

10. O različitim metodama za formiranje diferencijalnih jednačina kretanja sistema krutih tela

U literaturi (vidi, na primer [12]) prikazane su različite metode za formiranje diferencijalnih jednačina kretanja i diskutovana je efikasnost tih metoda u pogledu primenjivosti u postupcima za automatsko formiranje tih jednačina. Cilj našeg izlaganja u ovom poglavlju sastoji se u pružanju dokaza da u pogledu automatskog formiranja diferencijalnih jednačina kretanja sistema krutih tela metode prikazane u literaturi s obzirom na činjenicu da se može pokazati da kao konačan rezultat daju diferencijalne jednačine kretanja u formi (8.7), mogu da se razlikuju samo u postupcima formiranja programa za automatsko formiranje koordinata osnovnog metričkog tenzora, Kristofelovih simbola i generalisanih sila. Primena različitih zakona i principa mehanike za dobijanje analitičkog oblika diferencijalnih jednačina (8.7) predstavlja problem koji je u mehanici rešen u početnoj fazi razvoja te nauke i ne igra nikakvu ulogu u procesu automatskog formiranja diferencijalnih jednačina kretanja, ako se navodi u brojnim radovima iz oblasti mehanike robota.

10.1 Opšti zakoni mehanike i diferencijalne jednačine kretanja

Ako iz sistema krutih tela u obliku otvorenog kinematičkog lanca izdvojimo telo (V_i) na osnovu zakona o promeni količine kretanja toga tela sledi (vidi (7.47))

$$\frac{d\vec{K}_i}{dt} = m_i \left(\sum_{\alpha=1}^n \vec{T}_{\alpha(i)} \ddot{q}^\alpha + \sum_{\alpha=1}^n \sum_{\beta=1}^n \vec{\Gamma}_{\alpha\beta,\gamma(i)} \dot{q}^\alpha \dot{q}^\beta \right) = \vec{F}_{R(i)} + \vec{R}_{R(i)}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (10.1)$$

gde je $\vec{F}_{R(i)}$, - glavni vektor sistema aktivnih sila (7.36), a $\vec{R}_{R(i)}$ glavni moment sistema reakcije veza (7.38). Takođe, na osnovu zakona o promeni kinetičkog momenta tela (V_i) sračunatog u odnosu na centar inercije C_i toga segmenta, sledi (vidi 7.85)

$$\frac{d\vec{L}_{C_i}}{dt} = \sum_{\alpha=1}^n \vec{b}_{\alpha(i)} \ddot{q}^\alpha + \sum_{\alpha=1}^n \sum_{\beta=1}^n \vec{d}_{\alpha\beta,\gamma(i)} \dot{q}^\alpha \dot{q}^\beta = \vec{M}_{C_i R(i)}^a + \vec{M}_{C_i R(i)}^r, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (10.2)$$

gde je $\vec{M}_{C_i R(i)}^a$ glavni moment sistema aktivnih sila (7.36), sračunat u odnosu na C_i , a $\vec{M}_{C_i R(i)}^r$ - glavni moment sistema reakcije veza (7.38), sračunat u odnosu na C_i .

Skalarnim množenjem (10.1) sa $\vec{T}_{\gamma(i)}$ i skalarnim množenjem (10.2) sa $\vec{\Omega}_{\gamma(i)}$ i sabiranjem tako dobijenih izraza po indeksu i dolazi se do relacije

