Универзитет у Београду

Машински факултет

Механика робота

Вежбе - једанаеста недеља

Београд, 2023.

ℕℝ

Задатак 16: Кинетичка енергија тећег сегмента Кинетичка енергија сегмента може се одредити на основу израза:

$$E_{k_3} = \frac{1}{2} m_3 V_{c_3}^2 + \frac{1}{2} \left(\vec{\omega}_3^{(3)} \right) \left[J_{c_3}^{(3)} \right] \left\{ \vec{\omega}_3^{(3)} \right\}$$

Квадрат брзине центра масе може се такође написати као производ вектора врсте и вектора колоне:

$$E_{k_3} = \frac{1}{2} m_3 \left(\vec{V}_{c_3}^{(3)} \right) \left\{ \vec{V}_{c_3}^{(3)} \right\} + \frac{1}{2} \left(\vec{\omega}_3^{(3)} \right) \left[J_{c_3}^{(3)} \right] \left\{ \vec{\omega}_3^{(3)} \right\}$$

Дакле, потребно је да одредимо $\vec{V}_{c_3}^{(3)}$ и $\vec{\omega}_3^{(3)}$, али $\vec{\omega}_3^{(3)}$ је иста као у Задатку 15!

Брзину центра масе можемо одредити на основу израза (погледати Задатак 10):

$$\boxed{\overrightarrow{V}_{c_i} = \sum_{\beta=1}^{i} \overrightarrow{T}_{\beta_{(i)}} \dot{q}^{\beta}}$$

где су квазибазни вектори:

$$\boxed{\overrightarrow{T}_{\beta_{(i)}} = \bar{\xi}_{\beta} \vec{e}_{\beta} \times \overrightarrow{R}_{\beta_{(i)}} + \xi_{\beta} \vec{e}_{\beta}}$$

док је $\overrightarrow{R}_{\beta_{(i)}}$ вектор положаја центра масе i-тог сегмента у односу на зглоб сегмента β:

$$\boxed{\overrightarrow{R}_{\beta_{(i)}} = \sum_{\alpha=\beta}^{i} \left(\vec{\rho}_{\alpha\alpha} + \xi_{\alpha} \vec{e}_{\alpha} q^{\alpha} \right) + \vec{\rho}_i}$$

Дакле:

$$\overrightarrow{V}_{c_3} = \sum_{\beta=1}^{3} \overrightarrow{T}_{\beta_{(i)}} \dot{q}^{\beta} = \overrightarrow{T}_{1_{(3)}} \dot{q}^1 + \overrightarrow{T}_{2_{(3)}} \dot{q}^2 + \overrightarrow{T}_{3_{(3)}} \dot{q}^3$$

У односу на локални координатни систем трећег сегмента:

$$\overrightarrow{V}_{c_3}^{(3)} = \overrightarrow{T}_{1_{(3)}}^{(3)} \dot{q}^1 + \overrightarrow{T}_{2_{(3)}}^{(3)} \dot{q}^2 + \overrightarrow{T}_{3_{(3)}}^{(3)} \dot{q}^3$$

Потребно је одредити одговарајуће квазибазне векторе:

$$\boxed{\overrightarrow{T}_{\beta_{(i)}} = \bar{\xi}_{\beta} \vec{e}_{\beta} \times \overrightarrow{R}_{\beta_{(i)}} + \xi_{\beta} \vec{e}_{\beta}}$$

$$\overrightarrow{T}_{1_{(3)}}^{(1)} = 1\cdot\vec{e}_1^{(1)}\times\overrightarrow{R}_{1_{(3)}}^{(1)} + 0\cdot\vec{e}_1^{(1)} = \vec{e}_1^{(1)}\times\overrightarrow{R}_{1_{(3)}}^{(1)} = \left[e_1^{d(1)}\right]\left\{\overrightarrow{R}_{1_{(3)}}^{(1)}\right\}$$
$$\overrightarrow{T}_{2_{(3)}}^{(2)} = 1\cdot\vec{e}_2^{(2)}\times\overrightarrow{R}_{2_{(3)}}^{(2)} + 0\cdot\vec{e}_2^{(2)} = \vec{e}_2^{(2)}\times\overrightarrow{R}_{2_{(3)}}^{(2)} = \left[e_2^{d(2)}\right]\left\{\overrightarrow{R}_{2_{(3)}}^{(2)}\right\}$$
$$\overrightarrow{T}_{3_{(3)}}^{(3)} = 0\cdot\vec{e}_3^{(3)}\times\overrightarrow{R}_{3_{(3)}}^{(3)} + 1\cdot\vec{e}_3^{(3)} = \vec{e}_3^{(3)}$$

