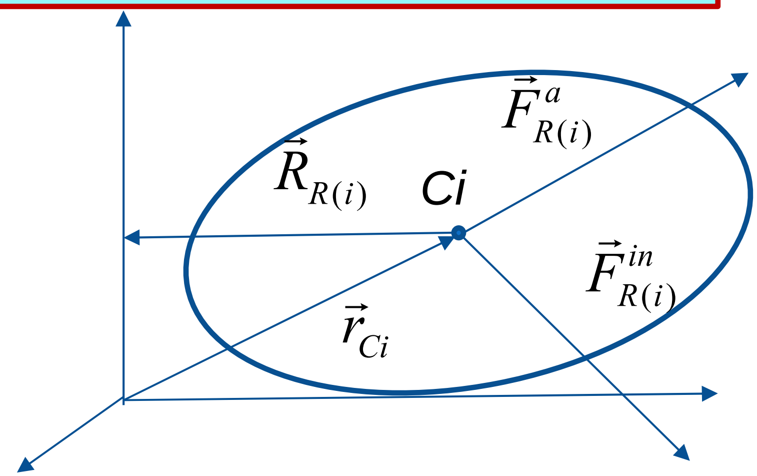
## Различите методе за формирање диференцијалних једначина кретања система крутих тела

- Диференцијалне једначине кретања РС- применом Даламберовог принципа –свођење на Лангранж –Даламберов принцип I начин

Изаберiио редукциону тачку Ci (средиште маса) где редукујемо све спољашње силе( активне и силе реакција) као и инерцијалне силе.

На тај начин, добијају се одговарајући главни вектори и главни моменти:




$\vec{F}^{a}_{R(i)}$ $\quad$ $\vec{F}^{in}_{R(i)}$ $\quad$ $\vec{R}_{R(i)}$

$$\vec{F}^{a}_{R(i)} = \sum_{j=1}^{li} \vec{F}_{j(i)}, \quad \vec{F}^{in}_{R(i)} = \int_{(Vi)} d\vec{F}^{in}_{i}, \quad \vec{R}^{r}_{R(i)} = \sum_{k=1}^{mi} \vec{R}_{k(i)}$$

$$\vec{M}^{a}_{CiR(i)} = \sum_{j=1}^{li} \vec{M}_{Ci}\left(\vec{F}_{j(i)}\right) \quad \vec{M}^{in}_{CiR(i)} = \int_{(Vi)} \vec{\rho}_i \times d\vec{F}^{in}_{i} \quad \vec{M}^{r}_{CiR(i)} = \sum_{k=1}^{mi} \vec{M}_{Ci}\left(\vec{R}_{k(i)}\right)$$

Применом Даламберовог принципа на уочени Vi сегмент добија се:

$$(Vi): \quad (I) \quad \vec{F}^{a}_{R(i)} + \vec{F}^{in}_{R(i)} + \vec{R}^{r}_{R(i)} = 0 \quad \forall\ i = 1, 2, \ldots, n$$

$$(II) \quad \vec{M}^{a}_{CiR(i)} + \vec{M}^{in}_{CiR(i)} + \vec{M}^{r}_{CiR(i)} = 0 \quad \forall\ i = 1, 2, \ldots, n$$

Да би се добио погодан облик диференцијалних једначина кретања РС елиминишу се силе реакције веза. У том смислу множиће се (I) са $\vec{T}_{\alpha(i)}$ односно (II) са ' $\vec{\Omega}_{\alpha(i)}$ и затим сабрати (I) и (II) и после сумирати по *i*:

$$\left(\vec{F}^{a}_{R(i)} + \vec{F}^{in}_{R(i)} + \vec{R}_{R(i)}\right) \cdot \vec{T}_{\alpha(i)} + \left(\vec{M}^{a}_{CiR(i)} + \vec{M}^{in}_{CiR(i)} + \vec{M}^{r}_{CiR(i)}\right) \cdot \vec{\Omega}_{\alpha(i)} = 0$$

$$\forall i = 1, 2, \ldots, n$$

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\vec{F}^{a}_{R(i)} + \vec{F}^{in}_{R(i)} + \vec{R}^{r}_{R(i)}\right) \cdot \vec{T}_{\alpha(i)}$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} \left(\vec{M}^{a}_{CiR(i)} + \vec{M}^{in}_{CiR(i)} + \vec{M}^{r}_{CiR(i)}\right) \cdot \vec{\Omega}_{\alpha(i)} = 0$$

