMS u trenutku t , nije nezavisno. Pošto je broj jednačina sistema jednačina (76) jednak broju jednačina veza (46), l , to je broj nezavisnih elementarnih virtuelnih promena Dekartovik koordinate tačka VMS u trenutku t jednak:

$$n = 3N - l. \quad (78)$$

Ovaj broj, kao što je rečeno, predstavlja broj nezavisnih kretanja MS po vezama u 3D-euklidskom prostoru i jednak je broju međusobno nezavisnih Dekartovik koordinate tačka MS koji na jednoznačan način određuju položaj MS na vezama (46), a. u odnosu na DKS Oduz, tj. jednak je broju stepeni slobode razmatranog VMS.

Takođe, upoređujući sistem jednačina (77) za EVP VMS sa odgovarajućim sistemom jednačina (61) za ESP VMS, možemo primetiti da su one istog tipa, pošto je EVP, generalno gledano, opšiji pojam od ESP materijalnog sistema, sledi, kao i za SMS da je ESP VMS: $d\vec{r}_i, i=1..N$, jedno iz skupa svih mogućih EVP tog sistema: $\delta\vec{r}_i, i=1..N$:

$$|d\vec{r}_i \in \{\delta\vec{r}_i\}| \text{ i } |d\vec{r}_i = \delta\vec{r}_i| \quad (79)$$

(idealne)

Reakcija v -te geometrijske specifične ne-zadržavajuće veze (bez obzira da li je unutrašnja ili spoljašnja) na tačku M_i je data izrazom: $\vec{R}_v(i) = \vec{N}_v(i)$

$$|\vec{R}_v(i)| = \lambda_v(t) \text{ grad}_i f_v, \quad (80)$$

gde je $\lambda_v = \lambda_v(t)$ - Lagranžev množitelj veze v -te veze. Rezultanta reakcije svih ^{idealnih} veza koje deluju na tačku M_i je:

$$|\vec{N}_i| = \sum_{v=1}^l \vec{N}_v(i) = \sum_{v=1}^l \lambda_v \cdot \text{grad}_i f_v \quad (81)$$

$$\vec{N}_i = \vec{N}_i^{u.v} + \vec{N}_i^{s.v}, \quad (82)$$

gde je: $\vec{N}_i^{u.v}$ - rezultanta reakcija ^{idealnih} unutrašnjih veza koje deluju na tačku M_i

$\vec{N}_i^{s.v}$ - rezultanta reakcija ^{idealnih} spoljašnjih veza koje deluju na M_i .

Može se pokazati da važi:

$$\sum_{i=1}^N \vec{R}_i \cdot \delta \vec{r}_i = 0$$

(83)

Naime, prema (83) je:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \vec{R}_i \cdot \delta \vec{r}_i &= \sum_{i=1}^N \left(\sum_{v=1}^c \lambda_v \text{grad}_i f_v \right) \cdot \delta \vec{r}_i = \sum_{i=1}^N \sum_{v=1}^c \lambda_v \text{grad}_i f_v \cdot \delta \vec{r}_i = \\ &= \sum_{v=1}^c \sum_{i=1}^N \lambda_v \text{grad}_i f_v \cdot \delta \vec{r}_i = \sum_{v=1}^c \lambda_v(t) \sum_{i=1}^N \text{grad}_i f_v \cdot \delta \vec{r}_i \end{aligned}$$

Kako je $\sum_{i=1}^N \text{grad}_i f_v \cdot \delta \vec{r}_i = 0$ prema (7), to poslednji izraz ima vrednost nula, čime je relacija (83) dokazano.