Треба да одредимо $\overrightarrow{R}_{1_{(3)}}^{(1)}$ и $\overrightarrow{R}_{2_{(3)}}^{(2)}$!

$$\boxed{\overrightarrow{R}_{\beta_{(i)}} = \sum_{\alpha=\beta}^{i}\left(\vec{\rho}_{\alpha\alpha} + \xi_\alpha\vec{e}_\alpha q^\alpha\right) + \vec{\rho}_i}$$

$$\overrightarrow{R}_{1_{(3)}} = \sum_{\alpha=1}^{3}\left(\vec{\rho}_{\alpha\alpha} + \xi_\alpha\vec{e}_\alpha q^\alpha\right) + \vec{\rho}_i \Rightarrow \overrightarrow{R}_{1_{(3)}}^{(1)} = \vec{\rho}_{11}^{(1)} + \vec{\rho}_{22}^{(1)} + \vec{\rho}_{33}^{(1)} + q^3\vec{e}_3^{(1)} + \vec{\rho}_3^{(1)}$$

где ће бити извршене неопходне трансформације:

$$\overrightarrow{R}_{1_{(3)}}^{(1)} = \left\{\vec{\rho}_{11}^{(1)}\right\} + [A_{1,2}]\left\{\vec{\rho}_{22}^{(2)}\right\} + [A_{1,3}]\left(\left\{\vec{\rho}_{33}^{(3)}\right\} + q^3\left\{\vec{e}_3^{(3)}\right\} + \left\{\vec{\rho}_3^{(3)}\right\}\right) = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1,0781 \\ 1,0185 \end{Bmatrix}$$

$$\overrightarrow{R}_{2_{(3)}} = \sum_{\alpha=2}^{3}\left(\vec{\rho}_{\alpha\alpha} + \xi_\alpha\vec{e}_\alpha q^\alpha\right) + \vec{\rho}_i \Rightarrow \overrightarrow{R}_{2_{(3)}}^{(2)} = \vec{\rho}_{22}^{(2)} + \vec{\rho}_{33}^{(2)} + q^3\vec{e}_3^{(2)} + \vec{\rho}_3^{(2)} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1,1 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Коначно, квазибазни вектори су:

$$\overrightarrow{T}_{1_{(3)}}^{(1)} = \left[e_1^{d(1)}\right]\left\{\overrightarrow{R}_{1_{(3)}}^{(1)}\right\} = \begin{Bmatrix} -1,0781 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\overrightarrow{T}_{2_{(3)}}^{(2)} = \left[e_2^{d(2)}\right]\left\{\overrightarrow{R}_{2_{(3)}}^{(2)}\right\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\overrightarrow{T}_{3_{(3)}}^{(3)} = \vec{e}_3^{(3)} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Брзина центра масе трећег сегмента је:

$$\overrightarrow{V}_{c_3}^{(3)} = [A_{1,3}]^T \, \overrightarrow{T}_{1_{(3)}}^{(1)} \dot{q}^1 + [A_{2,3}]^T \, \overrightarrow{T}_{2_{(3)}}^{(2)} \dot{q}^2 + \overrightarrow{T}_{3_{(3)}}^{(3)} \dot{q}^1 = \begin{Bmatrix} -0,2156 \\ 0,6 \\ 0,44 \end{Bmatrix} \left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right]$$

Кинетичка енергија трећег сегмента је:

$$\begin{aligned} E_{k_3} &= \frac{1}{2} m_3 \left(\vec{V}_{c_3}^{(3)}\right) \left\{\vec{V}_{c_3}^{(3)}\right\} && + \frac{1}{2} \left(\vec{\omega}_3^{(3)}\right) \left[J_{c_3}^{(3)}\right] \left\{\vec{\omega}_3^{(3)}\right\} \\ &= E_{k_3}^{tr} && + E_{k_3}^{rot} \\ &= 1,5002 && + 0,9929 = 2,4931\,\mathrm{J} \end{aligned}$$

Када одређујемо квадрат брзине центра масе, вектор брзине можемо одредити у односу на произвољни координатни систем

$$\begin{aligned} \left(\vec{V}_{c_3}^{(0)}\right) \left\{\vec{V}_{c_3}^{(0)}\right\} = \left([A_{0,3}] \left\{\vec{V}_{c_3}^{(3)}\right\}\right)^T [A_{0,3}] \left\{\vec{V}_{c_3}^{(3)}\right\} &= \left(\vec{V}_{c_3}^{(3)}\right) [A_{0,3}]^T [A_{0,3}] \left\{\vec{V}_{c_3}^{(3)}\right\} \\ &= \left(\vec{V}_{c_3}^{(3)}\right) [I] \left\{\vec{V}_{c_3}^{(3)}\right\} \\ &= \left(\vec{V}_{c_3}^{(3)}\right) \left\{\vec{V}_{c_3}^{(3)}\right\} \end{aligned}$$