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{n}\left(\vec{F}^{a}_{R(i)}\cdot\vec{T}_{\alpha(i)}+\vec{M}^{a}_{CiR(i)}\cdot\vec{\Omega}_{\alpha(i)}\right)}_{Q_\alpha^a}+\underbrace{\sum_{i=1}^{n}\left(\vec{F}^{in}_{R(i)}\cdot\vec{T}_{\alpha(i)}+\vec{M}^{in}_{CiR(i)}\cdot\vec{\Omega}_{\alpha(i)}\right)}_{Q_\alpha^{in}}$$

$$+\underbrace{\sum_{i=1}^{n}\left(\vec{R}_{R(i)}\cdot\vec{T}_{\alpha(i)}+\vec{M}^{r}_{CiR(i)}\cdot\vec{\Omega}_{\alpha(i)}\right)}_{Q_\alpha^r}=0$$

Уочава се да су одговарајуће суме ништа друго до генералисане силе (види претходна предавања),где је такође показано да је услед идеалних веза одговарајућа генералисана сила $Q_\alpha^r$ једнака нули.

$$Q_\alpha^a+Q_\alpha^{in}+\cancelto{0}{Q_\alpha^r}=0$$

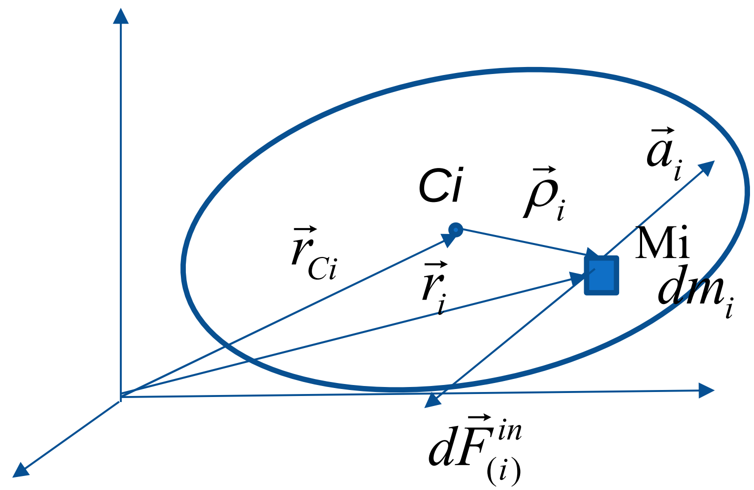
На тај начин добијају се диф. једначине кретања приказане преко *Ланграњж-Даламберовог впринципа (Механика 3):*

$$\boxed{Q_\alpha^a+Q_\alpha^{in}=0\ ,\ \ \alpha=1,2,\dots,\mathrm{n}}$$

Напомена: У хандоуту се пошло од диференцијала Vi где су фигурисале и унутрашње силе, тако да се дошло до диф. једначина преко *општих теорема динамике*.

Диф јед. применом Даламберовог принципа → Ланграннж-Даламберов принцип

Додатак: *одређивање главног вектора и главног момента инерцијалних сила*




$$\vec F^{in}_{CiR(i)} \qquad \vec M^{in}_{CiR(i)} = \int_{(Vi)} \vec\rho_i \times d\vec F_i^{in}$$

$$\vec F^{in}_{R(i)} = \int_{(Vi)} d\vec F_i^{in} = -\int_{(Vi)} \vec a_i dm_i = -\int_{(Vi)} \frac{d^2}{dt^2}\left(\vec r_{ci} + \vec\rho_i\right) dm_i = -\int_{(Vi)} \left(\vec a_{ci} + \ddot{\vec\rho}_i\right) dm_i$$

$$= -\int_{(Vi)} \vec a_{ci} dm_i + \int_{(Vi)} \ddot{\vec\rho}_i dm_i = -\vec a_{ci} m_i + \frac{d^2}{dt^2}\left(\cancelto{0}{\int_{(Vi)} \vec\rho_i dm_i}\right) = -m_i \vec a_{ci}$$

$$\vec{M}^{in}_{CiR(i)} = \int\limits_{(Vi)} \vec{\rho}_i \times d\vec{F}_i^{in} = -\int\limits_{(Vi)} \vec{\rho}_i \times \left(\vec{a}_{ci} + \ddot{\vec{\rho}}_i\right) dm_i$$