Ako su samo unutrašnje geometrijske, stacionarne zadržavajuće veze idealne, tada važi: $\vec{R}_i^{u,v} = \vec{N}_i^{u,v}$ i $\vec{R}_i^{s,v} \neq \vec{N}_i^{s,v}$, pa je:

$$\sum_{i=1}^N \vec{N}_i^{u,v} \cdot \delta \vec{r}_i = 0, \text{ i } \sum_{i=1}^N \vec{R}_i^{s,v} \cdot \delta \vec{r}_i \neq 0 \quad (84)$$

a. Ako su samo spoljašnje geometrijske zadržavajuće veze idealne, onda je: $\vec{R}_i^{s,v} = \vec{N}_i^{s,v}$ i $\vec{R}_i^{u,v} \neq \vec{N}_i^{u,v}$, pa je:

$$\sum_{i=1}^N \vec{N}_i^{s,v} \cdot \delta \vec{r}_i = 0 \text{ i } \sum_{i=1}^N \vec{R}_i^{u,v} \cdot \delta \vec{r}_i \neq 0 \quad (85)$$

2) U slučaju kada se krećanje VMS posmatra u konfiguracionom prostoru generalisanih koordinata $Q_j, j=1, 2, \dots, n$, položaj ovog MS na vezama u trenutku t biće određen vrednostima generalisanih koordinata: $Q_j = Q_j(t), j=1, 2, \dots, n$, dok će vektori položaja M_i tačako, MS u tom trenutku biti određeni pomoću (51) i kao:

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i(Q_j) \quad (86)$$

Virtuelni (zamisljeni) položaj VMS u trenutku t , u posmatranom konfiguracionom prostoru, koji se nalazi u beskonačno maloj okolini prethodno uvedenog položaja MS, biće sada određen vrednostima generalisanih koordinata:

$$Q_j^* = Q_j(t) + \delta Q_j, \quad j=1, 2, \dots, n \quad (87)$$

gde su $\delta Q_j, j=1, \dots, n$, elementarne, proizvoljne, virtuelne promene vrednosti generalisanih koordinata Q_j u trenutku t , tj. je o sinhrono varijacije vrednosti generalisanih koordinata u trenutku t , $Q_j = Q_j(t)$.

Veličine δq_j su međusobno nezavisne, s obzirom da su i parametri $q_j, j=1, 2, \dots, n$, kao generalisane koordinate MS, takođe, međusobno nezavisni. To znači da je linearna forma po veličinama δq_j jednaka nuli, ako i samo ako su koeficijenti te linearne forme identički jednaki nuli, tj.:

$$\left[\sum_{j=1}^n A_j \delta q_j = 0 \right] \text{ akko } A_j \equiv 0, j=1, 2, \dots, n \quad (88)$$

Vektori virtuelnih (zamisljenih) položaja M_i^* tačaka MS u ovoj virtuelnoj konfiguraciji su određeni vrednostima generalisanih koordinata q_j^* , pa važi:

$$\vec{r}_i^* = \vec{r}_i(q_j^*) \Rightarrow \vec{r}_j^* = \vec{r}_i(q_j + \delta q_j), \quad (89)$$

Vektori EVP tačaka MS u trenutku t određeni su izrazima:

$$\delta \vec{r}_i \approx \vec{r}_i^* - \vec{r}_i \Rightarrow \delta \vec{r}_i \approx \vec{r}_i(q_j + \delta q_j) - \vec{r}_i(q_j), \quad (90)$$

gde su $\delta \vec{r}_i$ istovremeno i sinhronne varijacije vektorskih funkcija onih nezavisnih promenljivih, $\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_j)$, tako da važi:

$$\left[\delta \vec{r}_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j \right] \quad (\delta \vec{r}_i = d\vec{r}_i / dt = 0), \quad (91)$$

$$\text{odnosno } \left[\delta \vec{r}_i = \sum_{j=1}^n \delta q_j \vec{e}_{j(i)}(q_k) \right]. \quad (92)$$

Iz (91), odnosno (92) sledi da su vektori EVP tačaka MS u trenutku t , $\delta \vec{r}_i$, u konfiguracionom prostoru određeni kao linearne forme elementarnih virtuelnih priraštaja δq_j vrednosti generalisanih koordinata $q_j = q_j(t)$, pri čemu su koeficijenti tih formi bazi vektori $\vec{e}_{j(i)}$ koordinatnih sistema generalisanih koordinata konstruisanih u tačkama M_i tog MS, kao tačkama uvedenog konfiguracionog prostora. Vektori EVP tačaka MS (91), odnosno (92) ^{u prostoru gen. koor. $q_j, j=1, \dots, n$} identički zadovoljavaju relacije (77), a s obzirom na činjenicu su jednačine veza (46) u generalisanim koordinatama $q_j, j=1, \dots, n$, kao međusobno nezavisnim parametrima, identički zadovoljene. (za njih važi (52))

