Универзитет у Београду

Машински факултет

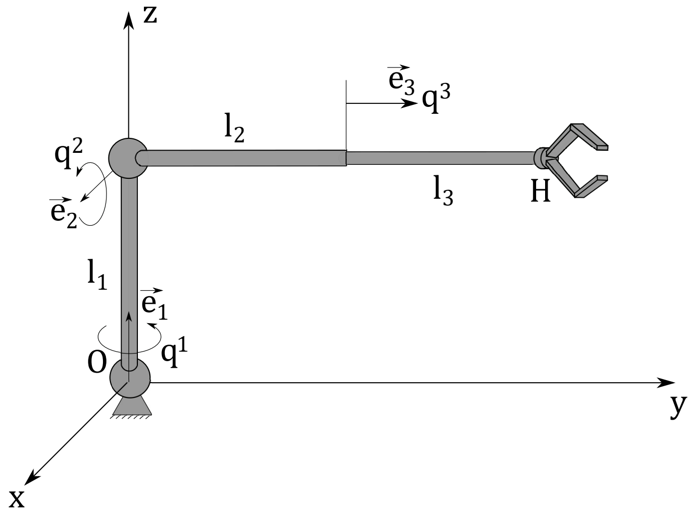
Механика робота

Вежбе - десета недеља

Београд, 2023.

NR

Задатак 15 За робот са 3 степена слободе приказан на слици у референтној конфигурацији, израчунати кинетички момент трећег сегмента $L_{c_3}^{(3)}$ за његов центар маса, изражен у односу на локални координатни систем трећег сегмента.



Дато је: $q^i = 0,1 \cdot i \; [\mathrm{rad}, \mathrm{m}]$, $\dot{q}^i = 0,2 \cdot i \; \left[\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}, \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right]$, $i = 1, 2, 3$. Познат је и тензор инерције трећег сегмента:

$$J_{c_3}^{(3)} = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}$$

Кинетички момент трећег сегмента је:

$$\left\{L_{c_3}^{(3)}\right\} = \left[J_{c_3}^{(3)}\right] \left\{\vec{\omega}_3^{(3)}\right\}$$

Дакле, потребно је одредити апсолутну угаону брзину трећег сегмента, изражену у односу на локални координатни систем трећег сегмента!

Угаону брзину можемо одредити на основу израза (погледати Задатак 10):

$$\boxed{\vec{\omega}_i = \sum_{\alpha=1}^{i} \overline{\xi}_\alpha \vec{e}_\alpha \dot{q}^\alpha}$$

$$\vec{\omega}_3 = \overline{\xi}_1 \vec{e}_1 \dot{q}^1 + \overline{\xi}_2 \vec{e}_2 \dot{q}^2 + \overline{\xi}_3 \vec{e}_3 \dot{q}^3$$

С обзиром на то да је $\overline{\xi}_3 = 0$, следи:

$$\{\vec{\omega}_3\} = \left\{\vec{e}_1^{(1)}\right\} \dot{q}^1 + \left\{\vec{e}_2^{(2)}\right\} \dot{q}^2$$

Пошто је потребно да одредимо угаону брзину у односу на локални координатни систем трећег сегмента, извршићемо неопходне трансформације:

$$\left\{\vec{\omega}_3^{(3)}\right\} = [A_{1,3}]^T \left\{\vec{e}_1^{(1)}\right\} \dot{q}^1 + [A_{2,3}]^T \left\{\vec{e}_2^{(2)}\right\} \dot{q}^2$$

Прво је потребно да се одреде јединични вектори оса ротације и неопходне матрице трансформације:

$$\vec{e}_1^{(1)} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix}, \qquad \vec{e}_2^{(2)} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \qquad \vec{e}_3^{(3)} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Ротација првог сегмента у односу на непокретни координати систем, за q^1 око осе Oz:

$$[A_{0,1}] = \begin{bmatrix} \cos q^1 & -\sin q^1 & 0 \\ \sin q^1 & \cos q^1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,995 & -0,0998 & 0 \\ 0,0998 & 0,995 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ротација за q^2 око осе одређене ортом $\vec{e}_2^{(2)}$:

$$[A_{1,2}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos q^2 & -\sin q^2 \\ 0 & \sin q^2 & \cos q^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0,9801 & -0,1987 \\ 0 & 0,1987 & 0,9801 \end{bmatrix}$$

