

## 11.2 Kinematički lanac sa grananjem\*

Da bi se proces formiranja diferencijalnih jednačina kretanja robotskog sistema automatizovao potrebno je, posle “otvaranja” zatvorenih delova kinematičkog lanca i formiranja strukture topološkog drveta, da se izvrši numeracija segmenata kinematičkog lanca na sledeći način. Najpre se ustanovi, polazeći od segmenta koji vrši pravolinijsku translaciju ili rotaciju u odnosu na nepomično postolje, niz segmenata koji će formirati “stablo” topološkog drveta. Posle toga se formiraju “prve grane” topološkog drveta, polazeći od segmenata koji su zglibom vezani za segmente stabla. Zatim se formiraju “druge grane”, polazeći od segmenata vezanih za “prve grane” stabla. Postupak se nastavlja dalje, u zavisnosti od složenosti robotskog sistema formiranjem “trećih grana”, itd. Numeracija segmenata počinje od segmenta ( $V_1$ ) zglibom vezanim za postolje i to na takav način da je indeks kojim je numerisan bilo koji segment, na putu od ( $V_1$ ) prema vrhu “stabla” ili “grane”, veći od indeksa segmenta koji mu prethodi na tom putu.

Razmotrimo deo otvorenog kinematičkog lanca sa strukturom topološkog drveta (vidi sl. 11.3). Kao što je već rečeno, kruto telo koje se nalazi u podnožju stabla i vezano je cilindričnim (prizmatičnim) zglibom za nepomično postolje označeno je sa ( $V_1$ ) i njemu pripada koordinatni početak  $O$  inercijalnog koordinatnog sistema  $Oxyz$ . Ustanovimo direktan put ( $l_1$ ) izmedju tela ( $V_1$ ) i tela ( $V_{q_2}$ ). Taj put prolazi samo jednom kroz tela koja se na njemu nalaze. Kako je rečeno, indeksi tela na tom putu su u rastućem poretku: ( $V_1, V_2, \dots, V_j, V_{p_1}, V_{p_1+1}, \dots, V_{q_1}$ ). Dalje, ustanovimo direktan put ( $l_2$ ) izmedju tela ( $V_1$ ) i tela ( $V_{q_2}$ ). Taj put, takođe, prolazi samo jednom kroz tela koja se na njemu nalaze. Indeksi tela na tom putu su, takođe, u rastućem poretku: ( $V_1, V_2, \dots, V_j, V_{p_2}, V_{p_2+1}, \dots, V_{q_2}$ ). Ponavljajući taj postupak dolazimo do direktnog puta ( $l_s$ ) izmedju tela ( $V_1$ ) i tela ( $V_{q_s}$ ). Indeksi tela na tom putu su u rastućem poretku: ( $V_1, V_2, \dots, V_j, V_{p_s}, V_{p_s+1}, \dots, V_{q_s}$ ). Na telu ( $V_j$ ), na kome se vrši grananje kinematičkog lanca (to jest, to telo je zglibovima vezano za više od dva tela) definisani su vektori položaja

$$\vec{\rho}_{jp_r} = \overline{O_j O'_{p_r}}, \quad r = 1, 2, \dots, s \quad (11.101)$$

koji određuju vektor položaja  $\vec{\rho}_{jj}$  na sledeći način ( $\vec{\rho}_{jj}$  - vektor položaja koji figuriše u izrazu za vektor položaja centra inercije segmenta ( $V_i$ )):

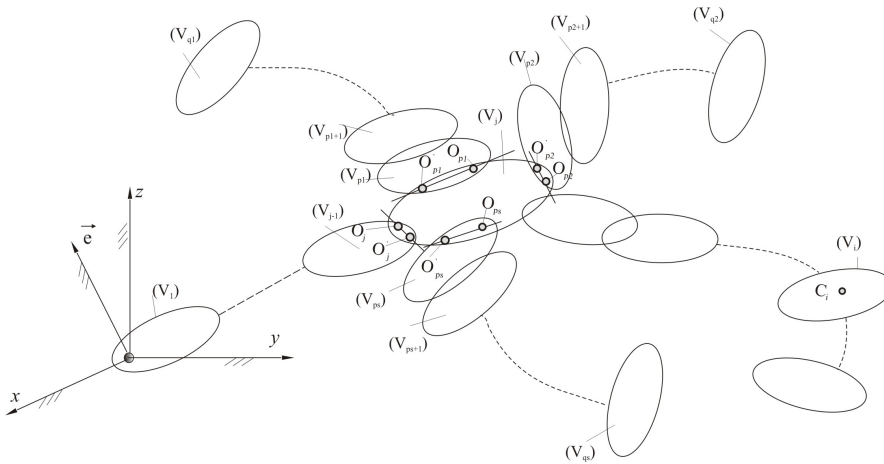
\* Preuzeto iz [35], iz dela monografije koji je napisao V. Čović.