Задатак 16: Коефицијенти метричког тензора Кинетичка енергија може се одредити на следећи начин

$$E_k = \frac{1}{2} (\dot{q}) [A] \{\dot{q}\}$$

где су $\dot{q}$ генералисане брзине, а $[A]$ метрички тензор:

$$[A] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

при чему важи:

$$a_{ij} = a_{ji}, \quad i, j = 1, 2, 3$$

Коефицијенте метричког тензора можемо одредити на два начина. Први начин подразумева одређивање следећих парцијалних извода функције кинетичке енергије:

$$a_{\alpha\beta} = \frac{\partial^2 E_k}{\partial \dot{q}^\alpha \partial \dot{q}^\beta}$$

Овде ће тражени коефицијенти бити одређени на други начин:

$$\boxed{a_{\alpha\beta} = \sum_{i=sup(\alpha,\beta)}^{n} m_i \left(\overrightarrow{T}_{\alpha_{(i)}}\right) \left\{\overrightarrow{T}_{\beta_{(i)}}\right\} + \overline{\xi}_\alpha \overline{\xi}_\beta \left(\vec{e}_\alpha^{(i)}\right) \left[J_{c_i}^{(i)}\right] \left\{\vec{e}_\beta^{(i)}\right\}}$$

$$\begin{aligned} a_{11} &= \sum_{i=sup(1,1)}^{3} m_i \left(\overrightarrow{T}_{1_{(i)}}\right) \left\{\overrightarrow{T}_{1_{(i)}}\right\} + \overline{\xi}_1 \overline{\xi}_1 \left(\vec{e}_1^{(i)}\right) \left[J_{c_i}^{(i)}\right] \left\{\vec{e}_1^{(i)}\right\} \\ &= \sum_{i=1}^{3} m_i \left(\overrightarrow{T}_{1_{(i)}}\right) \left\{\overrightarrow{T}_{1_{(i)}}\right\} + 1 \cdot \left(\vec{e}_1^{(i)}\right) \left[J_{c_i}^{(i)}\right] \left\{\vec{e}_1^{(i)}\right\} \end{aligned}$$

Дакле:

$$\begin{aligned} a_{11} = & m_1 \left(\overrightarrow{T}_{1_{(1)}}\right) \left\{\overrightarrow{T}_{1_{(1)}}\right\} + \left(\vec{e}_1^{(1)}\right) \left[J_{c_1}^{(1)}\right] \left\{\vec{e}_1^{(1)}\right\} \\ & + m_2 \left(\overrightarrow{T}_{1_{(2)}}\right) \left\{\overrightarrow{T}_{1_{(2)}}\right\} + \left(\vec{e}_1^{(2)}\right) \left[J_{c_2}^{(2)}\right] \left\{\vec{e}_1^{(2)}\right\} \\ & + m_3 \left(\overrightarrow{T}_{1_{(3)}}\right) \left\{\overrightarrow{T}_{1_{(3)}}\right\} + \left(\vec{e}_1^{(3)}\right) \left[J_{c_3}^{(3)}\right] \left\{\vec{e}_1^{(3)}\right\} \end{aligned}$$

Потребно је извршити следеће трансформације јединичних вектора осе ротације:

$$\vec{e}_1^{(2)} = [A_{1,2}]^T \vec{e}_1^{(1)} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0,1987 \\ 0,9801 \end{Bmatrix}$$

$$\vec{e}_1^{(3)} = [A_{1,3}]^T \, \vec{e}_1^{(1)} = [A_{1,2}]^T \, \vec{e}_1^{(1)} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0,1987 \\ 0,9801 \end{Bmatrix}$$

Треба одредити и векторе $\overrightarrow{T}_{1_{(1)}}$, $\overrightarrow{T}_{1_{(2)}}$ и $\overrightarrow{T}_{1_{(3)}}$, али вектор $\overrightarrow{T}_{1_{(3)}}$ је већ одређен при рачунању кинетичке енергије!