Трећи сегмент врши релативну транслацију у односу на други сегмент, тако да важи:

$$[A_{2,3}] = [I]$$

Потребну матрицу трансформације $[A_{1,3}]$ ћемо одредити на следећи начин:

$$[A_{1,3}] = [A_{0,1}]\,[A_{1,2}] = \begin{bmatrix} 0,995 & -0,0978 & 0,0198 \\ 0,0998 & 0,9752 & -0,1977 \\ 0 & 0,1987 & 0,9801 \end{bmatrix}$$

Сада можемо одредити угаону брзину:

$$\left\{\vec{\omega}_3^{(3)}\right\} = [A_{1,3}]^T \left\{\vec{e}_1^{(1)}\right\} \dot{q}^1 + [A_{2,3}]^T \left\{\vec{e}_2^{(2)}\right\} \dot{q}^2 = \begin{Bmatrix} 0,4 \\ 0,0397 \\ 0,196 \end{Bmatrix} \left[\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}\right]$$

као и тражени кинетички момент:

$$\left\{L_{c_3}^{(3)}\right\} = \left[J_{c_3}^{(3)}\right] \left\{\vec{\omega}_3^{(3)}\right\} = \begin{Bmatrix} 4 \\ 0,0397 \\ 1,9601 \end{Bmatrix} \left[\frac{\mathrm{kgm}^2}{\mathrm{s}}\right]$$

Како бисмо одредили $\left\{L_{c_3}^{(0)}\right\}$? Кинетички момент трећег сегмента у односу на непокретни координатни систем може се одредити на основу израза:

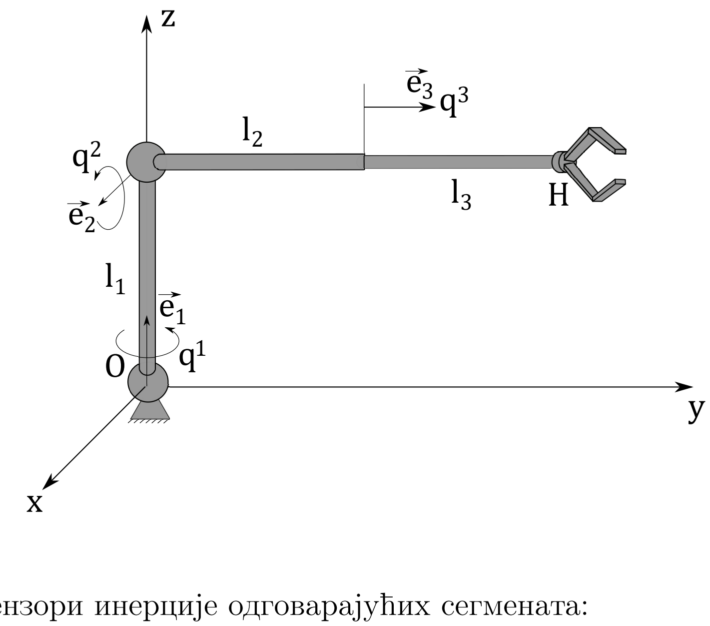
$$\left\{L_{c_3}^{(0)}\right\} = \left[J_{c_3}^{(0)}\right] \left\{\vec{\omega}_3^{(0)}\right\}$$

Дакле, потребно је да се одреди угаона брзина трећег сегмента у односу на непокретни координатни систем (погледати Задатак 10), као и трансформација тензора инерције:

$$\left[J_{c_3}^{(0)}\right] = [A_{0,3}] \left[J_{c_3}^{(3)}\right] [A_{0,3}]^T$$