Neka osnovna svojstva dvostruke sume proizvoda veličina
 $A_j, j=1..n$ i $B_k, k=1..n$, $\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n A_j B_k$

Dvostruka suma $\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n A_j B_k$ predstavlja sumu proizvoda veličina A_j i B_k , tj. sumu veličina $A_j \cdot B_k$ za sve moguće vrednosti indeksa $j=1, 2, \dots, n$ i indeksa $k=1, 2, \dots, n$. Sume u veličini $\sum_j \sum_k A_j B_k$ su:
 $\sum_{k=1}^n$ - unutrašnja suma i; $\sum_{j=1}^n$ - spoljašnja suma. Veličina $\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n A_j B_k$ je bezindeksna veličina, jer je sumiranje po svim vrednostima indeksa spoljašnje i unutrašnje sume, j i k .

Dvostruko sumiranje se može obaviti tako što izvršimo sabiranje svih članova koji su rezultat množenja svakog člana spoljašnje sume: $A_1, A_2, \dots, A_j, \dots, A_n$ sa sumom unutrašnjih članova $B_k, \sum_{k=1}^n B_k$:

$$\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n A_j B_k = A_1 \sum_{k=1}^n B_k + A_2 \sum_{k=1}^n B_k + \dots + A_j \sum_{k=1}^n B_k + \dots + A_n \sum_{k=1}^n B_k \quad (a)$$

Kako je a) može napisati u obliku:

$$\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n A_j B_k = \sum_{j=1}^n \left[A_j \sum_{k=1}^n B_k \right] = \sum_{j=1}^n A_j \sum_{k=1}^n B_k \quad (b)$$

to se može zaključiti da se članovi spoljašnje sume $A_j, j=1..n$ ponašaju kao "konstante" za unutrašnju sumu, tj. važi zakon distribucije članova spoljašnje sume preme unutrašnjoj sumi:

Takođe, pošto $\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n A_j B_k$ prema (a) sadrži sumu svih članova $A_j B_k$ za sve vrednosti indeksa $j=1..n$ i $k=1..n$, to se na nju može primeniti i zakon distribucije članova unutrašnje sume $B_1, B_2, \dots, B_n$ prema spoljašnjoj sumi članova A_j , tj. prema $\sum_{j=1}^n A_j$, tako da važi:

$$\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n A_j B_k = B_1 \sum_{j=1}^n A_j + B_2 \sum_{j=1}^n A_j + \dots + B_k \sum_{j=1}^n A_j + \dots + B_n \sum_{j=1}^n A_j,$$

odnosno

$$\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n A_j B_k = \sum_{k=1}^n \left[B_k \sum_{j=1}^n A_j \right] = \sum_{k=1}^n B_k \sum_{j=1}^n A_j \quad (c)$$

Izraz na desnoj strani relacije (c) u kome je sada spoljašnja suma po indeksu k , a unutrašnja po j , glasi dalje:

pa (c) dobija oblik:

$$\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n A_j B_k = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n A_j B_k \quad \begin{array}{l} \text{pravilo komutacije} \\ \text{za spoljašnju i} \\ \text{unutrašnju sumu} \end{array} \quad (e)$$

Rad sile na EVP pomicanju VMS. Generalisane sile

Neka VMS čije je kretanje ograničeno geometrijskim stacionarnim, zadržavajućim vezama i čija je konfiguracija određena generalisanim koordinatama: $z_1, \dots, z_j, \dots, z_n$, izvrši u nekom trenutku EVP:

$$\delta \vec{r}_i = \sum_{j=1}^n \delta z_j \vec{e}_{j(i)}, \quad \vec{e}_{j(i)} = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial z_j} \vec{i} + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial \dot{z}_j} \vec{j} + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial z_j} \vec{k}, \quad i=1, 2, \dots, N. \quad (93)$$