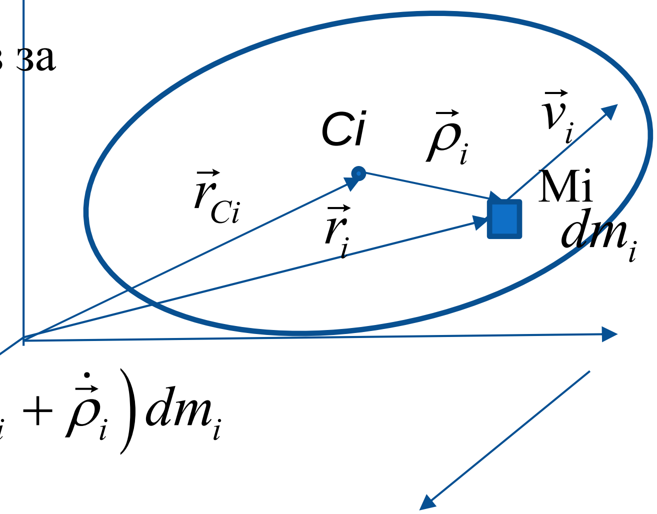
$$= -\int\limits_{(Vi)} \vec{\rho}_i \times \vec{a}_{ci} dm_i - \int\limits_{(Vi)} \left(\vec{\rho}_i \times \ddot{\vec{\rho}}_i\right) dm_i = \int\limits_{(Vi)} \vec{a}_{ci} \times \vec{\rho}_i dm_i - \int\limits_{(Vi)} \left(\vec{\rho}_i \times \ddot{\vec{\rho}}_i\right) dm_i$$

$$= \vec{a}_{ci} \times \left( \underbrace{\int\limits_{(Vi)} \times \vec{\rho}_i dm_i}_{0} \right) - \int\limits_{(Vi)} \left(\vec{\rho}_i \times \ddot{\vec{\rho}}_i\right) dm_i = -\int\limits_{(Vi)} \left(\vec{\rho}_i \times \ddot{\vec{\rho}}_i\right) dm_i$$

Основне теореме динамике $\longrightarrow$ Даламберов принцип

- Диференцијалне једначине кретања РС- применом основних теорема динамике - свођење на Даламберов принцип

На почетку дела из динамике РС изведен је израз за количину кретања (Vi) и момента количине креатања




$$\vec{K}_i = m_i \vec{v}_{Ci}$$

$$\vec{L}_{Ci} = \int\limits_{(Vi)} \vec{\rho}_i \times d\vec{K}_i = \int\limits_{(Vi)} \vec{\rho}_i \times \vec{v}_i dm_i = \int\limits_{(Vi)} \vec{\rho}_i \times \left(\vec{v}_{Ci} + \dot{\vec{\rho}}_i\right) dm_i$$

$$= -\vec{v}_{Ci} \times \underbrace{\int\limits_{(Vi)} \vec{\rho}_i dm_i}_{0} + \int\limits_{(Vi)} \left(\vec{\rho}_i \times \dot{\vec{\rho}}_i\right) dm_i = \int\limits_{(Vi)} \left(\vec{\rho}_i \times \dot{\vec{\rho}}_i\right) dm_i$$

**Теорема о промени количине кретања (Vi)**

$$\frac{d\vec{K}_i}{dt} = \frac{dm_i \vec{v}_{Ci}}{dt} = m_i \vec{a}_{ci} = \vec{F}^a_{R(i)} + \vec{R}^r_{R(i)} \Rightarrow \vec{F}^a_{R(i)} + \vec{R}^r_{R(i)} + \left(-m_i \vec{a}_{ci}\right) = 0$$

$$\boxed{\vec{F}^a_{R(i)} + \vec{R}^r_{R(i)} + \vec{F}^{in}_{R(i)} = 0}$$

$$\vec{L}_{Ci} = \int\limits_{(Vi)} \vec{\rho}_i \times d K_i = \int\limits_{(Vi)} \vec{\rho}_i \times \vec{v}_i dm_i = \int\limits_{(Vi)} \vec{\rho}_i \times \left( \vec{v}_{Ci} + \dot{\vec{\rho}}_i \right) dm_i$$

$$= -\vec{v}_{Ci} \times \int\limits_{(Vi)} \vec{\rho}_i dm_i + \int\limits_{(Vi)} \left( \vec{\rho}_i \times \dot{\vec{\rho}}_i \right) dm_i = \int\limits_{(Vi)} \left( \vec{\rho}_i \times \dot{\vec{\rho}}_i \right) dm_i$$