Задатак 16 За робот приказан на слици у референтној конфигурацији, за следеће вредности генералисаних координата и генералисаних брзина $q^i = 0,1 \cdot i$ [rad, m], $\dot{q}^i = 0,2 \cdot i \left[\frac{\text{rad}}{\text{s}}, \frac{\text{m}}{\text{s}}\right]$, $i = 1,2,3$, одредити следеће величине:

- кинетичку енергију трећег сегмента E_{k_3},
- коефицијенте метричког тензора a_{11} и a_{12}, и
- Кристофелове симболе прве врсте $\Gamma_{12,1}$ и $\Gamma_{22,1}$.



Дати су тензори инерције одговарајућих сегмената:

$$J_{c_1}^{(1)} = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \; J_{c_2}^{(2)} = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}, \; J_{c_3}^{(3)} = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}$$

Дати су и карактеристични вектори сегмената:

$$\vec{\rho}_{11}^{(1)} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0,8 \end{Bmatrix}, \qquad \vec{\rho}_{22}^{(2)} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0,6 \\ 0 \end{Bmatrix}, \qquad \vec{\rho}_{33}^{(3)} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0,4 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\vec{\rho}_{1}^{(1)} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -0,4 \end{Bmatrix}, \qquad \vec{\rho}_{2}^{(2)} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -0,3 \\ 0 \end{Bmatrix}, \qquad \vec{\rho}_{3}^{(3)} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -0,2 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Можемо приметити да важи:

$$\overline{\xi}_1 = \overline{\xi}_2 = 1,\ \overline{\xi}_3 = 0$$

Јединични вектори оса ротације и транслације су:

$$\vec{e}_1^{(1)} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix}, \qquad \vec{e}_2^{(2)} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \qquad \vec{e}_3^{(3)} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Матрице трансформације можемо одредити коришћењем Родриговог обрасца:

$$[A_{0,1}] = [I] + \overline{\xi}_1 \left\{ (1 - \cos q^1) \left[e_1^d\right]^2 + \sin q^1 \left[e_1^d\right] \right\}$$

$$\left\{\vec{e}_1\right\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \Rightarrow \left[e_1^d\right] = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \left[e_1^d\right]^2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[A_{0,1}] = \begin{bmatrix} 0,995 & -0,0998 & 0 \\ 0,0998 & 0,995 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[A_{1,2}] = [I] + \overline{\xi}_2 \left\{ (1 - \cos q^2) \left[e_2^d\right]^2 + \sin q^2 \left[e_2^d\right] \right\}$$

$$\left\{\vec{e}_2\right\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \left[e_2^d\right] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \left[e_2^d\right]^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$[A_{1,2}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0,9801 & -0,1987 \\ 0 & 0,1987 & 0,9801 \end{bmatrix}$$

Матрица трансформације $[A_{2,3}]$ је јединична јер је $\overline{\xi}_3 = 0$.

$$[A_{2,3}] = [I] + \overline{\xi}_3 \left\{ (1 - \cos q^3) \left[e_3^d\right]^2 + \sin q^3 \left[e_3^d\right] \right\} = [I]$$

Сложена матрица трансформације $[A_{0,2}]$ је:

$$[A_{0,2}] = [A_{0,1}]\,[A_{1,2}] = \begin{bmatrix} 0,995 & -0,0978 & 0,0198 \\ 0,0988 & 0,9752 & -0,1977 \\ 0 & 0,1987 & 0,9801 \end{bmatrix}$$

Преостале матрице трансформације су већ одређене јер је $[A_{2,3}]$ јединична матрица:

$$\begin{aligned} [A_{0,3}] &= [A_{0,1}]\,[A_{1,2}]\,[A_{2,3}] \\ &= [A_{0,1}]\,[A_{1,2}]\,[I] \\ &= [A_{0,2}] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [A_{1,3}] &= [A_{1,2}]\,[A_{2,3}] \\ &= [A_{1,2}]\,[I] \\ &= [A_{1,2}] \end{aligned}$$