10 Диференцијалне једначине првог реда

Јендачина облика
$$F(x,y,y',\dots,y^{(n)})=0$$
у којој фигурише бар један од извода *непознате функције* $y=y(x)$ је *диференцијална једначина*.

Ред диференцијалне једначине је ред највећег извода који у њој фигурише.

Нормални облик диференцијалне једначине је
$$y^{(n)}=f(x,y,y',\dots,y^{(n-1)}).$$

Овде радимо само диференцијалне једначине првог реда, тј. облика $F(x,y,y')=0$.

10.1 Диференцијалне једначине са раздвојеним промењивим

Ако се диференцијална једначина може написати у облику
$$f(x)\,\mathrm{d}x=g(y)\,\mathrm{d}y,$$
тада је она једничина са раздвојеним променљивим и њено опште решење добијамо интеграљењем (квадратуром):
$$\int f(x)\,\mathrm{d}x=\int g(y)\,\mathrm{d}y+C.$$

Пример 10.1. Наћи опште решење диференцијалне једначине $(1+e^x)yy'=e^x$.

Како је $y'=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$, дату диференцијалну једначину можемо записати у облику
$$y\,\mathrm{d}y=\frac{e^x\,\mathrm{d}x}{1+e^x},$$
па је њено опште решење
$$\int y\,\mathrm{d}y=\int\frac{e^x\,\mathrm{d}x}{1+e^x},\quad \text{тј.}\quad \frac{y^2}{2}+C=\ln(1+e^x),$$
што се може записати и у облику
$$C_1e^{y^2/2}=1+e^x\qquad (C_1=e^C).$$

Пример 10.2. Наћи опште решење диференцијалне једначине $y'(\operatorname{ctg}^2x-3)=1$.

Дата једначина се може записати у облику $\mathrm{d}y=\frac{\mathrm{d}x}{\operatorname{ctg}^2x-3}$, па је њено опште решење
$$y=\int\frac{\mathrm{d}x}{\operatorname{ctg}^2x-3}=\begin{bmatrix}\operatorname{ctg}x=t\\ \mathrm{d}x=-\,\mathrm{d}t/(1+t^2)\end{bmatrix}=-\int\frac{\mathrm{d}t}{(t^2-3)(t^2+1)}=\frac{1}{8\sqrt3}\ln\left|\frac{\operatorname{ctg}x+\sqrt3}{\operatorname{ctg}x-\sqrt3}\right|-\frac14x+C.$$

10.2 Хомогена диференцијална једначина

Хомогена диференцијална једначина је једначина која се може написати у облику
$$y'=f\left(\frac{y}{x}\right)\tag{10.1}$$
и она се сменом
$$z=\frac{y}{x},\quad y=zx,\quad y'=z'x+z$$
своди на диференцијалну једначину са раздвојеним променљивим (по непознатој функцији z):
$$\frac{\mathrm{d}z}{f(z)-z}=\frac{\mathrm{d}x}{x}.$$

Постоји тест да је дата диференцијална једначина хомогена: убаци се tx уместо x и ty уместо y, па ако је могуће елиминисати t, једначина јесте хомогена.

Једначина облика
$$y' = \frac{a_1x + a_2y + a_3}{b_1x + b_2y + b_3}$$
се у случају да је $\delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$ своди на хомогену сменом $x = X + A,\ y = Y + B$ подешавањем параметара A и B.

Случај $\delta = 0$ значи да су изрази $a_1x + a_2y$ и $b_1x + b_2y$ пропорционални, па се полазна једначина сменом $z = a_1x + a_2y$, $z = z(x)$, своди на једначину са раздвојеним променљивим.

Пример 10.3. Решити диференцијалну једначину $x^2\,\mathrm{d}y + y(\sqrt{x^2 - y^2} - x)\,\mathrm{d}x = 0$, $x > y > 0$.

Дељењем дате једначину са x^2dx добијамо једначину
$$y' = -\frac{y}{x}\left(\sqrt{1 - \left(\frac{y}{x}\right)^2} - 1\right),$$
која има облик (10.1), па је хомогена. Уводимо смену $z = \frac{y}{x}$, $y' = z'x + z$, па се дата једначина своди на једначину
$$z'x + z = -z(\sqrt{1 - z^2} - 1), \quad \text{тј.} \quad \frac{\mathrm{d}z}{z\sqrt{1 - z^2}} = -\frac{\mathrm{d}x}{x},$$
што је једначина са раздвојеним променљивим. Интеграл на левој страни претходне једнакости је
$$\int \frac{\mathrm{d}z}{z\sqrt{1 - z^2}} = \int \frac{z\,\mathrm{d}z}{z^2\sqrt{1 - z^2}} = \begin{bmatrix} 1 - z^2 = u^2,\ z = \sqrt{1 - u^2}, \\ z\,\mathrm{d}z = -u\,\mathrm{d}u \end{bmatrix} = \int \frac{\mathrm{d}u}{u^2 - 1} = \frac{1}{2}\ln\frac{1 - u}{1 + u} + C =$$
$$\frac{1}{2}\ln\frac{1 - \sqrt{1 - z^2}}{1 + \sqrt{1 - z^2}} + C = \frac{1}{2}\ln\frac{2 - z^2 - 2\sqrt{1 - z^2}}{z^2} + C.$$
Следи да је опште решење дате једначине (након враћања функције y и множења једначине са 2)
$$\ln\frac{2x^2 - y^2 - 2x\sqrt{x^2 - y^2}}{y^2} = -2\ln x + \ln C, \quad \text{тј.} \quad 2x^4 - x^2y^2 - 2x^3\sqrt{x^2 - y^2} - Cy^2 = 0.$$

Пример 10.4. Решити диференцијалну једначину $(4x + 3y + 1)\,\mathrm{d}x + (x + y + 1)\,\mathrm{d}y = 0$.