$$\begin{aligned} & \sum_{\alpha=1}^n \left(\sum_{i=1}^n m_i \vec{T}_{\alpha(i)} \cdot \vec{T}_{\gamma(i)} \right) \ddot{q}^\alpha + \sum_{\alpha=1}^n \sum_{\beta=1}^n \left(\sum_{i=1}^n m_i \vec{\Gamma}_{\alpha\beta,\gamma(i)} \cdot \vec{T}_{\gamma(i)} \right) \dot{q}^\alpha \dot{q}^\beta + \\ & + \sum_{\alpha=1}^n \left(\sum_{i=1}^n \vec{b}_{\alpha(i)} \cdot \vec{\Omega}_{\gamma(i)} \right) \ddot{q}^\alpha + \sum_{\alpha=1}^n \sum_{\beta=1}^n \left(\sum_{i=1}^n \vec{d}_{\alpha\beta(i)} \cdot \vec{\Omega}_{\gamma(i)} \right) \dot{q}^\alpha \dot{q}^\beta = \\ & = \sum_{i=1}^n \left(\vec{F}_{R(i)} \cdot \vec{T}_{\gamma(i)} + \vec{M}_{C_i R(i)}^a \cdot \vec{\Omega}_{\gamma(i)} \right) + \sum_{i=1}^n \left(\vec{R}_{R(i)} \cdot \vec{T}_{\gamma(i)} + \vec{M}_{C_i R(i)}^r \cdot \vec{\Omega}_{\gamma(i)} \right), \quad \gamma = 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \quad (10.3)$$

Uzimajući u obzir da važe relacije (vidi (10.3), (7.49) i (7.89))

$$\sum_{i=1}^n m_i \vec{\Gamma}_{\alpha\beta,\gamma(i)} \cdot \vec{T}_{\gamma(i)} = \sum_{i=1}^n m_i \vec{\xi}_{\alpha\beta} \left(\vec{e}_{\alpha\beta} \times T_{\alpha\beta} \right) \{ \vec{T}_{\gamma(i)} \}, \quad (10.4)$$

$$\sum_{i=1}^n \vec{d}_{\alpha\beta(i)} \cdot \vec{\Omega}_{\gamma(i)} = (\vec{d}_{\alpha\beta(i)}) \{ \vec{\Omega}_{\gamma(i)} \} = (\vec{\Omega}_{\alpha\beta(i)}) [\Pi_i] \left[\vec{\Omega}_{\frac{d}{\alpha\beta}} \right] \{ \vec{\Omega}_{\gamma(i)} \}, \quad (10.5)$$

dobija se (vidi 8.20)

$$\sum_{i=1}^n \left(m_i \vec{\Gamma}_{\alpha\beta,\gamma(i)} \cdot \vec{T}_{\gamma(i)} + \vec{d}_{\alpha\beta(i)} \cdot \vec{\Omega}_{\gamma(i)} \right) = \Gamma_{\alpha\beta,\gamma}, \quad (10.6)$$

Takođe, prema, (vidi (10.3), (7.90))

$$\sum_{i=1}^n \vec{b}_{\alpha(i)} \cdot \vec{\Omega}_{\gamma(i)} = (\vec{d}_{\alpha\beta(i)}) \{ \vec{\Omega}_{\gamma(i)} \} = (\vec{\Omega}_{\alpha\beta(i)}) [J_{Ci}] \{ \vec{\Omega}_{\gamma(i)} \}, \quad (10.7)$$

sledi (vidi (7.107))

$$\sum_{i=1}^n \left(m_i \vec{T}_{\alpha(i)} \cdot \vec{T}_{\gamma(i)} + \vec{b}_{\alpha(i)} \cdot \vec{\Omega}_{\gamma(i)} \right) = a_{\alpha\gamma}. \quad (10.8)$$

Prema (10.6) i (10.8) izraz (10.3) dobija oblik

$$\sum_{\alpha=1}^n a_{\alpha\gamma} \ddot{q}^\alpha + \sum_{\alpha=1}^n \sum_{\beta=1}^n \Gamma_{\alpha\beta,\gamma} \dot{q}^\alpha \dot{q}^\beta = Q_\gamma, \quad \gamma = 1, 2, \dots, n. \quad (10.9)$$