Ako na tačku M_i posmatranog MS deluje sila:

$$\vec{F}_{ri} = \vec{F}_{ri}(t, z_j, \dot{z}_j) \quad \text{ i } \quad \vec{F}_{ri} = X_{ri}(t, z_j, \dot{z}_j) \vec{i} + Y_{ri}(t, z_j, \dot{z}_j) \vec{j} + Z_{ri}(t, z_j, \dot{z}_j) \vec{k}, \quad (94)$$

onda će elementarni virtuelni rad (EVR) sile $\vec{F}_{ri}$, kao rad te sile na EVP tački M_i u kojoj deluje, $\delta \vec{r}_i$, biti određen skalarnim proizvodom sile $\vec{F}_{ri}$ i EVP tačke M_i $\delta \vec{r}_i$:

$$\delta' A_i \stackrel{\text{def}}{=} \vec{F}_{ri} \cdot \delta \vec{r}_i. \quad (95)$$

Zamenom izraza za $\delta \vec{r}_i = \sum_{j=1}^n \delta z_j \vec{e}_{j(i)}$ u (95), EVR, $\delta' A_i$, dobija oblik:

$$\delta' A_i = \vec{F}_{ri} \cdot \sum_{j=1}^n \delta z_j \vec{e}_{j(i)} = \sum_{j=1}^n (\vec{F}_{ri} \cdot \vec{e}_{j(i)}) \delta z_j,$$

odnosno:

$$\delta' A_i = \sum_{j=1}^n Q_{j(i)} \delta z_j = Q_{1(i)} \delta z_1 + \dots + Q_{j(i)} \delta z_j + \dots + Q_{n(i)} \delta z_n, \quad (96)$$

gde jc:

$$Q_{j(i)} = \sum_{j=1}^n \vec{F}_{ri} \cdot \vec{e}_{j(i)} \quad (97)$$

Prema (96) vidi se da EVR sile $\vec{F}_{ri}$ u konfiguracionom prostoru predstavlja linearnu formu EV promena gen. koordinata, δz_j , nastalih pri EVP tački M_i u konfiguracionom prostoru. Koficijenti te forme su skalarné veličine $Q_{j(i)}$. Ove veličine date su izrazima (97), a svaka od njih se naziva generalisana sila po koordinati z_j za tačku M_i . Prema (97) svaka od generalisanih sila $Q_{j(i)}$ određena je skalarnim proizvodom sile u tački M_i , $\vec{F}_{ri}$, i baznog vektora $\vec{e}_{j(i)}$ KS generalisanih koordinata u tački M_i , a koji odgovara gen. koordinati z_j . Naziv „generalisane sile“ za veličine $Q_{j(i)}$ potiče od toga što dimenzija te „sile“ zavisi od dimenzije gen. koordinate u odnosu na koju se ona odnosi:

- veličina $Q_j(i)$ ima dimenziju sile ukoliko generalisana koordinata q_j predstavlja linearno pomeranje
- veličina $Q_j(i)$ ima dimenziju momenta sile ukoliko ^{je} gen. koordinata q_j ugao npr.

Ako su sile $\vec{F}_i$ i vektori $\vec{e}_j(i)$ dati u DKS $Oxyz$ izraz (37) dobija oblik:

$$Q_j(i) = X_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j} + Y_i \frac{\partial y_i}{\partial q_j} + Z_i \frac{\partial z_i}{\partial q_j}.$$