Напишимо дату једначину у облику $y' = -\dfrac{4x + 3y + 1}{x + y + 1}$. Сменама $x = X + A$, $y = Y + B$ за одговарајуће A и B, ова једначина се своди на хомогену. У једначини
$$Y' = -\frac{4X + 4A + 3Y + 3B + 1}{X + A + Y + B + 1}$$
бирамо A и B тако да важи
$$4A + 3B + 1 = 0 \quad \text{и} \quad A + B + 1 = 0.$$
Решење горњег система је $A = 2$ и $B = -3$, па полазна једначина постаје
$Y' = -\dfrac{4X + 3Y}{X + Y}$, тј. $Y' = -\dfrac{4 + 3\frac{Y}{X}}{1 + \frac{Y}{X}}$. Сменом $z = \frac{Y}{X}$, одакле је $Y' = z'X + z$, добијамо
$$z'X + z = -\frac{4 + 3z}{1 + z}, \quad \text{односно} \quad -\frac{1 + z}{(2 + z)^2}dz = \frac{dX}{X}, \text{ одакле је}$$
$$-\int \frac{2 + z - 1}{(2 + z)^2}dz = \int \frac{dX}{X}, \quad \text{односно} \quad -\ln|2 + z| - \frac{1}{2 + z} + C = \ln|X|.$$
Дакле, опште решење хомогене једанчине је
$$-\frac{1}{2 + \frac{Y}{X}} + C = \ln\left|X\left(2 + \frac{Y}{X}\right)\right|, \quad \text{тј.} \quad C_1e^{-\frac{X}{2X + Y}} = 2X + Y,$$
а опште решење полазне једначине је
$$C_1e^{\frac{2 - x}{2x + y - 1}} = 2x + y - 1.$$

10.3 Линеарна диференцијална једначина

Линеарна диференцијална једначина је једначина облика

$$y' + p(x)y = q(x). \tag{10.2}$$

Опште решење ове једначине се добија по формули

$$y = e^{-\int p(x)dx}\left(C + \int q(x)e^{\int p(x)dx}dx\right).$$

Пример 10.5. Наћи решење диференцијалне једначине $(\sin y + x\operatorname{tg} y)y' = 1$ које задовољава услов $y(1) = 0$.

Користимо да је $y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{x'}$, па је дата једначина еквивалентна линеарној једначини по x:

$$x' - x\operatorname{tg} y = \sin y.$$

Опште решење је

$$x(y) = e^{-\int p(y)\,\mathrm{d}y}\left(C + \int q(y)e^{\int p(y)\,\mathrm{d}y}\,\mathrm{d}y\right), \quad \text{где је} \quad p(y) = -\operatorname{tg}\, y \;\; \text{и} \;\; q(y) = \sin y.$$

Како је $\displaystyle\int p(y)\,\mathrm{d}y = -\int \operatorname{tg}\, y\,\mathrm{d}y = \ln|\cos y| + C$, добијамо

$$x(y) = \frac{1}{\cos y}\left(C + \int \sin y|\cos y|\,\mathrm{d}y\right) = \frac{1}{\cos y}\left(C - \int \cos y\,\mathrm{d}(\cos y)\right) = \frac{C}{\cos y} - \frac{\cos y}{2}.$$

Партикуларно решење налазимо из услова $1 = \frac{C}{\cos 0} - \frac{\cos 0}{2}$, па је $C = \frac{3}{2}$ и тражено решење је

$$x = \frac{3}{2\cos y} - \frac{\cos y}{2}.$$

10.4 Бернулијева диференцијална једначина

Јендачина облика

$$y' + p(x)y = q(x)y^{\alpha}$$

представља Бернулијуву диференцијалну једначину. Дељењем ове једначине са y^{α} и увођењем смене $y^{1-\alpha} = z$, $z = z(x)$, сводимо је на линеарну диференцијалну једначину по z:

$$\frac{z'}{1-\alpha} + p(x)z = q(x).$$

Пример 10.6. Наћи опште решење диференцијалне једначине $y' = \dfrac{x}{x^2 + y^2}$.

Дата једначина је еквивалентна једначини $x' = \frac{x^2+y^2}{x}$, тј. $x' - x = \frac{y^2}{x}$, што је Бернулијева једначина, $x = x(y)$. Множењем те једначине са x и увођењем смене $x^2 = z$, $2xx' = z'$ сводимо је на линеарну једначину $z' - 2z = 2y^2$. Опште решење је

$$z = e^{\int 2\,\mathrm{d}y}\left(C + \int 2y^2 e^{-\int 2\,\mathrm{d}y}\,\mathrm{d}y\right) = e^{2y}\left(C + \int 2y^2 e^{-2y}\,\mathrm{d}y\right),$$

$$\begin{aligned}\int 2y^2 e^{-2y}\,\mathrm{d}y &= \begin{bmatrix} u = 2y^2, & \mathrm{d}v = e^{-2y}\,\mathrm{d}y, \\ \mathrm{d}u = 4y\,\mathrm{d}y, & v = -e^{-2y}/2 \end{bmatrix} = -y^2e^{-2y} + \int 2ye^{-2y}\,\mathrm{d}y \\ &= \begin{bmatrix} u = 2y, & \mathrm{d}v = e^{-2y}\,\mathrm{d}y, \\ \mathrm{d}u = 2\,\mathrm{d}y, & v = -e^{-2y}/2 \end{bmatrix} = -y^2e^{-2y} - ye^{-2y} - e^{-2y}/2 + C.\end{aligned}$$

Дакле, опште решење је

$$x^2 = Ce^{2y} - \frac{1}{2}\left(2y^2 + 2y + 1\right).$$

Рада Мутавџић Ђукић