**Теорема о промени  момента количине кретања (Vi)**

$$\frac{d\vec{L}_{Ci}}{dt} = \frac{d}{dt}\left( \int\limits_{(Vi)} \left( \vec{\rho}_i \times \dot{\vec{\rho}}_i \right) dm_i \right) = \underbrace{\int\limits_{(Vi)} \left( \dot{\vec{\rho}}_i \times \dot{\vec{\rho}}_i \right) dm_i}_{0} + \int\limits_{(Vi)} \left( \vec{\rho}_i \times \ddot{\vec{\rho}}_i \right) dm_i = \vec{M}^{a}_{CiR(i)} + \vec{M}^{r}_{CiR(i)}$$

$$\frac{d\vec{L}_{Ci}}{dt} = -\vec{M}^{in}_{CiR(i)} = \vec{M}^{a}_{CiR(i)} + \vec{M}^{r}_{CiR(i)}$$

$$\boxed{\vec{M}^{a}_{CiR(i)} + \vec{M}^{r}_{CiR(i)} + \vec{M}^{in}_{CiR(i)} = 0}$$

- Диференцијалне једначине кретања РС- применом Лангранж-Даламберовог принципа – до Лангражеових једначина 2 врсте у коваријантом облику

Лангранж-Даламберов принцип → Лангранжеве једначине 2 врсте у ков. облику

Полази се од Лангранж- Даламберовог принципа

$$Q_\alpha^a + Q_\alpha^{in} = 0 \ , \ \ \alpha = 1, 2, \ldots, \mathrm{n}$$

Познато из Механике 3 да је

$$Q_\alpha^a = -Q_\alpha^{in} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}^\alpha}\right) - \left(\frac{\partial E_k}{\partial q^\alpha}\right), \ \ \alpha = 1, 2, \ldots, \mathrm{n}$$

Раније смо добили да је

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}^\alpha}\right) - \left(\frac{\partial E_k}{\partial q^\alpha}\right) = \sum_{\beta=1}^{n} a_{\beta\alpha}\, \ddot{\mathrm{q}}^\beta + \sum_{\beta=1}^{n}\sum_{\gamma=1}^{n} a_{\beta\gamma}\, \dot{q}^\beta\, \dot{\mathrm{q}}^\gamma \ , \ \ \alpha = 1, 2, \ldots, \mathrm{n}$$

- Као и да је

$$a_{\beta\alpha} = a_{\alpha\beta} = a^{tr}{}_{\alpha\beta} + a^{rot}{}_{\alpha\beta} = \sum_{i=1}^{n} m_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q^\alpha}\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q^\beta} + \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{(Vi)} \frac{\partial \vec{\rho}_i}{\partial q^\alpha}\frac{\partial \vec{\rho}_i}{\partial q^\beta} dm_i$$

$$\Gamma_{\beta\gamma,\alpha} = \Gamma^{tr}{}_{\beta\gamma,\alpha} + \Gamma^{rot}{}_{\beta\gamma,\alpha} = \sum_{i=1}^{n} m_i \frac{\partial^2 \vec{r}_i}{\partial q^\beta \partial q^\gamma}\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q^\alpha} + \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{(Vi)} \frac{\partial^2 \vec{\rho}_i}{\partial q^\beta \partial q^\gamma}\frac{\partial \vec{\rho}_i}{\partial q^\alpha} dm_i$$