Квазибазни вектори су:

$$\boxed{\overrightarrow{T}_{\beta_{(i)}} = \bar{\xi}_\beta \vec{e}_\beta \times \overrightarrow{R}_{\beta_{(i)}} + \xi_\beta \vec{e}_\beta}$$

$$\overrightarrow{T}_{1_{(1)}}^{(1)} = 1 \cdot \vec{e}_1^{(1)} \times \overrightarrow{R}_{1_{(1)}}^{(1)} + 0 \cdot \vec{e}_1^{(1)} = \vec{e}_1^{(1)} \times \overrightarrow{R}_{1_{(1)}}^{(1)} = \left[e_1^{d(1)}\right] \left\{\overrightarrow{R}_{1_{(1)}}^{(1)}\right\}$$
$$\overrightarrow{T}_{1_{(2)}}^{(1)} = 1 \cdot \vec{e}_1^{(1)} \times \overrightarrow{R}_{1_{(2)}}^{(1)} + 0 \cdot \vec{e}_1^{(1)} = \vec{e}_1^{(1)} \times \overrightarrow{R}_{1_{(2)}}^{(1)} = \left[e_1^{d(1)}\right] \left\{\overrightarrow{R}_{1_{(2)}}^{(1)}\right\}$$

Треба да одредимо $\overrightarrow{R}_{1_{(1)}}^{(1)}$ и $\overrightarrow{R}_{1_{(2)}}^{(1)}$!

$$\boxed{\overrightarrow{R}_{\beta_{(i)}} = \sum_{\alpha=\beta}^{i} \left(\vec{\rho}_{\alpha\alpha} + \xi_\alpha \vec{e}_\alpha q^\alpha\right) + \vec{\rho}_i}$$

$$\overrightarrow{R}_{1_{(1)}}^{(1)} = \vec{\rho}_{11}^{(1)} + \vec{\rho}_1^{(1)}$$

$$\overrightarrow{R}_{1_{(2)}}^{(1)} = \vec{\rho}_{11}^{(1)} + \vec{\rho}_{22}^{(1)} + \vec{\rho}_2^{(1)} = \vec{\rho}_{11}^{(1)} + [A_{1,2}] \left(\vec{\rho}_{22}^{(2)} + \vec{\rho}_2^{(2)}\right)$$

Коначно:

$$\overrightarrow{T}_{1_{(1)}}^{(1)} = \left[e_1^{d(1)}\right] \left\{\vec{\rho}_{11}^{(1)} + \vec{\rho}_1^{(1)}\right\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$
$$\overrightarrow{T}_{1_{(2)}}^{(1)} = \left[e_1^{d(1)}\right] \left\{\vec{\rho}_{11}^{(1)} + [A_{1,2}] \left(\vec{\rho}_{22}^{(2)} + \vec{\rho}_2^{(2)}\right)\right\} = \begin{Bmatrix} -0,294 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Коефицијент метричког тензора a_{11} је:

$$a_{11} = 26,533$$

Коефицијент метричког тензора a_{12} ће бити одређен на основу суме:

$$
\begin{aligned}
a_{12} &= \sum_{i=sup(1,2)}^{3} m_i \left(\overrightarrow{T}_{1_{(i)}}\right) \left\{\overrightarrow{T}_{2_{(i)}}\right\} + \bar{\xi}_1 \bar{\xi}_2 \left(\vec{e}_1^{(i)}\right) \left[J_{c_i}^{(i)}\right] \left\{\vec{e}_2^{(i)}\right\} \\
&= \sum_{i=2}^{3} m_i \left(\overrightarrow{T}_{1_{(i)}}\right) \left\{\overrightarrow{T}_{2_{(i)}}\right\} + \left(\vec{e}_1^{(i)}\right) \left[J_{c_i}^{(i)}\right] \left\{\vec{e}_2^{(i)}\right\}
\end{aligned}
$$

Дакле:

$$
\begin{aligned}
a_{12} =& m_2 \left(\overrightarrow{T}_{1_{(2)}}\right) \left\{\overrightarrow{T}_{2_{(2)}}\right\} + \left(\vec{e}_1^{(2)}\right) \left[J_{c_2}^{(2)}\right] \left\{\vec{e}_2^{(2)}\right\} \\
&+ m_3 \left(\overrightarrow{T}_{1_{(3)}}\right) \left\{\overrightarrow{T}_{2_{(3)}}\right\} + \left(\vec{e}_1^{(3)}\right) \left[J_{c_3}^{(3)}\right] \left\{\vec{e}_2^{(3)}\right\}
\end{aligned}
$$

Потребни квазибазни вектори су:

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{T}_{2_{(2)}}^{(1)} = [A_{1,2}] \, \overrightarrow{T}_{2_{(2)}}^{(2)} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -0,0596 \\ 0,294 \end{Bmatrix} \\
\overrightarrow{T}_{2_{(3)}}^{(1)} = [A_{1,2}] \, \overrightarrow{T}_{2_{(3)}}^{(2)} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -0,2185 \\ 1,0781 \end{Bmatrix}
\end{aligned}
$$

Такође ће бити извршена и следећа трансформација:

$$
\vec{e}_2^{(3)} = [A_{2,3}]^T \, \vec{e}_2^{(2)} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}
$$

Тражени коефицијент метричког тензора је:

$$
a_{12} = 0
$$