Napomena. - EVR sile $\vec{F}_i$, $\delta'A_i$, ima formu elementarnog rada sile $\vec{F}_i$ na ESP tačke, M_i , $d\vec{r}_i = \sum_j dq_j \vec{e}_j(i)$:

$$\delta A_i = \vec{F}_i \cdot d\vec{r}_i \Rightarrow \delta A_i = \vec{F}_i \cdot \sum_{j=1}^n dq_j \vec{e}_j(i) = \sum_{j=1}^n (\vec{F}_i \cdot \vec{e}_j(i)) dq_j,$$

$$\boxed{\delta A_i = \sum_j Q_j(i) dq_j.} \quad (98)$$

Zbog toga se može pisati:

$$\boxed{\delta'A_i = (\delta A_i)_{(dq_j \rightarrow \delta q_j)} \quad (99)}$$

a veličine $Q_j(i)$ se mogu odrediti kao koeficijenti u izrazu za elementarni stvarni rad sile $\vec{F}_i$ kojima se množe elementarne stvarne promene gen. koordinata, dq_j , na intervalu vremena $[t, t+dt]$. Ovo važi za MS čije su veze GSŽ-veze.

Duma ^{svih} EVR sila $\vec{F}_i$, $i=1, 2, \dots, N$ koje deluje na posmatra-

ni MS:

$$\delta'A \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^N \delta A_i \Rightarrow \delta'A = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot \delta\vec{r}_i \quad (100)$$

predstavlja EVR svih sila na EVP materijalnog sistema

Dalje je:

$$\delta'A = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot \delta\vec{r}_i,$$

odnosno

$$\delta'A = \sum_{i=1}^N \left(\sum_{j=1}^n Q_j(i) \delta q_j \right) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^n Q_j(i) \delta q_j = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^N Q_j(i) \delta q_j$$

$$\delta'A = \sum_{j=1}^n \delta q_j \sum_{i=1}^N Q_j(i)$$

pa je konačno:

$$\boxed{\delta'A = \sum_{j=1}^n Q_j \delta q_j} \quad \delta'A = Q_1 \delta q_1 + Q_2 \delta q_2 + \dots + Q_n \delta q_n \quad (101)$$

$$\text{gde je: } \boxed{Q_j = \sum_{i=1}^N Q_j(i)} \quad Q_j = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot \vec{e}_j(i) \quad (102)$$

Prema (101) EVR svih sila koje deluju „u i na“ MS, $\delta'A$, ima istu formu kao EVR sila koje deluju na tačku M_i , $\delta'A_i$, tj. oblik linearne forme $\sum_{j=1}^n Q_j \delta z_j$, $j=1, 2, \dots, n$ nastalih pri EVP materijalnog sistema. Koeffijenti te linearne forme su veličine Q_j date izrazima (102). One predstavljaju ukupne generalisane sile po odgovarajućim generalisanim koordinatama z_j , $j=1, \dots, n$ (izraz (102)), ili kraće, generalisane sile Q_j po generalisanim koordinatama z_j , $j=1, \dots, n$. Ove veličine se mogu odrediti ili pomoću (102) ili kao koeffijente linearne forme po δz_j u izrazu za $\delta'A$, (101). Pošto su veze MS GSŽ-veze, veličine Q_j su istovremeno i koeffijenti u izrazu za elementarni stvarni svih sila koje deluju „u i na“ MS:

$$\delta'A = \sum_{i=1}^N \delta'A_i = \sum_{i=1}^N \left(\sum_{j=1}^n Q_j \tilde{r}_{ij} \right) \delta z_j \Rightarrow \boxed{\delta'A = \sum_{j=1}^n Q_j \delta z_j} \quad (103)$$

$$i \quad \delta'A = (\delta'A) \delta \vec{r}_i \rightarrow \delta \vec{r}_i, \quad \text{za MS čije kretanje} \quad (104)$$

$\delta z_j \rightarrow \delta z_j$ ograničeno GSŽ-vezama

Pri izračunavanju ukupnog EVR, $\delta'A$, treba imati u vidu da se svaka od sila $\vec{F}_{ri}$ može razložiti na:

$\vec{F}_{ri}$ rezultantu aktivnih sila - $\vec{F}_{ri}^a$
 $\vec{F}_{ri}$ rezultantu reakcija unutrašnjih i spoljašnjih veza $\vec{R}_i$, tj.