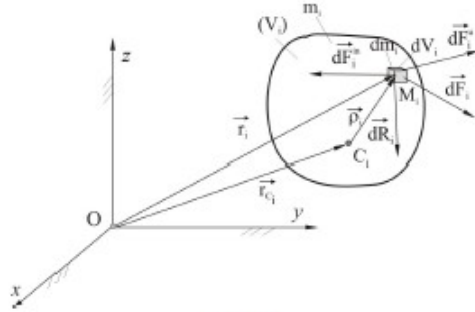
pošto je prema (8.38) i principu idealnosti veza

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \left(\vec{F}_{R(i)} \cdot \vec{T}_{\gamma(i)} + \vec{M}_{C,R(i)}^a \cdot \vec{\Omega}_{\gamma(i)} \right) &= Q_\gamma, \\ \sum_{i=1}^n \left(\vec{R}_{R(i)} \cdot \vec{T}_{\gamma(i)} + \vec{M}_{C,R(i)}^r \cdot \vec{\Omega}_{\gamma(i)} \right) &= 0. \end{aligned} \quad (10.10)$$

Primitimo da se (10.9) u potpunosti poklapa sa već dobijenim diferencijalnim jednačinama kretanja.

10.2 D'alamberov princip i diferencijalne jednačine kretanja

Za element zapremine dV_i , mase dm_i izdvojen iz segmenta (V_i) oslobođenog veza (vidi sl.9.1) važi drugi Njutnov zakon u obliku (9.2). Takođe, važi i (vidi (9.3))



Slika 9.1

$$d\vec{F}_i + d\vec{R}_i + d\vec{F}_i^u + d\vec{F}_i^{in} = 0, \quad (10.11)$$

što predstavlja izraz za Dalamberov princip u kome je inercijalna sila određena izrazom (9.4). Prema (10.11) sledi da razmatrani element segmenta (V_i) važi

$$\left(d\vec{F}_i, d\vec{R}_i, d\vec{F}_i^u, d\vec{F}_i^{in}\right) \sim 0, \quad (10.12)$$

tj. da sile $d\vec{F}_i, d\vec{R}_i, d\vec{F}_i^u, d\vec{F}_i^{in}$ predstavljaju uravnotežen sistem sučeljnih sila (M_i je napadna tačka ovih sila). Iz tog razloga sledi da i sistem sila (7.36), (7.38) unutrašnjih sila i inercijalnih sila predstavlja uravnotežen sistem sila. Uslov uravnoteženosti toga sistema ima poznati oblik (centar inercije C_i segmenta uzet je za redukcionu tačku):

$$\vec{F}_{R(i)}^{sum} = 0 \quad \vec{M}_{C_i, R(i)}^{sum} = 0, \quad (10.13)$$

gde su glavni vektor $\vec{F}_{R(i)}^{sum}$ i glavni moment $\vec{M}_{C_i, R(i)}^{sum}$ sistema sila određeni relacijama (vidi sl. 9.1)

$$\vec{F}_{R(i)}^{sum} = \int_{(V_i)} d\vec{F}_i + \int_{(V_i)} d\vec{R}_i + \int_{(V_i)} d\vec{F}_i^u + \int_{(V_i)} d\vec{F}_i^{in}, \quad (10.14)$$

$$\vec{M}_{C_i, R(i)}^{sum} = \int_{(V_i)} \vec{\rho}_i \times d\vec{F}_i + \int_{(V_i)} \vec{\rho}_i \times d\vec{R}_i + \int_{(V_i)} \vec{\rho}_i \times d\vec{F}_i^u + \int_{(V_i)} \vec{\rho}_i \times d\vec{F}_i^{in}. \quad (10.15)$$