$$\begin{aligned}
\bar{\rho}_{jj} &= \bar{\rho}_{jp_1} \text{ ako } (V_i) \in (l_1), \\
\bar{\rho}_{jj} &= \bar{\rho}_{jp_2} \text{ ako } (V_i) \in (l_2), \\
&\dots\dots\dots \\
&\dots\dots\dots \\
\bar{\rho}_{jj} &= \bar{\rho}_{jp_s} \text{ ako } (V_i) \in (l_s),
\end{aligned}
\tag{11.102}$$

pri čemu je numeracija izvedena tako da važi

$$j < p_1 < q_1 < p_2 < q_2 < \dots < p_s < q_s . \tag{11.103}$$

Indeks  $i$  koji figuriše u (11.77) odnosi se na telo  $(V_i)$  (tj. na put od  $(V_1)$  do  $(V_i)$ ).

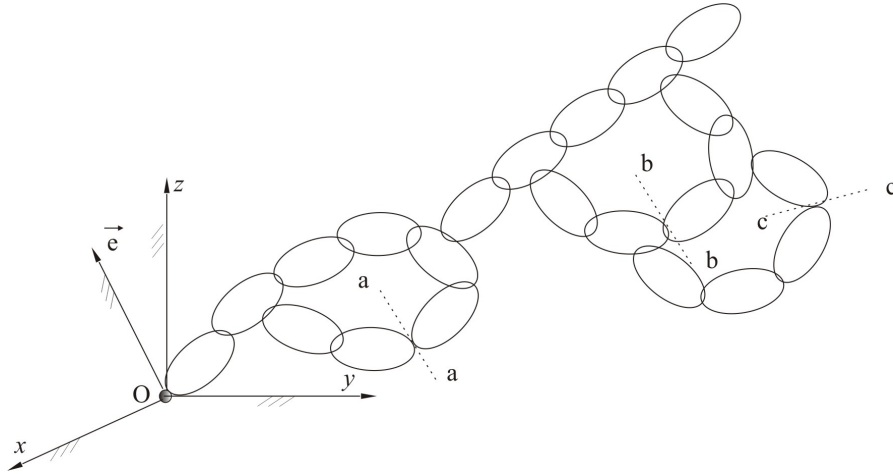


Slika 11.3

Izloženi postupak ilustrujemo sledećim primerom. Neka je (RS) dat u obliku zatvorenog kinematičkog lanca koji sačinjava skup od 22 segemenata, slika 11.4. Pretvorimo posmatrani lanac prekidanjem na mestima  $a-a$ ,  $b-b$  i  $c-c$ , u lanac sa strukturom topološkog drveta (vidi sl. 11.5). Uvedimo matrice

$$\{\eta_{(i)}\} \in R^{i \times 1}, \quad i = 1, 2, \dots, 22 \tag{11.104}$$

na sledeći način. Element matrice  $\eta_{k(i)}$  jednak je jedinici ako se na direktnom putu od segmenta  $(V_i)$  do segmenta  $(V_1)$  nalazi segment  $(V_k)$ . Ukoliko se  $(V_k)$  ne nalazi na tom putu pomenuti element biće jednak nuli. Sve pomenute matrice su šematski prikazane u tabeli 11.1.