$$\vec{F}_{ri} = \vec{F}_{ri}^a + \vec{R}_i \quad (105)$$

gde je: $\vec{R}_i = \vec{R}_i^{u.v} + \vec{R}_i^{s.p}$
 $\vec{R}_i^{u.v}$ - rezultanta reakcija unutrašnjih veza u tački M_i

$\vec{R}_i^{s.v}$ - rezultanta reakcija spoljašnjih veza u tački M_i ,

tako da važi:

$$\vec{F}_{ri} = \vec{F}_{ri}^a + \vec{R}_i = \vec{F}_{ri}^a + \vec{R}_i^{u.v} + \vec{R}_i^{s.v} \quad (106)$$

Ovo ima za posledicu da se i ukupni EVR sila, $\delta'A$, može dati u obliku:

$$\delta'A = \delta'A^a + \delta'A^{s.v} + \delta'A^{u.v}, \quad (107)$$

gde je:

$$\delta'A^a = \sum_j Q_j^a \delta z_j, \quad Q_j^a = \sum_{i=1}^N \vec{F}_{ri}^a \cdot \vec{e}_j(i) \quad (108)$$

$$\delta'A^{s.v} = \sum_j Q_j^{s.v} \delta z_j, \quad Q_j^{s.v} = \sum_{i=1}^N \vec{R}_i^{s.v} \cdot \vec{e}_j(i) \quad (109)$$

$$i \quad \delta A^{u,v} = \sum_{j=1}^n Q_j^{u,v} \delta q_j, \quad Q_j^{u,v} = \sum_{i=1}^N \vec{R}_i^{u,v} \cdot \vec{e}_j(i) \quad (110)$$

$\delta A^a, \delta A^{s,v}, \delta A^{u,v}$ - ukupni EVR aktivnih sila, spoljašnjih i unutrašnjih reakcija veza koje deluju na MS, respektivo

$Q_j^a, Q_j^{s,v}, Q_j^{u,v}$ - generalisane aktivne sile, generalisane reakcije spoljnih veza i generalisane reakcije unutrašnjih veza po gen. koordinatama q_j , respektivno

Ukupne generalisane sile po gen. koordinatama su, prema prethodnom:

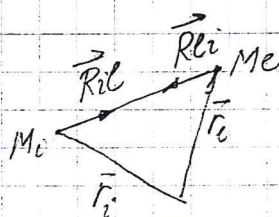
$$Q_j = Q_j^a + Q_j^{s,v} + Q_j^{u,v} \quad (111)$$

Napomena. -

$$\delta A^{u,v} = \sum_{i=1}^N \vec{R}_i^{u,v} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{l=1}^N \vec{R}_{il} \cdot \delta \vec{r}_i + \vec{R}_{li} \cdot \delta \vec{r}_l, \quad (112)$$

pa je

$$Q_j^{u,v} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{l=1}^N \vec{R}_{il} \cdot \vec{e}_j(i) + \vec{R}_{li} \cdot \vec{e}_j(l), \quad (113)$$



gde su $\vec{R}_{il}$ i $\vec{R}_{li}$ unutrašnje reakcije veze između tačaka M_i i M_e materijalnog sile ($\vec{R}_{il}$ - sila kojom tačka M_e posredstvom unutrašnje veze deluje na tačku M_i i $\vec{R}_{li}$ - sila kojom tačku M_i posredstvom unutrašnje veze deluje na tačku M_e). Za sile $\vec{R}_{il}$ i $\vec{R}_{li}$ važi princip akcije i reakcije, tj.

$$\vec{R}_{li} = -\vec{R}_{il} \quad (114)$$

Idealne veze. - Ako sa M označimo tačku materijalnog sistema u kojoj deluje reakcija neke idealne spoljašnje veze: $\vec{R} = \vec{H}$, tada je EVR te reakcije:

$$|\delta A(\vec{H}) = \vec{H} \cdot \delta \vec{r} = 0| \quad (115)$$

što znači da je reakcija $\vec{H}$ takve veze upravna na EVP $\delta \vec{r}$ tačke M .