Kako je već rečeno, zbog ekvivalencije (7.36) odnosno (7.38) sa kontinualnim podeljenim sistemom sila $\left((V_i): d\vec{F}_i\right)$ i $\left((V_i): d\vec{R}_i\right)$, glavni vektor i glavni moment aktivnih sila i sila reakcija veza iznose

$$\vec{F}_{R(i)} = \int_{(V_i)} d\vec{F}_i = \sum_{j=1}^{l_i} \vec{F}_{j(i)}, \quad (10.16)$$

$$\vec{M}_{C_i R(i)}^a = \int_{(V_i)} \vec{\rho}_i \times d\vec{F}_i = \sum_{j=1}^{l_i} \vec{M}_{C_i}(\vec{F}_{j(i)}), \quad (10.17)$$

$$\vec{R}_{R(i)} = \int_{(V_i)} d\vec{R}_i = \sum_{k=1}^{m_i} \vec{R}_{k(i)}, \quad (10.18)$$

$$\vec{M}_{C_i R(i)}^r = \int_{(V_i)} \vec{\rho}_i \times d\vec{R}_i = \sum_{k=1}^{m_i} \vec{M}_{C_i}(\vec{R}_{k(i)}). \quad (10.19)$$

Glavni vektor i glavni moment inercijalnih sila glase

$$\vec{F}_{R(i)}^{in} = \int_{(V_i)} d\vec{F}_i^{in}, \quad (10.20)$$

$$\vec{M}_{C_i R(i)}^{in} = \int_{(V_i)} \vec{\rho}_i \times d\vec{F}_i^{in}, \quad (10.21)$$

Uzimajući u obzir svojstvo unutrašnjih sila sledi (pri tome treba imati u vidu da se segment (V_i) razmatra kao sistem):

$$\vec{F}_{R(i)}^u = \int_{(V_i)} d\vec{F}_i^u = 0, \quad (10.22)$$

$$\vec{M}_{C_i R(i)}^u = \int_{(V_i)} \vec{\rho}_i \times d\vec{F}_i^u = 0, \quad (10.23)$$

Glavni vektor i glavni moment inercijalnih sila određeni su izrazima (9.22) i (9.23). Iz (9.22) sledi

$$\vec{F}_{R(i)}^{in} = -\frac{d(m_i \dot{\vec{r}}_{C_i})}{dt} = -\frac{d\vec{K}_i}{dt}, \quad (10.24)$$

gde je \vec{K}_i količina kretanja segmenta (V_i) . Na osnovu izloženog Dalamberov princip (10.13) dobija oblik:

$$\sum_{j=1}^{l_i} \vec{F}_{j(i)} + \sum_{k=1}^{m_i} \vec{R}_{k(i)} - \frac{d\vec{K}_i}{dt} = 0, \quad (10.25)$$

$$\sum_{j=1}^{l_i} \vec{M}_{C_i}(\vec{F}_{j(i)}) + \sum_{k=1}^{m_i} \vec{M}_{C_i}(\vec{R}_{k(i)}) - \frac{d\vec{L}_{C_i}}{dt} = 0, \quad (10.26)$$

što se u potpunosti poklapa sa osnovnim zakonima mehanike (izraz (10.25) predstavlja zakon o promeni količine kretanja segmenta (V_i) a (10.26) zakon o promeni kinetičkog momenta segmenta (V_i) . Dalji postupak formiranja

Mehanika robota-predavanja-prof.Lazarević-Handout 10

diferencijalnih jednačina kretanja teče kao u prethodnom paragrafu jer se na osnovu (7.43), (7.44) i (7.48) izraz (10.25) svodi se na (10.1), a na osnovu (7.73), (7.74), (7.76) i (7.85) izraz (10.26) svodi se na (10.2).

$$\sum_{\alpha=1}^n a_{\gamma\alpha} \ddot{q}^{\alpha} + \sum_{\alpha=1}^n \sum_{\beta=1}^n \Gamma_{\alpha\beta,\gamma} \dot{q}^{\alpha} \dot{q}^{\beta} = Q_{\gamma}^a + \lambda_{\nu} \frac{\partial f^{\nu}}{\partial q^{\gamma}}, \quad \gamma = 1, 2, \dots, n. \quad (10.40)$$