Slika 11.4

Vektor položaja centra inercije  $C_i$  proizvoljnog segmenta dat je izrazom

$$\overline{OC_i} = \vec{r}_i = \sum_{k=1}^i \eta_{k(i)} (\vec{\rho}_{kk} + \xi_k \vec{e}_k q^k) + \vec{\rho}_i. \quad (11.105)$$

odakle je

$$\begin{aligned} \vec{T}_{\alpha(i)} &= \eta_{\alpha(i)} \bar{\xi}_{\alpha} \vec{e}_{\alpha} \times \left[ \sum_{k=\alpha}^i \eta_{k(i)} (\vec{\rho}_{kk} + \xi_k \vec{e}_k q^k) + \vec{\rho}_i \right] + \eta_{\alpha(i)} \xi_{\alpha} \vec{e}_{\alpha} \quad \forall \alpha \leq i, \\ \vec{T}_{\alpha(i)} &= 0 \quad \forall \alpha > i. \end{aligned} \quad (11.106)$$

Takodje, u slučaju vektora  $\vec{r}_i$ , čiji su početak i kraj vezani za segment  $(V_i)$ , važiće

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q^{\alpha}} &= \eta_{\alpha(i)} \bar{\xi}_{\alpha} \vec{e}_{\alpha} \times \vec{r}_i \quad \forall \alpha \leq i, \\ \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q^{\alpha}} &= 0 \quad \forall \alpha > i. \end{aligned} \quad (11.107)$$

Sledi da su koeficijenti metričkog tenzora određeni izrazom (vidi (7.106))

$$a_{\alpha\beta(i)} = \sum_{i=1}^n m_i (\vec{T}_{\alpha(i)}) \{ \vec{T}_{\beta(i)} \} + \sum_{i=1}^n (\eta_{\alpha(i)} \bar{\Omega}_{\alpha(i)}) [J_{C_i}] \{ \eta_{\beta(i)} \bar{\Omega}_{\beta(i)} \}, \quad (11.108)$$

a Kristofelovi simboli prve vrste (vidi (4.61) i (8.15)):

$$\Gamma_{\alpha\beta,\gamma} = \sum_{i=1}^n m_i \eta_{a(i)} \bar{\xi}_a (\bar{e}_a^{(c)} \times \bar{T}_{b(i)}^{(c)}) \{ \bar{T}_{\gamma(i)}^{(c)} \} + \sum_{i=1}^n \eta_{a(i)} \eta_{\gamma(i)} \eta_{b(i)} (\bar{\Omega}_{b(i)}^{(i)} \times \bar{\Omega}_{\gamma(i)}^{(i)}) [\Pi_i] \{ \bar{\Omega}_{a(i)}^{(i)} \}. \quad (11.109)$$

Matrica transformacije koordinata iz koordinatnog sistema  $C_i \xi_i \eta_i \zeta_i$ , vezanog za segment  $(V_i)$ , u inercijalni koordinatni sistem  $Oxyz$  ima oblik:

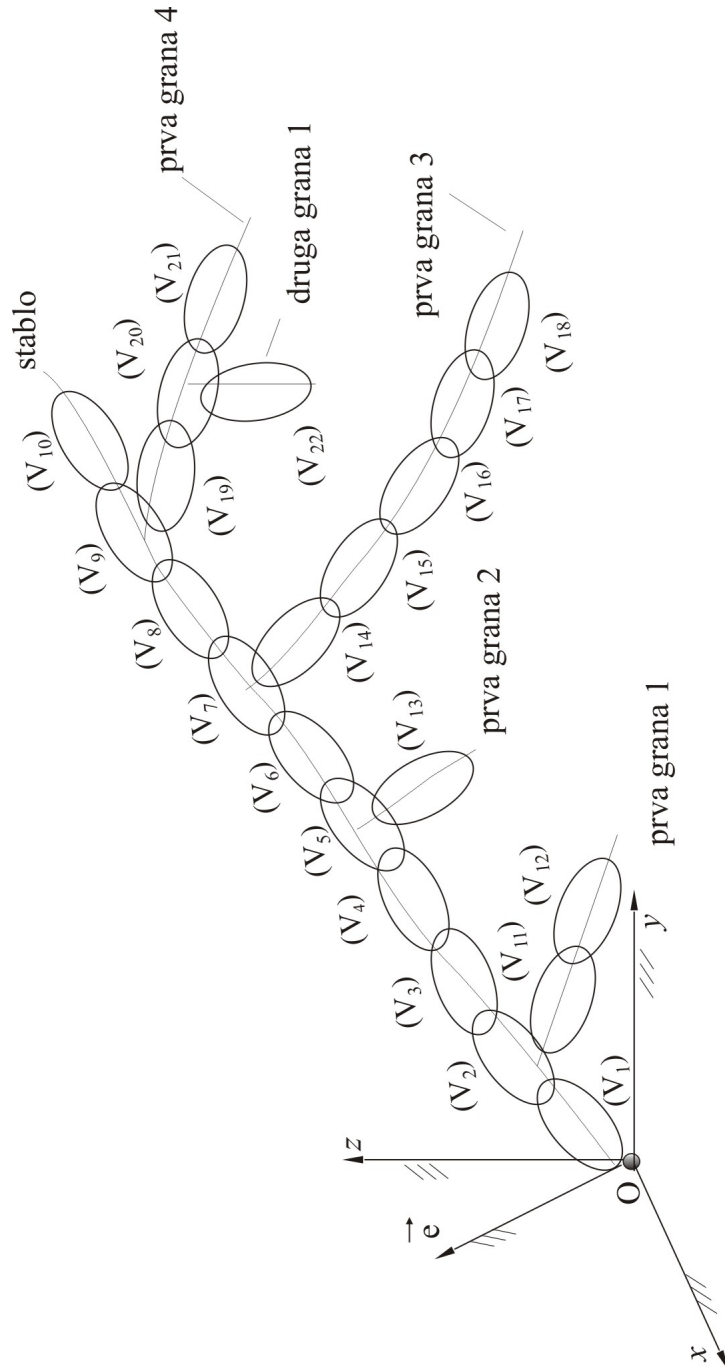
$$[A_{0,i}] = \prod_{k=1}^i [A_k^r], \quad (11.110)$$