Ako je unutrašnja veza između tačaka M_i i M_e materijalnog sistema, idealna, tada je $\vec{R}_{il} = \vec{H}_{il}$ reakcija te veze u tački M_i , a $\vec{R}_{li} = \vec{H}_{li}$, $\vec{H}_{li} = -\vec{H}_{il}$, reakcija te veze u tački M_e , pa važi:

$$|\delta A(\vec{H}_{il}, \vec{H}_{li}) = \vec{H}_{il} \cdot \delta \vec{r}_i + \vec{H}_{li} \cdot \delta \vec{r}_l = 0|, \quad (116)$$

pri čemu je u opštem slučaju $\delta A(\vec{H}_{il}) = \vec{H}_{il} \cdot \delta \vec{r}_i \neq 0$

Ako su sve spoljašnje i sve unutrašnje veze idealne veze, a materijalni sistem neizmenljiv (u mehaničkom modelu materijalnog sistema nema elastičnih elemenata (opruga)), tada, prema (83), važi da je EVR reakcija svih spoljašnjih i unutrašnjih veza jednak nuli, tj.:

$$|\delta A^{s,v} = \sum_{i=1}^N \vec{H}_i^{s,v} \cdot \delta \vec{r}_i = 0, \quad \delta A^{u,v} = \sum_{i=1}^N \vec{H}_i^{u,v} \cdot \delta \vec{r}_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{l=1}^N (\vec{H}_{ij} \cdot \delta \vec{r}_i + \vec{H}_{ji} \cdot \delta \vec{r}_j) = 0| \quad (117)$$

(118)

To znači da je ukupni EVR svih reakcija veza koje deluju

na "i" i "u" MS, $\delta A^{R.V}$, jednak nuli, tj.:

$$\delta A^{R.V} = \delta A^{S.V} + \delta A^{U.V} = 0 \quad i \quad \boxed{\delta A^{R.V} = \sum_{i=1}^N \vec{H}_i \cdot \delta \vec{r}_i = 0}, \quad (119)$$

$$\text{gde je: } \vec{H}_i = \vec{R}_i = \vec{N}_i^{S.V} + \vec{N}_i^{U.V} \Rightarrow \boxed{\vec{H}_i = \vec{N}_i^{S.V} + \sum_{k=1}^N \vec{N}_{ik}^{U.V}, \vec{N}_{ii} = 0} \quad (119')$$

S druge strane, s obzirom na izraze (109) i (110) važi:

$$\delta A^{R.V} = \sum_{j=1}^n Q_j^{S.V} \delta z_j + \sum_{j=1}^n Q_j^{U.V} \delta z_j = \sum_{j=1}^n (Q_j^{S.V} + Q_j^{U.V}) \delta z_j,$$

odnosno

$$\delta A^{R.V} = \sum_{j=1}^n Q_j^{R.V} \delta z_j, \quad (120)$$

gde je:

$$Q_j^{R.V} = Q_j^{S.V} + Q_j^{U.V}, \quad (121)$$

Kombinujući izraze (109), (110) i (120) za $\delta A^{S.V}$, $\delta A^{U.V}$ i

$\delta A^{R.V}$ sa jednačinama (117), (118) i (119) sledi:

$$\sum_{j=1}^n Q_j^{S.V} \delta z_j = 0 \quad (122)$$

$$\sum_{j=1}^n Q_j^{U.V} \delta z_j = 0 \quad (123)$$

$$\sum_{j=1}^n Q_j^{R.V} \delta z_j = 0 \quad (124)$$

Kako leva strana svake od jed. (122), (123) i (124) predstavlja linearnu formu po međusobno nezavisnim elementarnim virtuelnim promenama gen. koordinata, δz_j , to će one, s obzirom na (88) biti zadovoljene, ako su svi koeficijenti u svakoj od njih jednaki nuli, tako da važi:

$$Q_j^{S.V} = 0 \quad (125)$$

$$Q_j^{U.V} = 0 \quad (126)$$

$$Q_j^{R.V} = Q_j^{S.V} + Q_j^{U.V} = 0 \quad (127)$$

Ovo ima za posledicu da su ukupne generalisane sile Q_j , date sa (111) jednake samo generalisanim aktivnim silama:

$$Q_j = Q_j^a. \quad (128)$$

Takođe, prema (80) sledi da su rezultante $\vec{R}_i = \vec{H}_i$

sistema reakcije veza u tački M_i , $i=1..N$, u ovom slučaju, a s obzirom na jednačine veza (46), date u DKS $Oxyz$, izrazimo:

$$\vec{R}_i = \vec{H}_i = \sum_{v=1}^L \alpha_v \text{grad}_i f_v.$$

Realne veze. -

U slučaju kada je neka od veza MS-a realna, onda se reakcija te veze može razložiti na dve, međusobno upravne, komponente: normalnu komponentu i „sila trenja“.

T. Neka u tački M materijalnog sistema deluje reakcija $\vec{R}$ neke realne spoljašnje veze:

$$\vec{R} = \vec{N} + \vec{T}, \quad (129)$$

gde je $\vec{T}$ sila trenja, EVR sile $\vec{R}$ biće:

$$\delta'A(\vec{R}) = \vec{R} \cdot \delta\vec{r} = \vec{N} \cdot \delta\vec{r} + \vec{T} \cdot \delta\vec{r}, \quad (130)$$

gde je:

$$\delta'A(\vec{N}) = \vec{N} \cdot \delta\vec{r} = 0 \text{ i } \delta'A(\vec{T}) = \vec{T} \cdot \delta\vec{r} \neq 0,$$

pa je EVR sile $\vec{R}$ različit od nule i jednak EVR sile trenja $\vec{T}$, tj.:

$$\delta'A(\vec{R}) = \delta'A(\vec{T}) = \vec{T} \cdot \delta\vec{r} \neq 0 \quad (131)$$

Ako je unutrašnja veza između tačaka M_i i M_e materijalnog sistema realna, tada su reakcije ove veze u tački M_i i M_e :

$$\vec{R}_{ie} = \vec{N}_{ie} + \vec{T}_{ie} \text{ i } \vec{R}_{ei} = \vec{N}_{ei} + \vec{T}_{ei},$$

pri čemu je:

$$\vec{N}_{ei} = -\vec{N}_{ie} \text{ i } \vec{T}_{ei} = -\vec{T}_{ie}$$

i gde su $\vec{N}_{ie}$ i $\vec{N}_{ei}$ normale komponente reakcija $\vec{R}_{ie}$ i $\vec{R}_{ei}$, a $\vec{T}_{ie}$ i $\vec{T}_{ei}$ sile trenja u tačkama M_i i M_e , respektivno.

Elementarni virtuelni rad reakcija veza $\vec{R}_{ie}$ i $\vec{R}_{ei}$ u tačkama M_i i M_e je:

$$\delta'A(\vec{R}_{ie}, \vec{R}_{ei}) = \delta'A(\vec{N}_{ie}, \vec{N}_{ei}) + \delta'A(\vec{T}_{ie}, \vec{T}_{ei}), \quad (132)$$

gde je:

$$\delta'A(\vec{N}_{ie}, \vec{N}_{ei}) = \vec{N}_{ie} \cdot \delta\vec{r}_i + \vec{N}_{ei} \cdot \delta\vec{r}_e = 0 \quad (133)$$

$$\delta'A(\vec{T}_{ie}, \vec{T}_{ei}) = \vec{T}_{ie} \cdot \delta\vec{r}_i + \vec{T}_{ei} \cdot \delta\vec{r}_e = \vec{T}_{ie} \cdot \delta(\vec{r}_i - \vec{r}_e) \quad (134)$$

pa je konačno

$$\delta'A(\vec{R}_{ie}, \vec{R}_{ei}) = \delta'A(\vec{T}_{ie}, \vec{T}_{ei}) \neq 0 \quad (135)$$

Uobičajemo je da sile trenja (sile trenja klizanja i otpori kotrljanja) uopšte predstavljaju aktivnim silama, s obzirom da je EVR normalnih komponenta reakcija veza, kao i u slučaju idealnih veza, jednak nuli, a EVR sile trenja različit od nule.