Полази се од израза са генералисану силу услед инерцијалних сила у облику:

$$-Q_\alpha^{in} = -\sum_{i=1}^{n} \left( \vec{F}_{R(i)}^{in} \cdot \vec{T}_{\alpha(i)} + \vec{M}_{CiR(i)}^{in} \cdot \vec{\Omega}_{\alpha(i)} \right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left( m_i \vec{a}_{ci} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q^\alpha} + \int\limits_{(Vi)} \left( \vec{\rho}_i \times \ddot{\vec{\rho}}_i \right) \cdot \vec{\Omega}_{\alpha(i)} dm_i \right), \quad \alpha = 1, 2, \ldots, \mathrm{n}$$

$$\vec{a}_{ci} = \sum_{\beta=1}^{n} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q^\beta} \ddot{\mathrm{q}}^\beta + \sum_{\beta=1}^{n}\sum_{\gamma=1}^{n} \frac{\partial^2 \vec{r}_i}{\partial q^\beta \partial q^\gamma} \dot{q}^\beta \, \dot{\mathrm{q}}^\gamma ,$$

$$-Q_{\alpha}^{in}=\sum_{i=1}^{n}\left(m_i\vec{a}_{ci}\cdot\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q^{\alpha}}+\int_{(Vi)}\left(\vec{\rho}_i\times\ddot{\vec{\rho}}_i\right)\cdot\vec{\Omega}_{\alpha(i)}dm_i\right),\quad \alpha=1,2,\dots,\mathrm{n}$$

- (A) (B)

(A)

$$=\sum_{i=1}^{n}m_i\left(\sum_{\beta=1}^{n}\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q^{\beta}}\ddot{\mathrm{q}}^{\beta}+\sum_{\beta=1}^{n}\sum_{\gamma=1}^{n}\frac{\partial^2\vec{r}_i}{\partial q^{\beta}\partial q^{\gamma}}\dot{q}^{\beta}\,\dot{\mathrm{q}}^{\gamma}\right)\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q^{\alpha}}$$

$$=\sum_{\beta=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}m_i\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q^{\beta}}\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q^{\alpha}}\ddot{\mathrm{q}}^{\beta}+\sum_{\beta=1}^{n}\sum_{\gamma=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}m_i\frac{\partial^2\vec{r}_i}{\partial q^{\beta}\partial q^{\gamma}}\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q^{\alpha}}\dot{q}^{\beta}\,\dot{\mathrm{q}}^{\gamma}=$$

$$=\sum_{\beta=1}^{n}a^{tr}{}_{\beta\alpha}\,\ddot{\mathrm{q}}^{\beta}+\sum_{\beta=1}^{n}\sum_{\gamma=1}^{n}\Gamma^{tr}_{\beta\gamma,\beta}\dot{q}^{\beta}\,\dot{\mathrm{q}}^{\gamma},$$

$$(\mathrm{B}) = \sum_{i=1}^{n}\left(\int_{(Vi)}\left(\vec{\rho}_i \times \ddot{\vec{\rho}}_i\right)\cdot\vec{\Omega}_{\alpha(i)}dm_i\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(\int_{(Vi)}\ddot{\vec{\rho}}_i\left(\vec{\Omega}_{\alpha(i)} \times \vec{\rho}_i\right)\cdot dm_i\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left(\int_{(Vi)}\ddot{\vec{\rho}}_i \cdot \frac{\partial\vec{\rho}_i}{\partial q^{\alpha}}dm_i\right)$$

$$\ddot{\vec{\rho}}_i = \sum_{\beta=1}^{n}\frac{\partial\vec{\rho}_i}{\partial q^{\beta}}\ddot{\mathrm{q}}^{\beta} + \sum_{\beta=1}^{n}\sum_{\gamma=1}^{n}\frac{\partial^2\vec{\rho}_{ii}}{\partial q^{\beta}\partial q^{\gamma}}\dot{q}^{\beta}\,\dot{\mathrm{q}}^{\gamma},$$

После замене  и сређивања следи да је

$$(\mathrm{B}) \qquad = \sum_{\beta=1}^{n} a^{rot}{}_{\beta\alpha}\,\ddot{\mathrm{q}}^{\beta} + \sum_{\beta=1}^{n}\sum_{\gamma=1}^{n}\Gamma^{rot}_{\beta\gamma,\beta}\dot{q}^{\beta}\,\dot{\mathrm{q}}^{\gamma},$$

Коначно:

$$\boxed{\sum_{\beta=1}^{n} a_{\beta\alpha}\,\ddot{\mathrm{q}}^{\beta} + \sum_{\beta=1}^{n}\sum_{\gamma=1}^{n} a_{\beta\gamma}\dot{q}^{\beta}\,\dot{\mathrm{q}}^{\gamma} = Q_{\alpha},\;\; \alpha = 1,2,\ldots,\mathrm{n}}$$