gde je

$$[A_k^r] = [I] + \eta_{k(i)} \bar{\xi}_k \left( [e_k^d] (1 - \cos q^k) + [e_k^d] \sin q^k \right), \quad (11.111)$$

Koordinate kovarijantnog metričkog tenzora  $a_{\alpha\beta}$ , (vidi (7.110)), nalaze se standardnim postupkom, a u slučaju da se segment  $(V_{\alpha\beta})$  ne nalazi na putu od  $(V_{\alpha\beta})$  do  $(V_1)$  pokazuje se da važi  $a_{\alpha\beta} = 0$ . Slično, za Kristofelove simbole prve vrste  $\Gamma_{\alpha\beta,\gamma}$ , u slučaju da se na putu od segmenta sa indeksom  $\overline{\alpha\beta\gamma}$  do segmenta  $(V_1)$  ne nalazi bar jedan od dva segmenta sa preostalim indeksima, pokazuje se da važi  $\Gamma_{\alpha\beta,\gamma} = 0$ .

Ako je u pitanju kinematički lanac sa strukturom topološkog drveta, nastao „otvaranjem“ zatvorenog kinemaričkog lanca, koeficijenti metričkog tenzora i Kristofelovi simboli formiraju se postupkom koji je ovde prikazan. Međutim, diferencijalne jednačine formiraju se u obliku (11.100), kako je već rečeno u prethodnom paragrafu.



Slika 11.5

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
$\eta(22)$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	1
$\eta(21)$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1
$\eta(20)$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1
$\eta(19)$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1
$\eta(18)$	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$\eta(17)$	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$\eta(16)$	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$\eta(15)$	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$\eta(14)$	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$\eta(13)$	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$\eta(12)$	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$\eta(11)$	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$\eta(10)$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$\eta(9)$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$\eta(8)$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$\eta(7)$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$\eta(6)$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$\eta(5)$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$\eta(4)$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$\eta(3)$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$\eta(2)$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$\eta(1)$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

Tabela 11.1

Primitimo da formiranje diferencijalnih jednačina kretanja robotskih sistema u simboličkoj formi danas predstavlja gotovo rutinski posao zahvaljujući velikom broju poznatih programa iz oblasti matematike kao i izvanrednim performansama personalnih računara. Uzimajući u obzir činjenicu da na robotske sisteme deluju uglavnom sile pogona i sile zemljine teže, u slučaju da je mehanički model robotskog sistema dat u obliku otvorenog kinematičkog lanca, očigledno je da je za iznalaženje pomenutih jednačina dovoljno da se odredi metrički tenzor toga robotskog sistema,[36-43].